UNIDAD DIDÁCTICA

ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y SISTEMAS DE ECUACIONES

16 de Febrero de 2009

Trabajo realizado para la asignatura de didáctica de la matemática Curso 2008-2009

Autores: Yolanda Navas Alors
Verónica Fuentes Estepa
Pedro Ondoño Cerda
José Antonio Fernández Plaza
Francisco Javier Fernández Medina

Índice

1. Análisis de Contenido

1.1 DESARROLLO HISTÓRICO

Vamos a hablar a continuación de la historia referida a las ecuaciones de primer grado y de los sistemas de ecuaciones.

La ***primera fase*** del desarrollo del álgebra, comprende el periodo de 1700 a.d.C a 1700 d.d.C, dicha fase se caracterizó por la ***invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones***. Dentro de esta fase encontramos un álgebra llamada ***álgebra geométrica***, (300 a.d.C), la cual fue desarrollada por los griegos y con ella resolvían ecuaciones algebraicas utilizando métodos geométricos.

Descartes contribuyó de forma importante en el desarrollo de la ***notación simbólica*** que marca el inicio de una nueva etapa en la cual, ***el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones***. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los ***"cálculos con cantidades de distintas clases"*** se realizaban cálculos con números racionales enteros, con fracciones ordinarias, con raíces cuadradas y cúbicas, con progresiones y con todo tipo de ecuaciones.

Una cosa asombrosa es que para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación ax+b=c, han pasado más de 3000 años.

EGIPCIOS

Cabe destacar que los egipcios nos dejaron en sus ***papiros*** multitud de problemas matemáticos, donde la mayoría de ellos eran de ***tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida cotidiana***. En éstos obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma: $x+ax=b$

$x+ax+bx=0$.

donde a y b eran números conocidos y x la ***incógnita*** a la que ellos denominaban ***aha o montón.***

En el Papiro de Rhind encontramos muchos de los cálculos de “aha”, dicho papiro fue escrito en el año 1650 a.d.C y contenía 87 problemas resueltos, los cuales eran ejercicios para que los jóvenes estudiantes practicasen. Los procesos seguidos en la resolución eran puramente aritméticos y para ellos no constituían un tema distinto como podía ser la resolución actual de ecuaciones.

La solución era obtenida por un método que hoy conocemos como **“método de la falsa posición”** o **“regula falsi”.** Dicho método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos se obtendría la solución exacta.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto el simbolismo, **solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.**

BABILONIOS

El mayor número de documentos babilónicos corresponden al periodo (600 a.d.C. a 300 d.d.C.)

Los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás porque las consideraban demasiado elementales, y trabajaron más los ***sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.***

Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. A menudo aparecen las palabras ***us (longitud), sag (anchura) y as â (área)*** las cuales eran utilizadas para representar las incógnitas, no era porque dichas incógnitas representaran tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. Un indicio de que esto era así, es que los babilónicos no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

Un **ejemplo** tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos
longitud + anchura = 10 manos

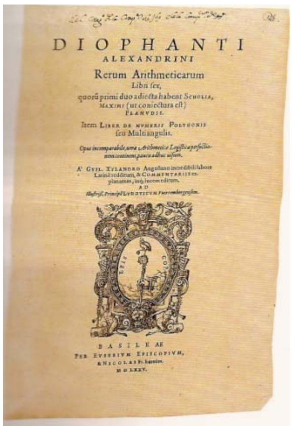
GRIEGOS

Los matemáticos griegos **no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales** y, exceptuando a Diofanto de Alejandría (250 d. de C.), **no se dedicaron mucho al álgebra, ya que su preocupación era la geometría.**

En los siglos V o VI aparece un epigrama algebraico sobre la vida de Diofanto que constituye una ecuación lineal y dice:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años.

De todo esto, deduce su edad. "



Diofanto

El libro más importante de Diofanto es ***Aritmética***, *que se trata de una* colección de unos 150 problemas sobre aplicaciones del álgebra.

La gran innovación de **Diofanto** está en que manteniendo aún en los enunciados algebraicos la forma retórica de la estructura de la frase sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, **inicia el "álgebra sincopada".**

Diofanto se acerca un poco a lo que llamamos "método" él en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca **una única incógnita a lo largo de todo el proceso.** A diferencia de los anteriores matemáticos nombrados, utiliza números abstractos y no unidades de medida para determinar a las incógnitas.

También se debe nombrar a **Euclides**, cuya obra está formada por **trece libros**, de los cuales el Libro II y el V son casi completamente algebraicos; a diferencia de nuestra álgebra simbólica actual, **el álgebra de Los Elementos es un álgebra geométrica.**

Los griegos utilizaban métodos geométricos para resolver sistemas de ecuaciones, Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Diofanto resuelve problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, transformándolos en una ecuación lineal, y sólo aceptaba las soluciones positivas, ya que lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones.

Una de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diofanto es que carece de un método general y utiliza en cada problema **métodos a veces excesivamente ingeniosos**.

ANTIGUA CIVILIZACIÓN CHINA

Uno de los libros más importantes es ***Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático (200 a.C.- 220 a.C.)***: el cual incluye ***246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades*** **de los triángulos rectángulos**. En muchos de estos casos la resolución de problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

Los *Nueve Capítulos* nos recuerdan a la matemática egipcia por el uso del método de la ***"falsa posición",*** pero lo cierto es que la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

También encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El *Su-yüan yü-Chien o* ***"Espejo Precioso de los Cuatro elementos"*** *escrito por Chu Shih*-Chieh en 1303 despierta mayor interés histórico y matemático. Los cuatro elementos a los que se refiere el título, son el cielo, la tierra el hombre y la materia y representan las cuatro incógnitas de una ecuación.

Este libro ***marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce.***

LA CIVILIZACIÓN HINDÚ

Nos encontramos con una sorprendente ***falta de continuidad*** en el caso de la matemática hindú. Las importantes contribuciones matemáticas se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo.

Los ***Sulvasütras*** son los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d.d.C), en los cuales se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. En éstos aparece el siguiente problema:

"Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado. "

Es decir, $a\,x = S$. Lo resolvían como los egipcios utilizando el ***método de la falsa posición.***

Posteriormente, ***Brahmagupta*** (nacido en el 598) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. ***La incógnita la representaba por la abreviatura -ya- , y las operaciones con la primera sílaba de las palabras.***

Este simbolismo, aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como cuasi simbólica, y en realidad lo era más que el álgebra sincopada de Diofanto.

También cabe destacar a un matemático posterior, ***Bhaskara*** (1114-1185). ***Brahmagupta y Bhaskara, avanzaron en las ecuaciones indeterminadas más allá que Diofanto.***

Estas ecuaciones surgieron en problemas de astronomía, las soluciones mostraban cuándo ciertas constelaciones habían aparecido en el firmamento. Consideraban ***todas las soluciones enteras***, mientras que Diofanto tomaba una única solución racional. El procedimiento para obtener las soluciones enteras de $ax \pm bx = c$, *donde a, b y c* son números enteros positivos era la siguiente:

Ellos sabían que para que la ecuación tuviese soluciones enteras, *a y b debían dividir a c, y* además ***Brahmagupta descubrió que si a y b eran primos entre sí, todas las soluciones de la ecuación vendrían dadas por las fórmulas x =p+mb e y=q-ma, donde m es un número arbitrario.***

LA CULTURA ÁRABE

Los árabes contribuyeron al álgebra antes que nada con el nombre. La palabra álgebra viene de un libro escrito en año 830 por el astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khowârizmî, titulado *Al-jabr w´al muqâbala,* que significa restauración y simplificación.

Al menos en dos aspectos la obra de Al-Khowârizmî representa un retroceso respecto a la de Diofanto : es de un nivel mucho más elemental y el álgebra de Al-Khowârizmî es completamente retórica, sin ninguna de las sincopaciones que se encuentran en la *Aritmética de Diofanto* o en la obra del matemático hindú Brahmagupta.

No obstante *Al-jabr w´al muqâbala* está más próxima al álgebra elemental moderna que a las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que el libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, en especial de las de segundo grado. Esto se debe a que en general, a los árabes les gustaba poder seguir una argumentación lógica, correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática.

Pero de lo que no hay duda es de que ninguna rama de la matemática nace ya completamente crecida , y el álgebra árabe tiene claramente influencias babilónicas, hindúes y griegas.

El libro de Al-Khowârizmî contiene además de la resolución de ecuaciones, que ocupa aproximadamente la mitad del libro, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como (10+x)(10-x), demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones, y, por último una gran variedad de problemas que sirven para ilustrar los casos tratados.

Al algebrista Abu-Kamil (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición.

A partir de aquí se dedican al estudio de ecuaciones de grado superior.

EUROPA MEDIEVAL

Tras la caída del imperio romano en el año 476, Europa comienza una nueva etapa, conocida como Edad Media que finalizaría a principios del siglo XIV.

En esta época toman importancia las traducciones de las obras matemáticas en árabe. Uno de los traductores más importantes fue Gerardo de Carmona (1114- 1187), quien tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides, *el Almagesto de* Ptolomeo y el *Álgebra* de Al-Khowarizmi.

Uno de los matemáticos más importantes en esta época fue Leonardo de Pisa (1170 - 250), más conocido como Fibonacci o "hijo de Bonaccio". Fue educado en África y viajó extensamente por Europa y Asia Menor, gracias a lo que pudo aprender el sistema de numeración indo-arábigo.

En 1202, Fibonacci escribió su *Liber Abaci (*el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos.

Tanto en el *Liber Abaci* como en su trabajo posterior*: Liber Quadratorum (1225),* Leonardo se ocupó del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer grado.

