

## DIFERENCIAS EN LA COMPRENSIÓN DE LAS TRASLACIONES PARA DISTINTOS TIPOS DE REPRESENTACIONES VISUALES

Lianggi Espinoza Ramírez

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO, CHILE

leanggi@gmail.com

**Resumen.** *En esta investigación se buscó evidenciar la influencia de distintos tipos de representaciones visuales en la comprensión de los estudiantes en las traslaciones de funciones. Para esto, se construyó una clasificación relacionada con el nivel de abstracción implícito en tales imágenes visuales. Los resultados evidencian que existen diferencias en las comprensiones de los estudiantes para distintos tipos de representaciones visuales, y en específico, una “implicancia” de la representación más genérica sobre la menos genérica, en el sentido de los tipos de tareas que pueden desarrollar los estudiantes a través del uso de ellas. Finalmente reflexiono en torno al papel que juegan estas representaciones como instrumentos de la actividad matemática.*

**Palabras Clave:** “Visualización en matemáticas”, “Representaciones visuales”.

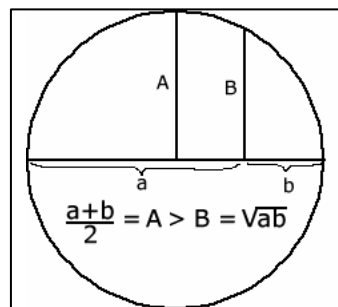
### Introducción

La visualización en matemáticas ha adquirido un nivel de importancia que décadas atrás era inimaginable. Ésta ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la matemática, explícitamente reconocido por los grandes matemáticos de todos los tiempos, siendo usada tanto para el descubrimiento, la argumentación y la comprensión (Guzmán, 1996). Sin embargo, a comienzos del siglo veinte, producto de la necesidad de la comunidad matemática de precisión en los resultados (causados por resultados incongruentes, como la paradoja de Russell), se comenzaron a mirar con desconfianza los argumentos intuitivos y la visualización con ellos, lo cual llegó incluso a desear prescindir totalmente de ella, al considerarla como una limitante para

la comprensión: "Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las "figuras" tradicionales hablando lo menos posible de ellas". (Referencia de un texto de Álgebra de 1952 en Guzmán, 1996). Esta corriente formalista desechó las ideas intuitivas, las representaciones figurales y se "perdió el contexto específico que dio vida a los objetos matemáticos" (Briebea, 1998). En las últimas décadas, se ha reconocido la importancia que tienen los argumentos intuitivos (junto con la visualización) como la de los formales en la matemática, pues, "ambos se enriquecen y favorecen el desarrollo de la ciencia" (Briebea, 1998). En esto, la tecnología ha jugado un rol fundamental, "haciendo posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante" (Moreno, 2003).

En matemática educativa, se han realizando estudios de gran interés y reveladores en torno al papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática, analizando tanto la visualización en si misma, como también su uso en situaciones de enseñanza (Campos, 2003; Cordero, 1998; Duval, 2003). De ellos, es de relevancia para este trabajo la diferencia existente entre ver y visualizar, que surge de diferenciar lo que es una figura y un dibujo (Duval, 2003), y de donde emerge la problemática de la presente investigación. La motivación de realizar esta investigación está en saber si las representaciones visuales utilizadas por los estudiantes inciden, y de qué manera, en sus comprensiones en matemáticas. Para precisar nuestra pregunta de investigación se explicará lo que se está entendiendo por visualización en matemáticas.

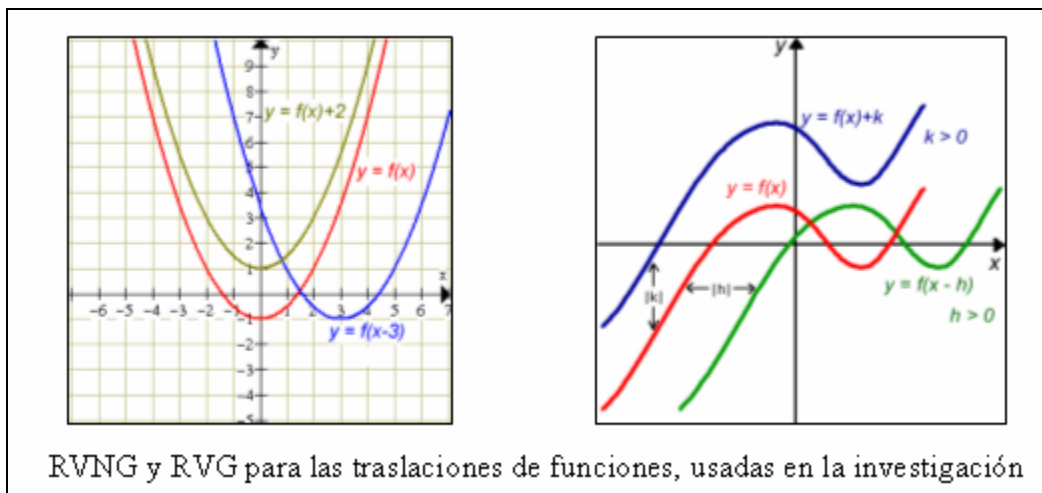
La idea central del presente trabajo está en concebir la visualización como un proceso, lo cual se desprende de la definición de visualización en matemáticas planteada en Zimmerman y Cunningham (1991) como "el proceso de formación de imágenes mentales y el uso de tales en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento".