RENACIMIENTO

Hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en 1545, no hubo en el Renacimiento desarrollos trascendentes en álgebra. Sin embargo, merecen ser mencionadas algunas obras que contribuyeron a que esta rama de las matemáticas no quedase en el olvido


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) novis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgo tritis, iam septuaginta evaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, verum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticae thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto avidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

El trabajo de un fraile italiano llamado Luca Pacioli(1445-1514), su principal publicación es la *Summa , una recopilación de material de cuatro* campos distintos: aritmética, álgebra, geometría euclídea y contabilidad de doble entrada. Fue escrita en lengua vernácula y la parte dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y algunas soluciones de las cuadráticas. Su álgebra es retórica; sigue a Leonardo y a los árabes al llamar a la incógnita la “cosa”.

A parte de la innegable influencia de Italia durante el despegue cultural del siglo XV y XVI, en otros lugares Europeos no se quedaron rezagados. En Alemania los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana “coss” para designar a la incógnita y el álgebra misma vino a llamarse “el arte cósico” o “arte de la cosa”.

Riese menciona también en su *Die Coss* el Álgebra de Al-Khowârizmî *y* cita además a un cierto número de predecesores alemanes en este campo.

Poco después empezaron a aparecer obras que revolucionarían el álgebra, tales como *Ars Magna de* Jerónimo Cardano (1501-1576) en el año 1545, o la obra de François Viète (1540-1603) un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento y que en su *In Artem Analyticam Isagoge* traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita fue un paso previo a la matemática moderna.

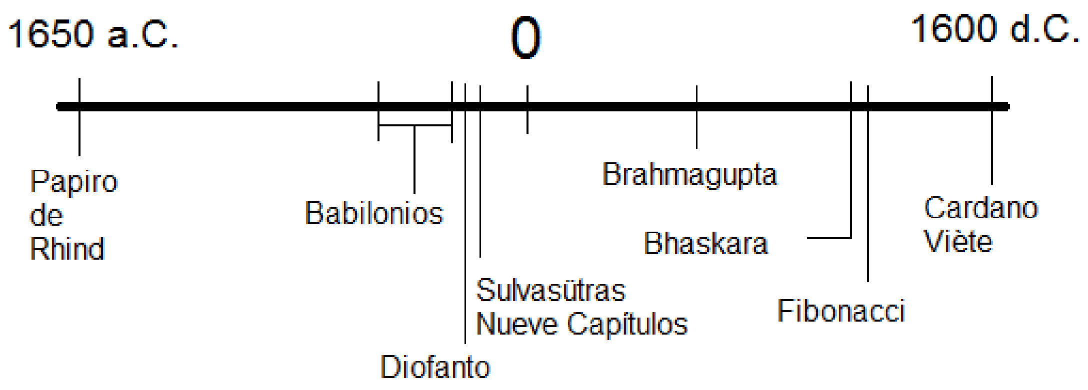
HISTORIA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen,* como hemos visto antes, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.
Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
Diofanto resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Pero sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones. El libro *El arte matemático* , de autor chino desconocido (siglo III a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

CRONOLOGÍA


1650 a.C.
0
1600 d.C.
Papiro de Rhind
Babilonios
Brahmagupta
Bhaskara
Cardano Viète
Sulvasūtras
Nueve Capítulos
Fibonacci
Diofanto

1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Ahora pasamos a presentar nuestro análisis del contenido de nuestro tema:

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL:

HECHOS:

Términos: **-Variable.**

-Dependencia de variables.

-Función de dependencia.

- Función lineal.

-Función afín.

- Igualdad algebraica.

- Identidad.

- Ecuación (incógnita, miembros y solución, equivalencia)

- Sistema de ecuaciones (Incógnitas, solución, equivalencia)

-Expresiones algebraicas: monomios (parte literal, coeficiente, grado, incógnitas), polinomios (grado, coeficientes, términos, término independiente, incógnita), monomios semejantes. Operaciones con ellos.

-Valor numérico de expresiones algebraicas.

Notaciones:

-Operaciones aritméticas →{+,-,x,:}

-Indeterminada, variable, incógnita→{a, b, c,..,x,y,z}

-Igualdad→ {=}

-Equivalencia→ ~

Convenios:

-Se excluye el símbolo de producto aritmético debido a la confusión con la incógnita x. Ejemplo a x b = a b

- La suma de monomios no semejantes se deja indicada y se obtienen polinomios.

- La expresión ax se lee "a equis" y no generalmente como "a por x"

- Los monomios semejantes se suman dejando la misma parte literal y sumando los coeficientes.

Resultados:

a) Regla de la suma: "Si en una ecuación o sistema sumamos o restamos el mismo número a los dos miembros la ecuación o sistema resultante es equivalente al original".

b) Regla del producto: "Si en una ecuación o sistema multiplicamos o dividimos por el mismo número distinto de cero la ecuación o sistema resultante es equivalente al original".

c) Los resultados de los que se deducen el método de igualación, sustitución y reducción.

d) Las fórmulas para el cuadrado de la suma, el de la diferencia y el producto de suma por diferencia (Identidades notables).

Conceptos:

-Noción de variable.

-Noción de dependencia entre variables.

-Noción de expresión algebraica en particular de monomios y

polinomios en varias incógnitas.

-Concepto de igualdad, e identidad algebraica.

-Operaciones con expresiones algebraicas, monomios y polinomios (suma, producto). Igualdades notables.

-Noción de ecuación. Significados de la ecuación.

-Noción de sistema. Significados de un sistema.

-Noción de solución de una ecuación o sistema.

-Noción de equivalencia de ecuaciones y sistemas.

Estructuras:

- **(P(X), +, x) anillo conmutativo.**

CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL:

Destrezas:

-Escritura y lectura de expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas.

-Resolución de ecuaciones y sistemas sencillos por tanteo.

-Operaciones combinadas con monomios y polinomios.

-Representación gráfica de la ecuación o sistema.

-Simplificación en operaciones con expresiones algebraicas.

-Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.

Razonamiento:

Deductivo: Propiedades de las operaciones con monomios y polinomios. Resolución de ecuaciones y sistemas.

Inductivo: Generalizar conjeturas numéricas "la suma de los primeros n números naturales es $n(n+1)/2$".

Figurativo: Uso de representaciones gráficas.

Argumentos para justificar propiedades algebraicas de ecuaciones y sistemas.

Estrategias:

-Cálculo mental.

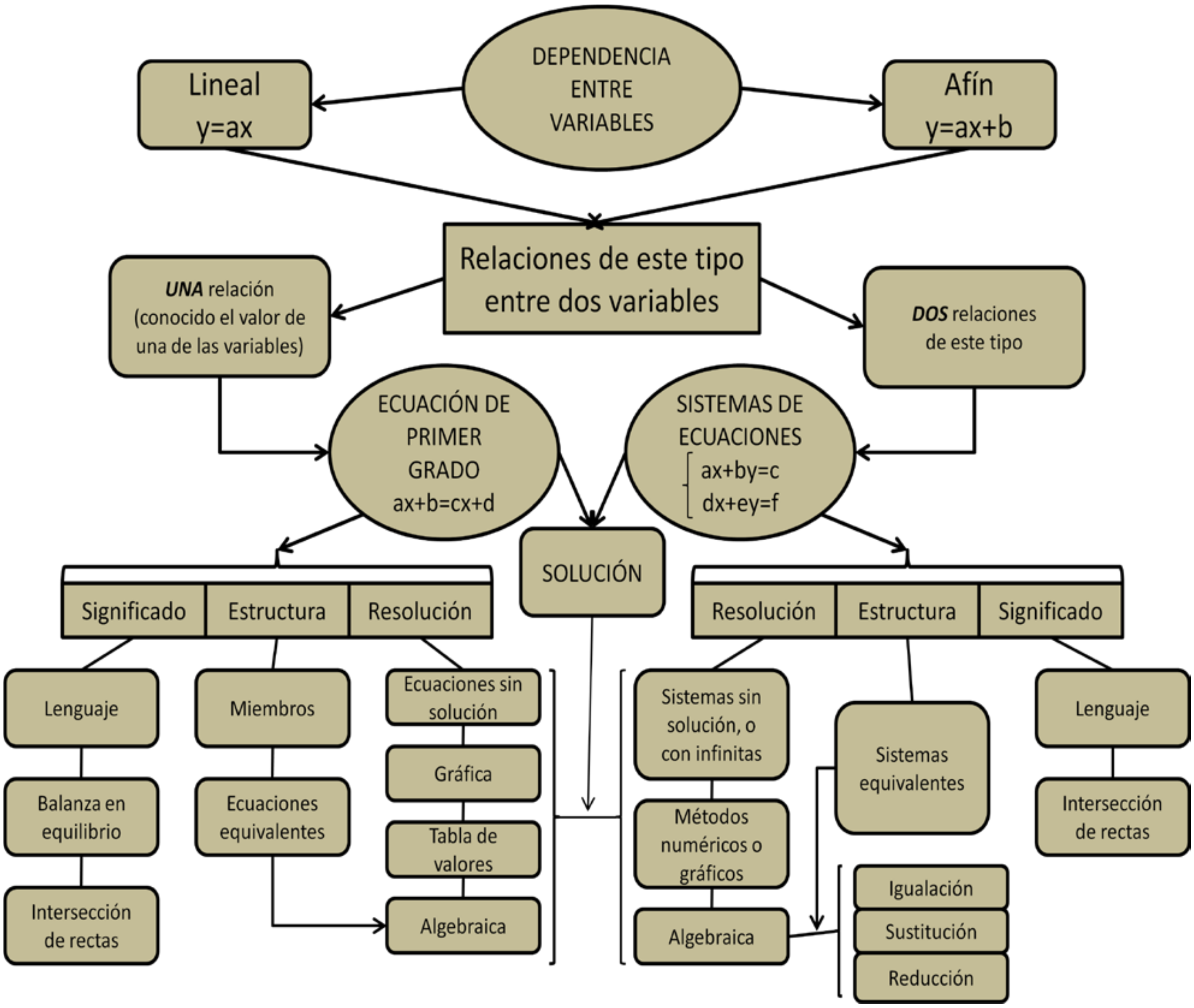
-Estimación de la solución de una ecuación por tabla de valores (método de los intervalos encajados).