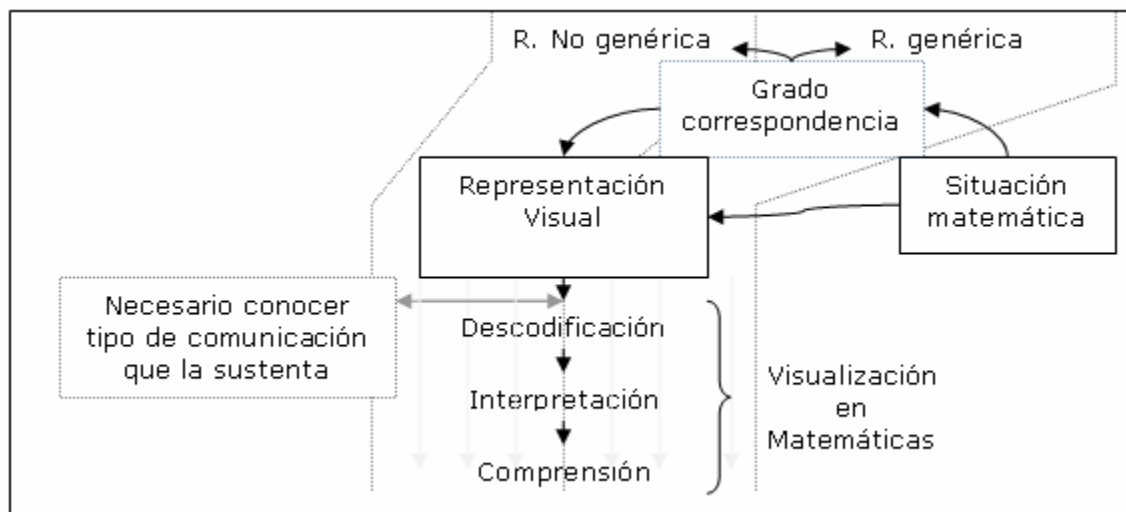
La visualización en matemáticas “trata de un verdadero camino de codificación y descodificación” lo cual se podrá realizar eficazmente solamente si se puede “leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta” (Guzmán, 1996). Para ilustrar esto se puede intentar visualizar la figura adjunta (Tomada de Eisenberg y Dreyfus, 1991).

Se intentó categorizar distintos tipos de representaciones visuales usadas en el cálculo. Después de estudios de textos y observaciones de clases, y considerando referencias anteriores (Guzmán, 1996 y Brevia, 1998) es que, según el grado de correspondencia entre la situación matemática que trataremos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo, definimos la siguiente categorización de representaciones visuales:

- Representaciones visuales no genéricas (RVNG): En las cuales el grado de correspondencia es exacto en cuanto a las relaciones que se desean estudiar, y corresponde a una representación gráfica que, aunque puede contener datos de la gráfica (puntos y sus imágenes, dominio y recorrido), no puede hacer alusión a algún tipo de parámetro.
- Representaciones visuales genéricas: En las cuales el grado de correspondencia está en función de relaciones que se desean estudiar. Corresponde a una representación gráfica que debe hacer alusión a algún(os) tipo(s) de parámetro(s).