-Reconocimiento de identidades.

-Resolución de ecuaciones y sistemas complejos (con denominadores y paréntesis).

Resolución de problemas (Traducción al lenguaje algebraico de enunciados complejos).

Aquí presentamos un mapa conceptual en el que vemos los principales conceptos del tema relacionados entre sí:



1.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

En la siguiente sección procedemos a describir los distintos sistemas que utilizaremos en el tema para representar las ecuaciones y sistemas.

Abordaremos cinco tipos de representaciones, en los cuales destacaremos las características más importantes, así como su modo de uso y el fin de cada uno. Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, representación manipulativa, representación gráfica, representación verbal y representación numérica.

Representación simbólica:

Este tipo de representación trata de expresar una ecuación y un sistema por medio de una combinación de letras y números por medio de una igualdad entre ellos como mostramos a continuación:

(1) $$ax + b = cx + d$$

(2) $$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

(3) $$f(x) = ax + b.$$

Procedemos a describir (1): (representación simbólica de una ecuación).
En esta igualdad, las letras a, b, c y d son valores conocidos y la letra x es la incógnita de la cual queremos averiguar el valor para el que se cumple la igualdad.

Podemos distinguir varias partes en (1) a las que nombraremos de la siguiente manera: a la parte que está a la izquierda de la igualdad la nombraremos primer miembro ($ax + b$) de la ecuación, a la de la derecha segundo miembro ($cx + d$) y a ax, b, cx y d, los llamaremos términos y a x incógnita; a los valores de x para los que se cumple la igualdad los llamaremos solución.

De igual modo describimos (2): (representación simbólica de un sistema de ecuaciones).

En esta expresión, llamaremos primera ecuación a “$ax + by = c$”, y a “$dx + ey = f$”, la llamaremos segunda igualdad, a las letras a, b, c, d, e, f son valores conocidos y a x e y los llamamos incógnitas; a cada par de valores de x e y que cumplan simultáneamente las dos ecuaciones lo llamaremos solución.

Pasando a la expresión (3) nos damos cuenta de que en realidad hemos sustituido la incógnita y por f(x). Esto en realidad es la expresión de una función en la que x es la variable dependiente e y=f(x) es la variable dependiente.

<u>Representación manipulativa</u>:

Se trata de representar una ecuación por medio de objetos en los cuales podamos representar los términos de cada uno de los miembros de (1).

Dos objetos útiles para nuestro tema son el ábaco y la balanza.

EL ÁBACO

Con este instrumento podemos representar y solucionar una ecuación de primer grado de la manera siguiente:

+ primer miembro	+ segundo miembro
- primer miembro	- segundo miembro

La primera fila del ábaco será el número de veces que se repita la incógnita en el primer miembro.

La segunda fila será el número de escalares que haya en el primer miembro.

La columna de puntos simboliza que hay varias filas que no se usan.

La raya simboliza la división de números positivos y negativos.

La penúltima fila simboliza el número de veces que se repite la incógnita en el segundo miembro.

La última fila simboliza el número de escalares en el segundo miembro.

Tendríamos que verlo como 4 cuadrantes; superior izquierdo e inferior izquierdo para el primer miembro,

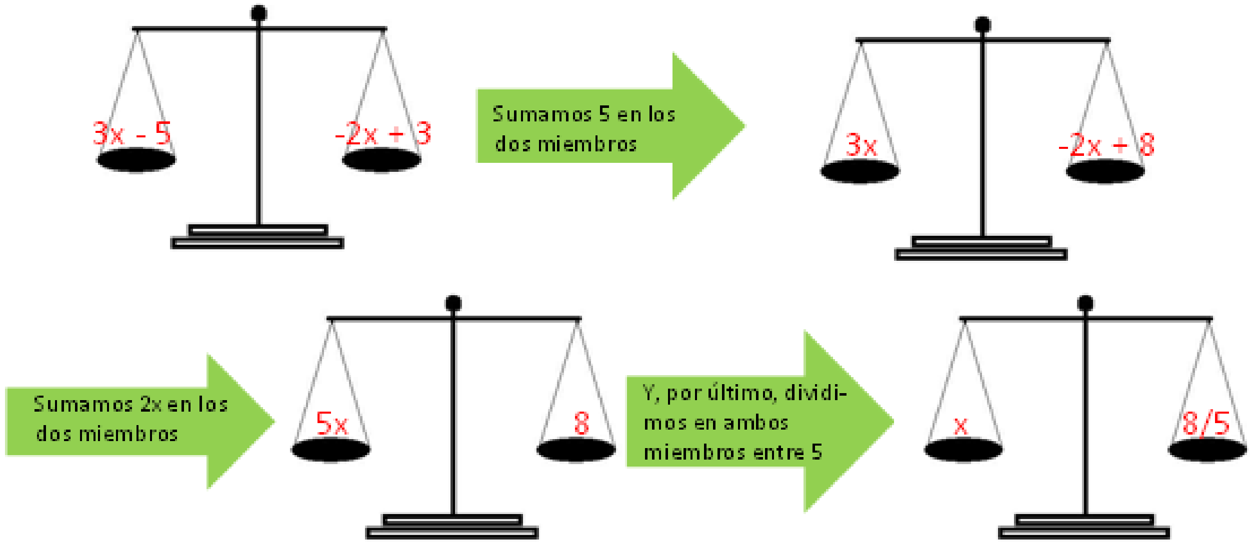
Superior derecho inferior derecho para el primer miembro; superiores positivos e inferiores negativos.

En caso de hacer falta mas bolitas se cogerían dos filas para el miembro e incógnita o escalar que hiciese falta. En este caso se desplazarían los demás de la manera oportuna.

```
Resolución de la ecuación 2x-1=-x+1

        .
o       .
o       .       o
_____________________         2x-1=-x+1;
    o   .   o
        .
        .


        .
o       .
o       .       o
o       .       o
_____________________         3X-X-1=2X-X-1;    (he restado -x y -1 en los dos miembros de la igualdad)
o   o   .   o   o
        .
        .


        .
o       .
o       .       o
o       .       o
_____________________         3X=2;   (he cancelado los respectivos miembros negativos de la igualdad, dado que
        .                             están en los dos miembros de la igualdad)
        .                             esta ecuación sería la ecuación de llegada del ábaco y de la cual
        .                             sacaremos la soclución.
```

LA BALANZA

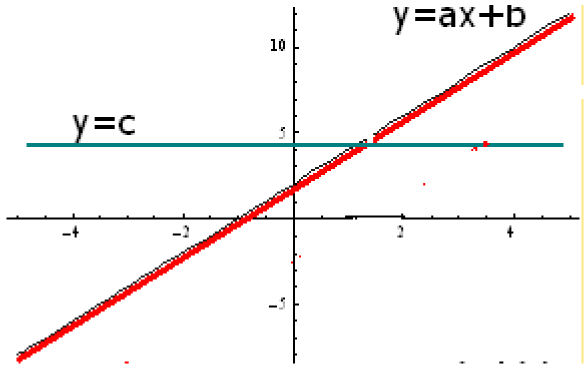
Es de gran ayuda para comprender el concepto de equivalencia entre dos ecuaciones, por ejemplo, dada la ecuación $3x-5 = -2x+3$, podemos representar cada uno de los miembros en un platillo de la balanza, e introducir las reglas de suma y producto, como las transformaciones que debemos hacer para simplificar la ecuación de manera que la balanza no se desequilibre:

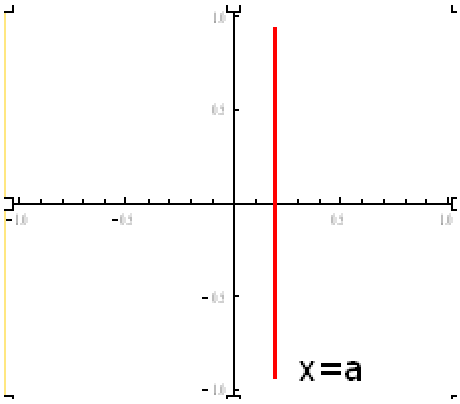


De esta manera, llegamos a la solución, manipulando ambos miembros para simplificar la ecuación, pero manteniendo siempre el equilibrio, es decir, realizando las mismas operaciones en ambas partes de la igualdad.

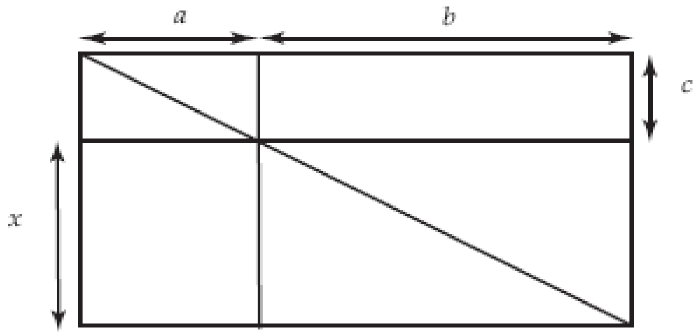
<u>Representación gráfica</u>:

Este tipo de representación es especialmente útil sobre todo para encontrar una solución de un sistema de ecuaciones, dado que sería el cruce de las dos rectas que forma el primer miembro de la ecuación con la cual resolvemos el método de igualación. En las siguientes gráficas tenemos todas las representaciones posibles de todo lo anterior.

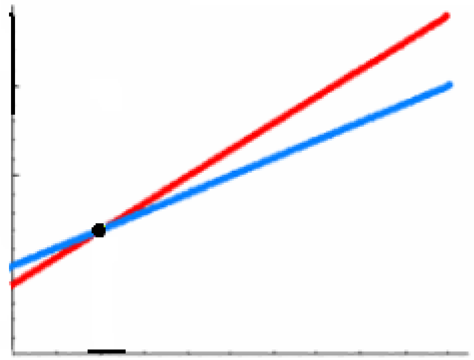




Representación de una ecuación de primer grado con una incógnita.



Resolución con un rectángulo de una ecuación de primer grado con una incógnita.



Sistema de ecuaciones.

Representación verbal:

La representación que entra en escena a continuación es la que en la vida real tiene más importancia, aunque sin las demás ella no tendría sentido. Su importancia radica en que el lenguaje es el método por el cual se expresan todas las ecuaciones en la vida cotidiana. Como el nombre indica se trata de dar una expresión de una ecuación o sistema de ecuaciones por medio del lenguaje escrito como muestran los siguientes ejemplos.

Ecuación de primer grado: "Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$x/6+x/12+x/7+5+x/2+4=x$

Sistema de ecuaciones: Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos camas) y simples (1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total tienen 105 camas, averiguar el número de camarotes de cada tipo.

$2x+y=105;$

$x+y=65;$

Representación numérica

Sirve para representar varios valores de una función en la cual daremos los valores de la variable dependiente en función de la independiente por parejas.

$F(x)= 2x +6$

X	F(x)
0	6
1	8
2	10

1.4 FENOMENOLOGÍA DEL TEMA Y MODELIZACIÓN

Comenzamos esta sección planteando las situaciones y contextos en los que se desarrolla nuestro tema.

ANÁLISIS DE CONTEXTOS:

Formalmente una misma ecuación o sistema puede resolver variedad de problemas adquiriendo un significado particular, por lo que para contextualizar las ecuaciones y sistemas tenemos que hacer una abstracción, por tanto:

Contexto de las ecuaciones: “Las ecuaciones sirven para determinar un dato desconocido conocida la igualdad entre dos combinaciones afines de ese dato”

<u>Contexto de los sistemas</u>: “Los sistemas sirven para determinar el valor de dos datos desconocidos conocidas dos relaciones entre ellos” también “Los sistemas determinan la intersección entre dos rectas afines” de ahí su utilidad geométrica.

ANÁLISIS DE SITUACIONES:

A continuación se enumera situaciones en las que pueden aparecer problemas que se resuelven con ecuaciones o sistemas.

Situación pública:

En el fin de semana, las atenciones de un servicio de urgencias suponen un 30% de las ocurridas en toda la semana. Si en dicho fin de semana se produjeron 150 atenciones. ¿Cuál es el balance total de atenciones?

Resolución: Plantear y resolver $0.3x=150$

Se sabe que entre los dos partidos políticos mayoritarios suman 269 diputados, y a uno de ellos le faltan 40 para tener el doble que el otro. ¿Cuántos diputados tienen cada partido?

Resolución: Plantear y resolver $\{x + y = 269, x + 40= 2y\}$

Situación laboral:

A Juan le han pagado por trabajar 20 días 720€, y sabe que antes de pagarle, le han descontado 80€ de impuestos. ¿Cuánto ha ganado Juan por día?

Resolución: Plantear y resolver $20x-80=720$.

La semana pasada Luis y Pepi ganaron entre los dos 850€ trabajando 40 y 30 horas respectivamente, y la anterior ganaron 900€ trabajando 30 y 40 horas respectivamente. ¿Cuánto ganan a la hora Pepi y Luis?

Resolución: Plantear y resolver $\{40x+30y=850\ ,30x+40y=900\}$

Situación científica:

Para producir 50 mg de un medicamento en un laboratorio, se necesitan 15 mg de un compuesto A y el resto de un producto que tenemos en dosis de 5mg.

¿Cuántas dosis necesitamos para que la mezcla salga bien?

Resolución: Plantear y resolver $5x+15=50$

Un astrónomo ha calculado que en una galaxia cercana hay el triple de planetas que en la nuestra y se sabe que entre las dos suman 800.000 millones ¿Cuántos planetas tiene nuestra galaxia? Exprese el resultado en miles de millones.

Resolución: Plantear y resolver $\{3x= y\ ;\ x+y = 800\ \}$

Situación personal:

Comprando dos kilos de naranjas más una berenjena he gastado lo mismo que ayer al comprar un kilo de naranjas más una calabaza. Si la berenjena vale 1€ y la calabaza 1.5€. ¿Cuánto vale el kilo de naranjas?

Plantear y resolver: $2x+1= x+1.5$

Antonio quiere hacerse socio de un gimnasio y estudia dos ofertas, en el gimnasio A tiene que pagar 50€ por hacerse el carnet y 200€ por cada mes, por otro lado, en el gimnasio B paga 150€ por el carnet y cada mes le cuesta 150€. ¿Qué gimnasio le conviene a la larga?

Plantear y resolver: $\{200x+50 = y,\ 150x+150 = y\}$

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA VÍA MODELIZACIÓN.

La modelización en este tema está básicamente determinada, pues la meta principal es dado un enunciado transformarlo en una ecuación o sistema a resolver. La complejidad (reproducción, conexión, reflexión) estriba en la dificultad de traducir enunciados verbales al lenguaje algebraico. Para explicar esto mejor resolvamos un problema de edades, muy común en los libros de texto.

Sea éste:

Para adoptar a una niña, una persona debe ser mayor de 25 años, y la diferencia de edad entre adoptante y adoptado debe ser mayor de 14. Sonia tiene 32 años, y hace cinco Araba tenía la octava parte de la edad actual de Sonia más la mitad de la edad de M´Gone, su hermano. Sabiendo que hace cinco años M´Gone tenía dos años menos que Araba. ¿Puede Sonia adoptar a Araba? ¿Y a su hermano?

Primeramente veamos de qué datos disponemos, cuales son desconocidos, asignar la incógnita x a un dato desconocido y relacionar dicho dato con los demás, estudiar condiciones del problema. Simplificar el problema, obtener la ecuación que resuelva dicho problema y verificar la validez del modelo.

> *Datos desconocidos: Edad de Araba y su hermano.*
>
> *Datos conocidos: Edad de Sonia= 32 años, diferencia de edad entre adoptante y adoptado mínima=14 años.*

Se puede detectar dificultad para asignar correctamente la incógnita, pues no se puede asignar arbitrariamente, hay que asignar la incógnita al dato a partir del cual conozcamos los demás.

> *Edad de Araba=x*

Como ahora las condiciones que se dan son de cinco años atrás hay que buscar las expresiones algebraicas asociadas:

Edad de Araba (hace 5 años)=x-5

Edad de M'Gone (hace 5 años)=(x-5)-2

Se recomienda no simplificar para facilitar la compresión de la asignación de expresiones.

Sacamos la ecuación resultante de aplicar las condiciones:

Edad de Sonia hace 5 años= 32-5=27

$x-5=32/8+[(x-5)-2]/2$

Ahora se puede simplificar la ecuación operando y resolverla y después verificar la solución para ver si es válido el modelo.

$x-5 =4+(x-7)/2$

Solución de la ecuación: x=11

Ahora con las condiciones anteriores determinamos los datos que necesitamos para responder a la pregunta.

Edad de Araba=11 años

Edad de M'Gone (hace 5 años)=11-7=4 años

Edad de M'Gone =4+5= 9años

Diferencia de edad entre Sonia y Araba=32-11=21años

Diferencia de edad entre Sonia y M'Gone=32-9=23 años

Por lo tanto como las diferencias superan los 14 años Sonia puede adoptar a los dos hermanos.

1.5 <u>CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA (U.D.)</u>

CONTENIDOS ESPECÍFICOS DENTRO DEL MARCO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.

“Según la ORDEN ECI/2220/2007 de 12 de Julio por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria , los contenidos específicos de matemáticas relacionados con nuestro tema los situamos en el primero, segundo y tercer curso y son los siguientes:

<u>Bloque 3. Álgebra (1º curso)</u>

a) Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar.

b) Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.

c) Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.

d) Búsqueda de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Obtención de expresiones algebraicas en procesos sencillos de generalización.

e) Introducción a las operaciones con expresiones algebraicas: suma, resta, producto y cociente de monomios.

f) Resolución de ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$ utilizando métodos numéricos y algebraicos. Planteamiento de problemas que utilizan este tipo de ecuaciones para obtener la solución.

g) Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Bloque 3.Álgebra (2º curso).

a) Utilización del lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.

b) Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades en tablas y series numéricas.

c) Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.

d) Operaciones elementales con expresiones algebraicas sencillas, transformación y equivalencia. Suma, resta y producto de polinomios en casos sencillos.

e) Propiedades de las igualdades. Identidades.

f) Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.

g) Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes.

h) Comprobación e interpretación de la solución.

i) Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.

Bloque 3.Álgebra (3º Curso)

Extraemos los contenidos más relacionados con nuestro tema:

a) Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.

b) Transformación de expresiones algebraicas. Extracción de factor común. Igualdades notables.

c) Resolución de ecuaciones de primer grado y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Discusión de resultados.

d) Resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas. ”

Nosotros hemos convenido en incluir los sistemas en 2º curso pues no se hace mención expresa en el documento. Por lo tanto nuestro contenido estará entre 1º y 2º de ESO por ser los cursos donde se introducen y maduran todos los conocimientos referentes a la ecuación de primer grado y los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

DESCRIPCIÓN DE LOS CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA U.D.

De entre los términos que aparecen en el tema que tratamos, en esta U.D. se les da especial importancia a los siguientes:

- Igualdad algebraica.
- Identidad.
- Ecuación (incógnita, miembros y solución, equivalencia)
- Sistema de ecuaciones (Incógnitas, solución, equivalencia)
- Expresiones algebraicas: monomios (parte literal, coeficiente, grado, incógnitas), polinomios (grado, coeficientes, términos, término independiente, incógnitas), monomios semejantes. Operaciones con ellos.
- Valor numérico de expresiones algebraicas.

Ahora describimos los conceptos que trataremos:

- Noción de expresión algebraica en particular de monomios y polinomios en varias incógnitas.
- Concepto de igualdad, e identidad algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas, monomios y polinomios (suma, producto). Igualdades notables.
- Noción de ecuación. Significados de la ecuación.
- Noción de sistema. Significados de un sistema.
- Noción de solución de una ecuación o sistema.
- Noción de equivalencia de ecuaciones y sistemas.