Considerando las observaciones de Guzmán (1996), se cree que estos tipos de representaciones visuales generarán distintas visualizaciones en los estudiantes, y por consecuencia, distintas comprensiones. Estas ideas las condensamos en el siguiente esquema:

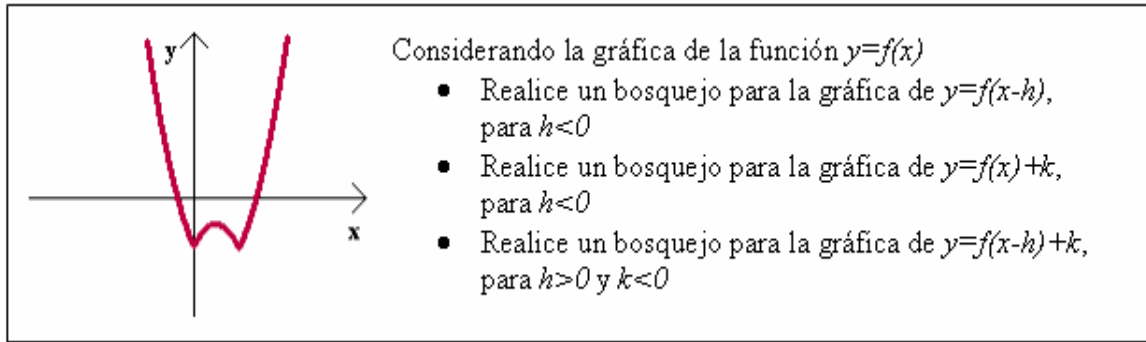


Se decidió usar la traslación de funciones por su basta riqueza visual y porque no es un contenido curricular en la enseñanza secundaria en Chile, lo cual es un aspecto vital para la metodología de esta investigación.

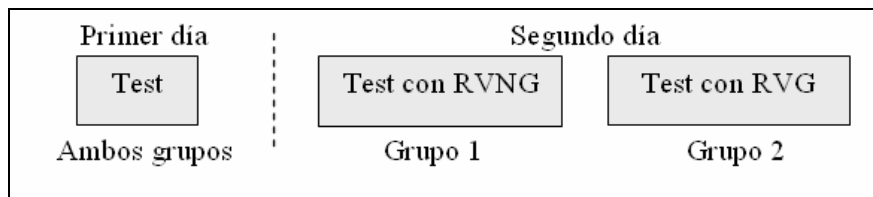
En función de todo lo explicitado, se planteó la pregunta general ¿Incide y de qué manera el grado de correspondencia entre el objeto matemático involucrado y la representación utilizada en la comprensión del concepto matemático involucrado?, y para el caso de nuestra investigación, ¿Existen diferencias en la comprensión del objeto matemático traslaciones de funciones entre sujetos que acceden al objeto a través de una representación visual del tipo no genérico y sujetos que acceden al objeto a través de un representación visual del tipo genérico?, ¿Será alguno de estos tipos de representaciones visuales más asequibles para los estudiantes?. Se plantea como objetivo indagar sobre la existencia de diferencias en la comprensión del objeto matemático traslaciones de funciones entre representaciones visuales de tipo genérico y no genérico.

## **Metodología**

Se escogió una metodología cualitativa exploratoria. Para poder indagar sobre las comprensiones de los estudiantes para los tipos de representaciones ya descritas, se construyeron dos representaciones visuales que explicaran las traslaciones de funciones, una de tipo no genérico (RVNG) y la otra de tipo genérico (RVG). También se construyó un test que permitiera medir aspectos relevantes de las traslaciones de funciones, con su respectiva rúbrica que permitiera evaluar los resultados a través de porcentaje de logro de cada actividad. El test constó de tres ítems, de la manera siguiente: en los dos primeros se evaluó la capacidad de realizar una transformación de funciones conociendo la función e información de la traslación involucrada, para la primera actividad una función específica y traslaciones específicas no genéricas, y para la segunda una función genérica y traslaciones genéricas en el sentido ya explicado. En el tercer ítem, dada la gráfica de una función y de traslaciones de ésta, se pide a los estudiantes que expliciten la traslación involucrada. Como ejemplo se muestra el enunciado de la actividad dos:



Los sujetos de estudio fueron doce alumnos (17-18 años) de un establecimiento de subvención estatal<sup>54</sup> de Chile, que fueron seleccionados a partir de los mejores rendimientos en matemáticas en su curso, y que tienen como grupo un promedio de clasificación de 5.6 en escala de 1 a 7. Estos alumnos fueron separados en dos grupos, de manera que cada subgrupo tuviera el mismo promedio de clasificación. La experimentación se llevo a cabo en dos días consecutivos, de la manera que está explicado en el siguiente diagrama:



En el segundo día, como se explica en la imagen anterior, los alumnos respondieron el test con la información obtenida a través de la visualización (en el sentido ya explicitado) de las representaciones visuales. Para permitir esto, antes de darles el

<sup>54</sup> En Chile, existen establecimientos municipales, particulares con subvención estatal y particulares sin tal subvención. En la enseñanza secundaria, la gran mayoría de los estudiantes están en los dos primeros grupos, los cuales tienen un rendimiento similar en las pruebas de matemáticas en la evaluación nacional de calidad de la educación, llamada SIMCE.

test para que lo respondiesen, se les dio la representación visual y se les pidió que la analizaran e hicieran anotaciones de lo que observaban, por un tiempo de cinco minutos.

También se realizó un análisis a priori del test, el cual, mediante su confrontación con las respuestas de los estudiantes, fue útil para realizar análisis posteriores como: comparar los resultados de los test del primer día (sin las representaciones visuales) con los resultados del segundo día, con la finalidad de evaluar la incidencia de tales representaciones en las respuestas de los estudiantes; comparar los distintos resultados de ambos grupos, para poder llevar a cabo el objetivo de esta investigación.

## Resultados

El nivel de logro total en la aplicación del test en el primer día fue de 1.9%, y en el segundo día fue 55%. Los alumnos, con el uso de las representaciones visuales ya descritas, mejoraron significativamente sus logros hasta incluso subir sus niveles de 0% a 100%. En la siguiente tabla se explicitan estos datos en porcentaje:

Alumnos:	1A	1B	1C	1D	1E	1F	2 <sup>a</sup>	2B	2C	2D	2E	2F
Primer día:	0	0	0	7.5	0	0	0	0	0	0	15	0
Segundo día:	20	77.5	7.5	57.5	12.5	37.5	100	15	90	17.5	65	37.5

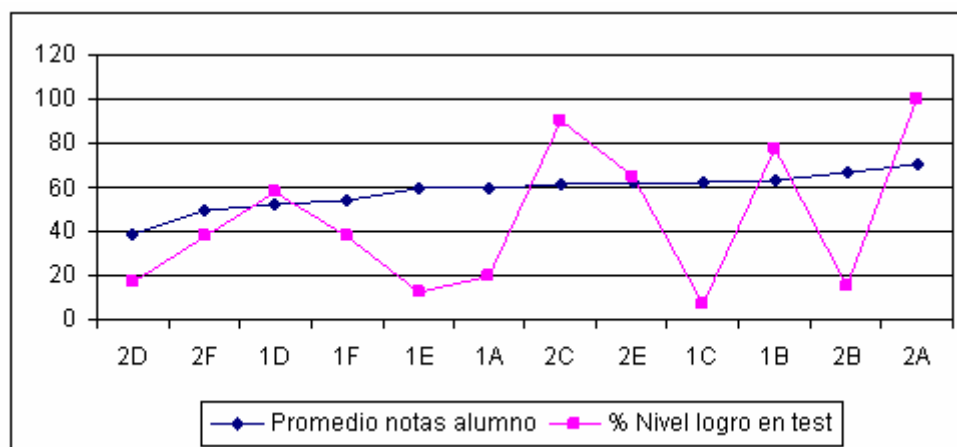
Sobre los resultados de la aplicación del test en el segundo día, de manera general, el grupo 2 RVG tuvo un nivel de logro de 55%, contrastando con el 37,9% del grupo 1 RVNG. Los detalles de los niveles de logro por grupo para cada actividad e ítem se encuentran en las siguientes tablas en porcentajes:

Grupo	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3
Grupo 1 - RVNG	44.5	30	40
Grupo 2- RVG.	50	53.4	65
Diferencia (RVG-RVNG)	5.5	23,4	25

Grupo	Actividad 1			Actividad 2			Actividad 3	
	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B
Grupo 1 - RNG	50	33,4	50	36,7	33,4	20	60	33,4
Grupo 2- RG	66,7	50	33,4	56,7	36,7	66,7	70	56,7

Sobre la confrontación, en específico en el análisis de las respuestas de los estudiantes, se puede decir que se encontraron bosquejos de gráficas que hacían relación a funciones afines, contenido muy trabajado en sus currículos y que habían sido estudiados hace poco tiempo. También se encontró una influencia del tipo de representaciones visuales utilizadas para responder el test con respecto a las representaciones visuales usadas por los alumnos en sus respuestas. Además se encontró un porcentaje mayor de omisiones en el grupo uno (14 preguntas omitidas) que el grupo 2 (4 preguntas omitidas).

Al comparar los niveles de logro en los test con los rendimientos de los alumnos en matemáticas, no se encontró una correlación entre ellos, pero si una tendencia de relación en los datos extremos, como se puede apreciar en el siguiente gráfico:





## Discusión

Después de haber recolectado los datos, se evidenció lo siguiente: las representaciones visuales utilizadas resultaron ser un medio muy eficaz para la comprensión de las traslaciones de funciones. No se esperaba en el análisis a priori que algún alumno subiera su porcentaje de logro en el test de 0% a un 100% por el uso de las representaciones.