Estas son las destrezas a desarrollar:

- Escritura y lectura de expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas.
- Resolución de ecuaciones y sistemas sencillos por tanteo.
- Representación gráfica de la ecuación o sistema.
- Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.

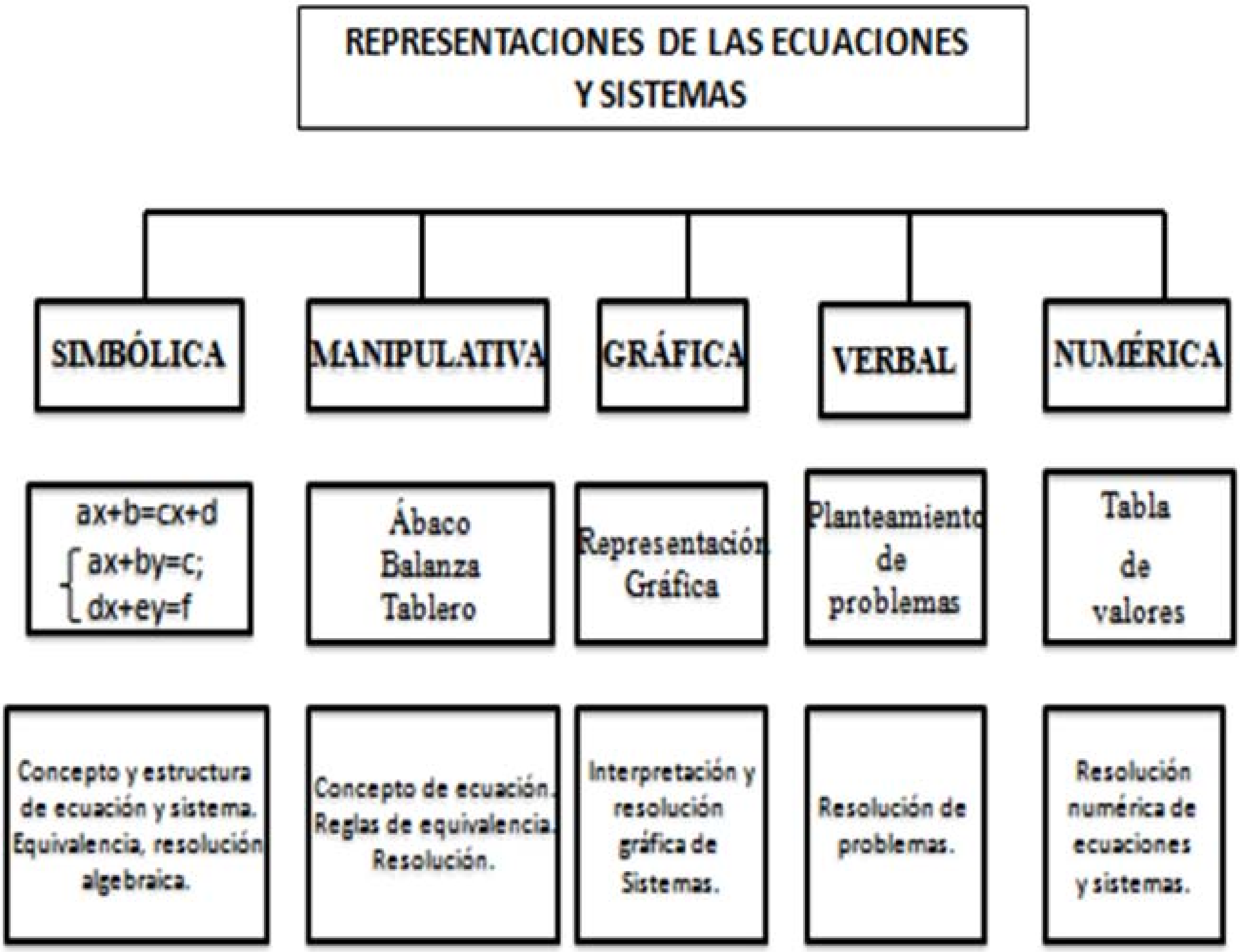
En cuanto a los tipos de razonamiento, que se verán involucrados en esta U.D. podemos considerar:

- **Deductivo**: Propiedades de las operaciones con monomios y polinomios. Resolución de ecuaciones y sistemas.
- **Figurativo**: Uso de representaciones gráficas.
- Argumentos para justificar propiedades algebraicas de ecuaciones y sistemas.

Por último las estrategias que deberán manejar:

- Cálculo mental.
- Estimación de la solución de una ecuación por tabla de valores
- Reconocimiento de identidades.
- Resolución de problemas (Traducción al lenguaje algebraico de enunciados complejos).
- Resolución de ecuaciones y sistemas complejos (con denominadores y paréntesis).

En el siguiente gráfico mostramos la relación entre contenidos y los sistemas de representación que vimos en la sección 1.3.



Hemos seleccionado los contenidos del tema para esta U.D. teniendo en cuenta que irá destinada a la organización de las sesiones de clase para un grupo de 2º de E.S.O. Por lo tanto, nos hemos centrado en menor medida en el estudio de expresiones algebraicas, realizando una introducción necesaria para el resto del tema, y nos hemos extendido más en el tratamiento de ecuaciones y sistemas.

No tratamos directamente conocimientos que suponemos básicos, tales como, variables o dependencia entre variables que deben haber sido tratados en temas anteriores o en el curso anterior.

2. Análisis Cognitivo

2.1 EXPECTATIVAS QUE SE ESPERAN DESARROLLAR

Podemos agrupar en cuatro focos las expectativas que esperamos desarrollar, son los siguientes:

- Lenguaje algebraico.
- Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura.
- Equivalencia en ecuaciones y sistemas.
- Resolución de ecuaciones y sistemas. Clasificación de sistemas.
- Técnicas de resolución de problemas.

Más concretamente, los objetivos específicos que queremos desarrollar son los siguientes:

1. Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico.
2. Distinguir y justificar si una expresión algebraica es monomio o no y estudiar su estructura coeficiente, parte literal y grado y agrupar monomios semejantes de una lista.
3. Identificar polinomios de grado 1 en una y dos incógnitas y justificar la respuesta.
4. Afianzar las operaciones básicas con monomios y polinomios.
5. Aplicar correctamente las igualdades notables
6. Distinguir los miembros de una ecuación y conocer la estructura de un sistema.

7. Diferenciar ecuación e identidad dada una lista de ellas, y argumentar qué ecuaciones son de primer grado.
8. Discutir si un valor dado es solución de una ecuación.
9. Discutir si un par de valores es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.
10. Discutir si un par de valores es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
11. Dada una ecuación, completar el miembro desconocido de otra ecuación equivalente a la misma dada por el profesor.
12. Aplicar a una ecuación o sistema una regla arbitraria y analizar si la ecuación o sistema resultante es equivalente al anterior.
13. Dada una ecuación o sistema, obtener ecuaciones o sistemas equivalentes a los dados justificando las reglas de equivalencia que se han empleado.
14. Dominar resolución algebraica de ecuaciones y sistemas (igualación, reducción, sustitución) argumentando cada paso.
15. Estudio de las ecuaciones y sistemas mediante el uso de tablas de valores.
16. Obtener la solución general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, previo a la resolución de sistemas.
17. Saber distinguir tipos de sistemas según la existencia de soluciones y el número de éstas justificadamente. Interpretación gráfica.
18. Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación.
19. Inventar problemas en situaciones y contextos variados que se resuelvan con ecuaciones y sistemas.

20. Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solucione/s se ajustan al contexto del problema.
21. Dada una ecuación o sistema inventar un problema que se resuelva con dicha estructura matemática.
22. Detectar problemas mal planteados y discutir las razones.

En las siguientes tablas se muestran los objetivos anteriormente especificados agrupados en los distintos focos nombrados al comienzo de esta sección. En las tablas se puede observar también la vinculación de estos objetivos con las competencias PISA, donde:

PR= Pensar y Razonar.

AJ= Argumentar y Justificar.

C= Comunicar.

M= Modelizar.

RP= Resolver Problemas.

R= Representar.

LS= Lenguaje Simbólico.

HT=Herramientas tecnológicas.

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
LENGUAJE ALGEBRAICO		5	2					5	1
1	**Calcular <u>valores numéricos</u> de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico.**	X						X	X
2	**Distinguir y justificar si una expresión algebraica es <u>monomio</u> o no y estudiar su estructura coeficiente, parte literal y grado y agrupar monomios semejantes de una lista.**	X	X					X	
3	**Identificar <u>polinomios de grado 1</u> en una y dos incógnitas y justificar la respuesta.**	X	X					X	
4	**Afianzar las <u>operaciones básicas</u> con monomios y polinomios.**	X						X	
5	**Aplicar correctamente las <u>igualdades notables</u>**	X						X	

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
ECUACIONES Y SISTEMAS. CONCEPTO Y ESTRUCTURA.		5	1	3				4	3
6	**Distinguir los <u>miembros de una ecuación</u> y conocer la <u>estructura de un sistema</u>.**	X							
7	**Diferenciar ecuación e identidad dada una lista de ellas, y argumentar qué ecuaciones son de primer grado.**	X	X					X	
8	**Discutir si un valor dado es <u>solución</u> de una ecuación.**	X		X				X	X
9	**Discutir si un par de valores es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.**	X		X				X	X
10	**Discutir si un par de valores es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.**	X		X				X	X

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
EQUIVALENCIA EN ECUACIONES Y SISTEMAS.		2	2					2	1
11	Dada una ecuación, completar el miembro desconocido de otra ecuación equivalente a la misma dada por el profesor.	X						X	X
12	Aplicar a una ecuación o sistema una regla arbitraria y analizar si la ecuación o sistema resultante es equivalente al anterior.		X					X	
13	Dada una ecuación o sistema, obtener ecuaciones o sistemas equivalentes a los dados justificando las reglas de equivalencia que se han empleado.	X	X					X	

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS. CLASIFICACIÓN SISTEMAS			3	1			2	5	2
14	Dominar resolución algebraica de ecuaciones y sistemas (igualación, reducción, sustitución) argumentando cada paso.		X					X	X
15	Estudio de las ecuaciones y sistemas mediante el uso de tablas de valores.						X	X	
16	Obtener la solución general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, previo a la resolución de sistemas.		X					X	
17	Saber distinguir tipos de sistemas según la existencia de soluciones y el número de éstas justificadamente. Interpretación gráfica.		X					X	X
18	Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación.			X			X	X	X

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.		1	1	4	3	4	1	2	
19	**<u>Inventar problemas</u> en situaciones y contextos variados que se resuelvan con ecuaciones y sistemas.**			X	X	X			
20	**<u>Traducir al lenguaje simbólico</u> el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solucione/s se ajustan al contexto del problema.**			X	X	X	X	X	
21	**Dada una ecuación o sistema inventar un problema que se resuelva con dicha estructura matemática.**			X	X	X		X	
22	**Detectar problemas mal planteados y discutir las razones**	X	X	X		X			

La siguiente tabla muestra un recuento de las competencias que se intentará cubrir en cada foco:

RECUENTO	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Lenguaje algebraico	5	2					5	1
Ecuaciones y sistemas, concepto y estructura	5	1	3				4	3
Equivalencia en ecuaciones y sistemas	2	2					2	1
Resolución de ecuaciones y sistemas. Clasificación de Sistemas		3	1			2	5	2
Técnicas de resolución de problemas	1	1	4	3	4	1	2	
TOTAL	**13**	**9**	**8**	**3**	**4**	**3**	**18**	**7**

Vemos en esta última tabla un gran desequilibrio hacia algunas competencias, como por ejemplo, PR y LS, y vemos que otras como M, RP, R, tienen poco peso. Esto puede resultar engañoso, no es que se le dé poca importancia a Modelización por ejemplo, es que, tenemos pocos objetivos relacionados directamente, pero esto no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar estas competencias.

2.2 EJEMPLIFICACIÓN DE TAREAS DESDE LOS OBJETIVOS Y LAS COMPETENCIAS

Elegimos dos objetivos significativos de nuestra U.D.

Objetivo 7: Diferenciar ecuación e identidad dada una lista de ellas, y argumentar qué ecuaciones son de primer grado.

Tarea para el desarrollo de dicho objetivo y la capacidad de "Argumentar y justificar".

"*Dada las siguientes igualdades decidir justificadamente cuales son identidades y cuáles no*"**¡Error! Marcador no definido.¡Error! Marcador no definido.**.

a) $3x - 4 = -1$, b) $2(x + 3) = 2x + 6$, c) $2x + 5x = 7x$,

d) $4x + 5 - 3x + 2 = x + 7$, e) $3x - 6 + 15 = 2x + 25$.

Contenidos: Reconocimiento de identidades (E)

Conceptos de igualdad algebraica e identidad

Concepto de ecuación.

Objetivo 20: Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solucione/s se ajustan al contexto del problema.

Tarea para el desarrollo de dicho objetivo y las competencias de "Utilizar el Lenguaje simbólico, Formal y Técnico, y Operaciones", "Plantear y resolver problemas","Modelización".

"Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Dentro de 10 años la edad del padre será doble de la del hijo ¿Cuál es la edad de ambos? "

Contenidos: Estrategia de resolución de problemas. (E)

Traducción de enunciados sencillos. (D)

2.3 ERRORES Y DIFICULTADES PREVISIBLES EN EL DESARROLLO DE LA U.D.

Creemos que es importante tener en cuenta los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya que:

- Primero: Puede ser que un alumno tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que arrastre algún error de cursos o temas anteriores. Pero en ambos casos si se ayuda a que el alumno tome conciencia de su error, se potenciará su actitud crítica, y se podrá enmendar ese error.
- Segundo: Es posible también que el profesor haya metido la pata y transmitido por equivocación un resultado falso, o bien, que esté enseñando algún concepto de forma que éste no llega al alumno. En este caso, el error será un indicativo para el profesor de que debe intentar enseñar este resultado o concepto de otra manera, con otro método, otros ejemplos… Esto hace que se depure el proceso de enseñanza.
- Tercero: La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será seña para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido al alumno. Lo que queda claro, es que un error puede ser fácilmente aprovechable.

Enumeramos a continuación los que, creemos, son los errores más comunes en los que pueden un alumno incurrir durante el aprendizaje del tema que nos ocupa. Los dividiremos en tres partes: en la primera se encuentran los relacionados con las expresiones algebraicas, en la segunda parte los que atienden al concepto de equivalencia y en la tercera los relacionados con la resolución de sistemas y ecuaciones. En la mayoría de los errores que se nombran en las dos últimas partes son derivados de un mal uso de las reglas aritméticas básicas.

Tipo 1: **Expresiones algebraicas**

E1.- Fallos en el manejo de símbolos (variables), que provienen de una generalización incorrecta de las operaciones aritméticas básicas al nuevo ambiente, como por ejemplo:

$$3x + 4 = 7x.$$

E2.- Extender la linealidad a cualquier expresión puede llevar a errores del tipo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \text{ o }, \ \frac{a}{(b+c)} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}.$$

E3.- Errores al tomar inversos y operar, tales como:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}, \ \text{ o, } \ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}.$$

E4.- Errores al simplificar, como:

Del hecho $\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}$, deducir, $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$.

E5.- Confusión de la estructura aditiva con la multiplicativa, por ejemplo: $nx = x^n$.

E6.- Dificultad para entender el nuevo uso del signo =, que relaciona expresiones algebraicas, mientras que en aritmética básica sólo relaciona expresiones numéricas y por tanto el alumno puede confundir ecuación con una identidad, por ejemplo, de la expresión, $2 + 2 = 2^2$, que es una identidad, deducir $x + x = x^2$.

E7.- Errores debidos a la nueva notación del producto, en la que se debe omitir el "x" del signo de multiplicación, por ejemplo, en la expresión $4x = 46$, deducir, $x = 6$.

Tipo 2: **Errores en equivalencia entre ecuaciones y sistemas:**

E8.- Aplicar incorrectamente **la regla de la suma**. Por ejemplo en la ecuación: $x + 2 = 3x + 5$ pasar a $x + 3x = 2 + 5$.

E9.- Del mismo modo, se puede errar en la **regla del producto**. Por ejemplo si se multiplica por cualquier número sólo en un miembro de la ecuación, pasar de $-x + 2 = 3$, a $x - 2 = 3$.

E10.- Estos errores **influyen también en los sistemas** de ecuaciones a la hora de buscar sistemas equivalentes, por ejemplo en el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 2 \end{cases} \quad \text{pasar a} \quad \begin{cases} x = 3 + y \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

En este ejemplo encontramos un error del tipo E8.

- Tipo 3: **Errores en las técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas:**

En la resolución algebraica de ecuaciones, aparte de los errores que puedan aparecer por el mal uso de las reglas de la suma y el producto, podemos encontrar también errores en operaciones aritméticas involucradas, tales como:

E11.- Quitar paréntesis multiplicando sólo el primer término, por ejemplo, $2(x + 5) = 2x + 5$.

También cuando aparece un signo "-" delante de un paréntesis:

$$-(x - 5) = -x - 5.$$

E12.- Errores del tipo: $\frac{2x+6}{2} = x + 6$.

derivados de un mal uso de la propiedad distributiva. También cuando aparece el factor a la derecha es una dificultad, porque normalmente se encuentra a la izquierda:

$$(2x + 6)2 = ??$$

E13.- Incorrecciones al reducir a común denominador:

De $\frac{3}{2-x} + \frac{7x}{x-1} = 3$, pasar a, $3(x-1) + 7x(2-x) = 3$.

E14.-Errores en las operaciones con fracciones:

De $\frac{x+2}{x+5} = \frac{6}{7}$, deducir $x + 2 = 6$, o, $x + 5 = 7$.

En la resolución de sistemas por los métodos de sustitución, reducción e igualación encontramos errores inducidos de los anteriormente expuestos.

E15.- Otro error que podemos encontrar en la resolución de sistema por el método gráfico, en el caso de que las dos ecuaciones representan la misma recta, el alumno puede pensar que no existe ninguna solución para el sistema, cuando, en este caso, existen infinitas soluciones. O en el caso de dos rectas paralelas, que el alumno piense que existan infinitas soluciones.

E16- En la traducción al lenguaje simbólico de enunciados verbales, por ejemplo:

"La altura de un edificio es 40 veces la altura de Pedro" el alumno puede traducir dicho enunciado a

altura del edificio = 40 + x,

donde x es la altura de Pedro.

E17.- El alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una falta de verificación de éstas, o bien, puede ser que se verifiquen las soluciones en pasos intermedios en lugar de en el sistema inicial.