Sobre el objetivo de la investigación, se evidencian diferencias en la comprensión de las traslaciones de funciones entre los grupos que utilizaron las representaciones ya descritas. En términos globales, el grupo que usó la RVG tuvo mayor nivel de logro en el test que el que usó la RVNG. En la actividad uno, en donde los problemas estaban en el contexto de las RVNG, no apareció una diferencia significativa entre ambos grupos. Sin embargo en la actividad dos, en donde los problemas estaban en el contexto de las RVG se encontró un mayor nivel de logro en el grupo que usó la RVG sobre el otro, lo mismo que sucedió con la actividad tres, la cual comprendía una tarea distinta. Con todo esto, se puede afirmar que *existe una "implicancia" en torno a los tipos de tareas que puede abordar el grupo que usó la RVG sobre el otro grupo*, en el sentido que pueden abordar las mismas tareas, y más tareas que las que puede abordar el grupo que usó la RVNG. También se encontró, analizando los resultados por grupo, que la diferencia de los rendimientos entre las actividades del grupo RVG fue despreciable, lo cual también evidencia la implicancia ya descrita. Además se encontró solamente en el grupo RVNG justificaciones relacionadas con ideas físicas, lo cual muestra que el grupo RVG tuvo mayor nivel de argumentación.

Se encontró que los alumnos que utilizaron la RVG se conformaban con soluciones parciales a algunos problemas, lo cual se cree que es influenciado por la representación visual utilizada, de lo que concluimos que las representaciones influyen en las respuestas de los estudiantes. Se considera también que la no relación existente entre el rendimiento de los alumnos en clases de matemáticas y sus niveles de logro en la experiencia realizada evidencia que las habilidades de visualización no

están consideradas en las evaluaciones de la escuela. Sobre las referencias a funciones lineales en las respuestas de los estudiantes, se cree que esto es producto de la relación que hacen los alumnos con conocimientos previos.

## Conclusiones

- Un asunto relevante es considerar cómo distintos tipos de representaciones visuales entregan diferente información del contenido matemático, o dicho de otra manera, tales representaciones influyen de manera significativa en lo que el alumno puede comprender y en los tipos de tareas que pueden realizar. Se considera que esto puede ser incorporado al llamado de atención que ha realizado la investigación en torno al papel que juegan los instrumentos en la educación matemática, y de manera más general, en la actividad humana (Trouche, 2005)
- A partir del potencial de las representaciones gráficas para brindar información de contenidos matemáticos, se considera de interés estudiar el potencial de tales como mediadores de comunicación de percepción holística, los cuales, se consideran diferentes y más comunicadores que los de lenguaje de percepción lineal, como lo son los producidos por la mediación de las representaciones algebraicas o del lenguaje natural.
- Sobre los resultados relacionados al objetivo de la investigación, si bien, se suponía que habrían diferencias en las comprensiones de los estudiantes, no se tenía claridad de cómo sería esta diferencia, por lo cual se considera como revelador la implicancia encontrada en torno a los tipos de tareas que pueden hacer los alumnos que usaron RVG sobre el otro grupo, y se considera que este resultado puede ser ampliado, para que pueda ser un dato de referencia para las realización de secuencias didácticas para niveles equivalentes o superiores al del grupo estudiado.

- En este sentido, y considerando tanto que la pedagogía del profesor de los alumnos estudiados es bastante tradicional (y por tanto, semejante a la de otros profesores del sistema educacional chileno), como también la heterogeneidad de los alumnos estudiados, se cree que los resultados pueden ser extensibles para otros alumnos del contexto educativo. También se considera que lo que influyó fuertemente en los resultados fue la característica de las representaciones visuales utilizadas más que el contenido matemático en cuestión. Se piensa, por tanto, que resultados muy similares se evidenciarían para otros contenidos matemáticos, como lo son las transformaciones de funciones, las reflexiones de funciones en torno a los ejes, la noción de recta tangente a través de la disminución del diferencial, etc.

## **Bibliografía**

Briebe, M. (1998). Visualización frente a problemas aditivos. *Tesis Magíster en Didáctica de la matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.*

Campos, C. (2003). La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica. *Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.*

Cordero, F. (1998). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 4(2), 103-128.*

De Guzmán, M. (1996) El rincón de la pizarra, *edición Pirámides, Madrid.*

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine, *Peter Lang, Francia.*

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques, *apunte coloquio didáctica de la matemática, ima-pucv. Valparaíso, Chile.*

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. *Visualization in teaching and learning mathematics, 25-37.*

Moreno, L. (2003). Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización. <http://www.eduteka.org/GeometriaVisual.php>.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 25(1), 91-142.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization?. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-8.