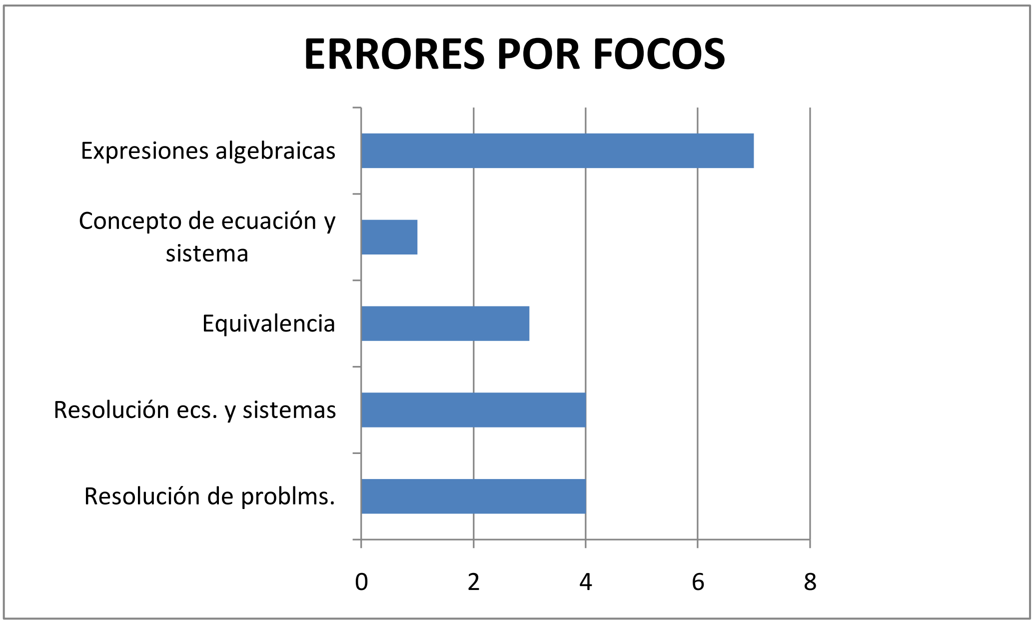
E18.- Por último, se encuentran dificultades a la hora de criticar problemas mal planteados.

En la siguiente tabla podemos observar la relación entre los errores antes expuestos, y los objetivos en los que pueden aparecer:

ERRORES	**OBJETIVOS ASOCIADOS**
E1	(4)
E2	(4) y (5)
E3	(4) y (5)
E4	(4)
E5	(4)
E6	(7)
E7	(1) y (2)
E8	(11), (12) y (13)
E9	(11), (12) y (13)
E10	(11), (12) y (13)
E11	(14)
E12	(14)
E13	(14)
E14	(14)

E15	(17) y (18)
E16	(20)
E17	(20)
E18	(22)

En la siguiente tabla podemos ver la distribución de errores por focos de contenido:



Vemos que aunque, en principio, no tenemos pensado darle una especial importancia pero se pueden observar errores provocados por una mala base en expresiones algebraicas.

EJEMPLOS DE TAREAS Y ERRORES ASOCIADOS

Tarea 1: *Resolver el siguiente sistema con el método que estimes oportuno:*

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

En esta tarea podemos detectar errores del tipo E8, E9, E10, E11 y E17.

Para tratar este tipo de errores se intentará que el alumno realice tareas en las que deba justificar los pasos que haga, y, también para tratar este error, se propondrán tareas para hacer en casa con el fin de que el alumno ejercite y automatice los algoritmos de resolución.

Tarea 2: *"En una vasija hay una cantidad desconocida de agua, sacamos 15 litros, y se los añadimos a otra vasija que tiene la misma cantidad de agua. Entonces la segunda pasa a tener tres veces la cantidad de agua que tiene la primera. ¿Cuántos litros había al principio en las vasijas?*

En este problema fácilmente se puede dar el error siguiente:

Si el alumno llama "x" a la cantidad de agua que tienen las vasijas al principio, puede interpretar más la expresión "tres veces", y llegar a la ecuación $x - 15 = 3(x + 15)$,en lugar de, $3(x - 15) = x + 15$.

Para intentar que este error se supere se recomienda practicar mucho la traducción de enunciados sencillos, y que el alumno explique y argumente cómo llega a las expresión simbólica. Este error es del tipo E16.

3. Análisis de instrucción

3.1 GRADOS DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS

Presentamos para cada grado de complejidad ejemplos de tareas:

Reproducción:

Comprueba si $x = 1$ es solución de la ecuación $2x + 8 = 10$.

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

$18x = 36$; $x+1=3$; $-x+3=5$.

Conexión:

Traduce al lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

Número de ruedas necesarias para fabricar x coches.
Número de días de x semanas.
Número de patas de un corral de x gallinas.
Un número x menos 2 unidades.
El doble de un número x menos 2 unidades.
La mitad de un número x menos su doble.

Reflexión:

Alberto tiene triple de edad que su Lucía. Si Alberto tuviese 30 años menos y Lucía 8 años más, los dos tendrían la misma edad ¿Cuántos años tiene cada uno?

Criterio utilizado en la clasificación*:*

Para reproducción en nuestro tema hemos clasificado tareas que impliquen la aplicación directa de un concepto o cálculos sencillos rutinarios.

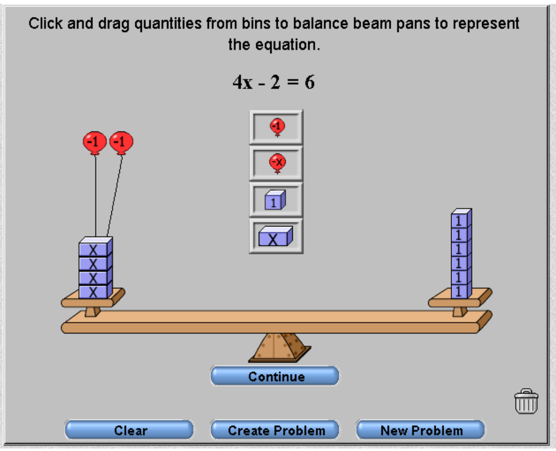
Para conexión, el criterio es que los alumnos tienen dificultad para la traducción de enunciados verbales pues es un procedimiento no rutinario.

Y para reflexión hemos considerado problemas donde la traducción al lenguaje simbólico no es tan directa y deben decidir a qué dato asignar la incógnita x, luego es un proceso más complejo que la traducción directa, y además deben interpretar y verificar las soluciones del problema.

3.2 RECURSOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

En esta sección pasamos a describir los materiales que usaremos en las distintas sesiones de clase.

Programa informático: Algebra Balance Scales – Negatives –

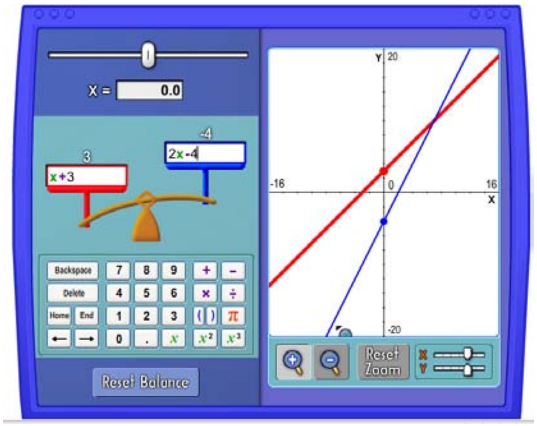


En este programa se propone una ecuación y se debe colocar en los platillos cada miembro de la ecuación, representando las incógnitas y enteros positivos como pequeños bloques, y las incógnitas y enteros negativos como globos que hacen fuerza opuesta a los bloques. Estas piezas se colocan en los platillos hasta que se represente la ecuación propuesta, momento en el que balanza alcanza el equilibrio.

Este material es interesante para entender el concepto de ecuación, como dos expresiones en equilibrio. El enlace a este material es el siguiente:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions

Programa informático: Pan Balance



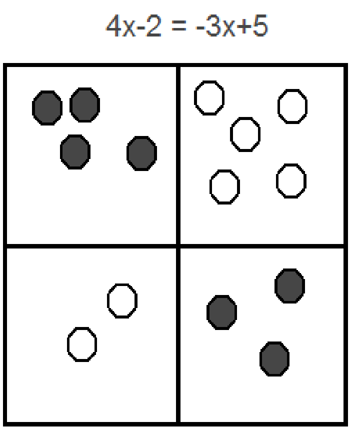
Este programa es similar al anterior, pero con más opciones. Aunque en este programa no se representan tan bien las ecuaciones (antes con bloques y globos) tenemos la opción de introducir dos ecuaciones (simulando al método de sustitución), y ver simultáneamente la representación gráfica de las dos rectas.

También podemos variar el valor de x, para acercarnos de forma aproximada a la solución.

El enlace para este programa es el siguiente:

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=10

Tablero MOFIP(Modelo operatorio de fichas sobre el plano)

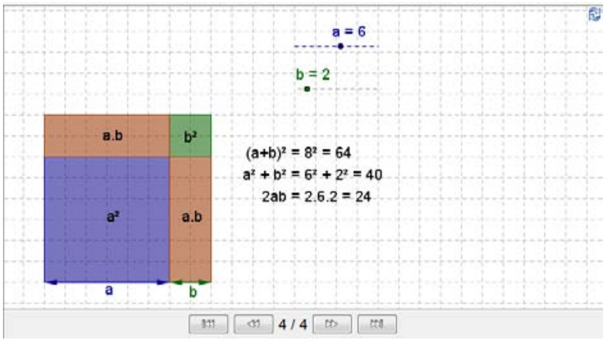


En este tablero representamos una ecuación, colocando fichas que representan a la incógnita y los enteros. En la parte de la izquierda colocamos las fichas correspondientes al primer miembro de la ecuación, y en la parte derecha las del segundo miembro. En la parte de arriba se colocan las fichas correspondientes a incógnitas o enteros positivos, y en la de abajo los negativos. El funcionamiento de este modelo se basa en que podemos añadir fichas por igual en la parte negativa y positiva de cada miembro para luego poder eliminar fichas iguales, basándonos en la regla de la suma, siempre en cuadrados colocados a la misma altura.

Se puede encontrar una descripción más detallada en el siguiente enlace:

http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagogico/Resolviendo%20las%20ecuaciones.pdf

Demostración geométrica del cuadrado de la suma



Este recurso consiste en un programa que muestra la demostración geométrica del cuadrado de la suma, en función de los parámetros a y b, que se pueden modificar a nuestro gusto. Se puede ver el proceso de construcción de dicha demostración paso a paso, y también aparecen preguntas relacionadas.

Este es el enlace:

http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/n1suma_cuadrado.htm

3.3 SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS EN LA U.D. GESTIÓN DEL AULA

Descripción de la organización de las tareas de la U.D:

Las sesiones por orden de aparición serán:

1. Expresiones algebraicas.
2. Ecuación de primer grado.
3. Reglas de equivalencias.
4. Sistemas de ecuaciones. Método de Igualación.
5. Método de reducción y Método de sustitución.
6. Resolución de problemas de ecuaciones y sistemas.

Tipos de tareas:

Se introducirán tareas de aplicación directa de conceptos, tales como de cálculo de valores numéricos de expresiones algebraicas, identificación de ecuaciones de primer grado y comprobación de soluciones de ecuaciones y sistemas.

También donde se critican igualdades algebraicas, identidades, equivalencia de ecuaciones y sistemas.

Existen tareas de interpretación gráfica de sistemas.

Por último, se describen tareas de aplicación de los algoritmos de resolución de ecuaciones y sistemas y además de problemas relacionados.

Ejemplos de tareas significativas y su función en el desarrollo de la U.D.:

EJEMPLO 1:

Tenemos dos cuadrados de lados a y b respectivamente:

a) Representar el cuadrado de lado a+b.

b) ¿Qué área tienen respectivamente los cuadrados de lados a, b y a+b?

c) ¿Qué es más grande el área del cuadrado grande o la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños? ¿En cuánto se diferencian? Explica tu respuesta.

d)¿Cuál es la relación entre dichas áreas?

e) Comprobar dicha fórmula realizando la operación.

- Función de dicha tarea en el desarrollo de la U.D.

Construcción de significados, pues el profesor la puede usar para introducir la fórmula de la suma desde el punto de vista geométrico.

EJEMPLO 2:

Escribe la expresión algebraica asociada a cada uno de los siguientes enunciados:

"Cierto múltiplo de 3".

"El doble de un número natural n".

"7 veces la suma de dos números consecutivos".

"El cuadrado del doble de un número".

“El doble del cuadrado de un número”.

- Función de dicha tarea en el desarrollo de la U.D:
Corrección o prevención de errores y dificultades, pues a los alumnos les cuesta comprender y utilizar este procedimiento.

4. Desarrollo de la secuencia de tareas de la U.D.

Presentamos ahora 6 sesiones de trabajo en clase sobre nuestro tema. He aquí listadas el nombre de dichas sesiones:

1 Expresiones algebraicas.
2 Concepto de ecuación.
3 Equivalencia de ecuaciones.
4 Sistemas de ecuaciones. Método de igualación.
5 Métodos de sustitución y reducción.
6 Resolución de problemas.

SESIÓN 1: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

Contenidos básicos: Estructura de una expresión algebraica, monomios y polinomios, operaciones con expresiones algebraicas, noción igualdad numérica y algebraica. Identidades notables.

Contextos y situaciones: Científico.

Sistemas de representación utilizados: verbal, simbólico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico (PR, LS, HT).
- Justificar si una igualdad algebraica es identidad o no. (AJ, LS)
- Afianzar las operaciones básicas con monomios y polinomios. (PR, LS).
- Traducir enunciados sencillos al lenguaje algebraico y viceversa (PR).

- Interpretar gráficamente alguna de las identidades notables y aplicarlas en operaciones con expresiones algebraicas. (LS, R, AJ, C)

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Al ser la primera sesión, haremos una revisión de conceptos que los alumnos han aprendido en el curso anterior. Después profundizaremos en la traducción de enunciados sencillos a expresiones algebraicas y viceversa, a continuación plantearemos actividades de calcular valores numéricos de expresiones algebraicas y de determinar que expresiones son identidades y cuáles no. Al final de la sesión daremos una interpretación geométrica a alguna de las identidades notables, en este caso, explicaremos la fórmula del cuadrado de la suma, donde se intentará que el alumno participe activamente en la obtención de dicha interpretación.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores.

Esta sesión es la primera. Los alumnos en el curso anterior han tenido contacto con estos contenidos, como no es un foco prioritario debe ser de un nivel bajo-medio e introductoria para la siguiente sesión que será "Ecuación de primer grado".

3. Secuencia de tareas:

En esta sección presentaremos nuestras tareas para perseguir los objetivos citados anteriormente:

Tarea 1 (Duración aproximada 10')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor**:**

El profesor después de recordar conceptos del curso anterior y ejemplos de expresiones algebraicas (tales como las fórmulas de áreas y perímetros de figuras planas regulares) planteará una exploración inicial del tipo:

a) Realiza las siguientes operaciones con enteros:

$8+2*5+4*3$
$12+4*5-2$
$37-4*(7-2)+3*8$
$56+3*2-7*(8-3)$
$2*(30-3*5-(2+7)+9)$

b) Dados los siguientes monomios identifica sus elementos, a saber, coeficiente, parte literal y grado y decide cuales se pueden sumar y realiza su suma.

x^2, x^2y
$x^3z, 2x^3z$
$2x, 2y$
$6x, 5x$

c) Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $5x^2-2y+6$ para lo*s pares de valores siguientes:*

{x=2, y=1} *{x=0, y=3}*

d) Escribe la expresión algebraica de las siguientes frases:

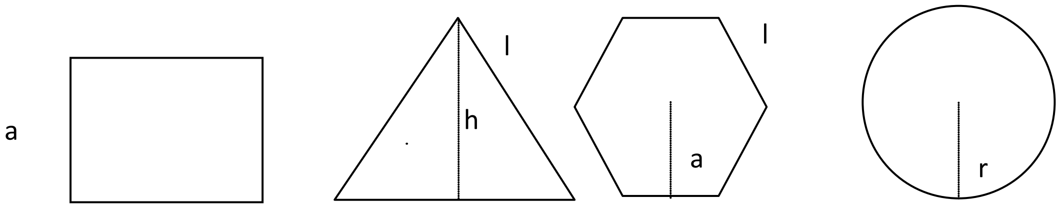
“el área y el perímetro de un rectángulo de lados a y b”

“el área y perímetro de un cuadrado de lado l”

“el área y perímetro de un triángulo equilátero de lado l y altura h”.

“el área y longitud de una circunferencia (círculo) de radio r”

“el área y perímetro de un hexágono regular de lado l y apotema a”.



- Material o recurso necesario**:** ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula**:** Actividad individual del alumno.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**:** Su intención principal es la de detectar las dificultades que a priori pueden tener los alumnos en el dominio de algunos conceptos y procedimientos básicos del curso anterior y que en la sesión actual se trabajarán y se desarrollarán.

Tarea 2 (Duración aproximada 10’)

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor**:**
  El profesor planteará actividades relacionadas con la traducción de enunciados verbales al lenguaje algebraico y viceversa, estará atento a las dudas planteadas por los alumnos o dificultades que surjan.

  Sean ejemplos de dichas actividades los siguientes:

a) Escribe la expresión algebraica asociada a cada uno de los siguientes enunciados.

“Cierto múltiplo de 3”.

“El doble de un número natural n”.

“7 veces la suma de dos números consecutivos”.

“El cuadrado del doble de un número”.

“El doble del cuadrado de un número”.

b) Completa la tabla siguiente:

Expresión algebraica	*Enunciado*
$a^2 + b^2$	
	El cuadrado de la suma de a y b.
$(2a)^2$	
	El doble del cuadrado de un número a.
$2x+(x+1)$	
	7 veces la mitad del consecutivo de un número natural n.

- Material o recurso necesario**:** ninguno específico
- Descripción sobre la gestión del aula**:** Actividad individual.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**:** La finalidad de esta tarea es que el alumno domine la técnica de traducción al lenguaje simbólico y la de interpretación pues le será útil para la resolución de problemas de ecuaciones y sistemas.

Tarea 3. (Duración aproximada 10’).

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor**:**

a) Calcular el valor numérico de la expresión $2a^3b + b^2a$ *, en los siguientes casos:*

{a=0, b=1},{ a=1, b=0},{a=2, b=3}.

b) ¿La igualdad, $3a^3b = 2a + b$ *, es cierta para a=0, b=0? ¿Y para a=1, b=1 ?Razonar si esta expresión es una identidad, en caso negativo, buscar un par de valores de a y b que no la hagan cierta.*

c) Decidir justificadamente si las siguientes igualdades son o no son identidades:

$$12x - 3x = 9x$$

$$4x + 5 - 3x + 2 = x + 7$$

$$3x - 6 + 15 = 2x + 25$$

$$2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

- Material o recurso necesario**:** ninguno específico
- Descripción sobre la gestión del aula**:** En la actividad c) el profesor puede dividir la clase en grupos de tres personas para que discutan el problema y un representante de cada grupo exponga un ejemplo de los 4 que hay. Los demás apartados serán individuales.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**:** La intención principal es que los alumnos tomen soltura en el cálculo de valores numéricos y usen eso para justificar la veracidad o falsedad de igualdades algebraicas y así distinguir entre identidades e igualdades algebraicas que no lo son.

Tarea 4. (Duración aproximada 15')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor**:**
  Tenemos dos cuadrados de lados a y b respectivamente:

  a) Representar el cuadrado de lado a+b.

  b) ¿Qué área tienen respectivamente los cuadrados de lados a, b y a+b?

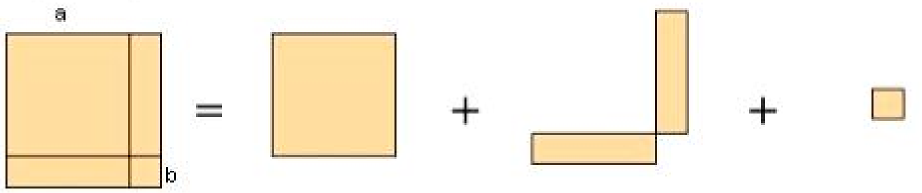
  c) ¿Qué es más grande el área del cuadrado grande o la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños? ¿En cuánto se diferencian? Explica tu respuesta.

d)¿Cuál es la relación entre dichas áreas?

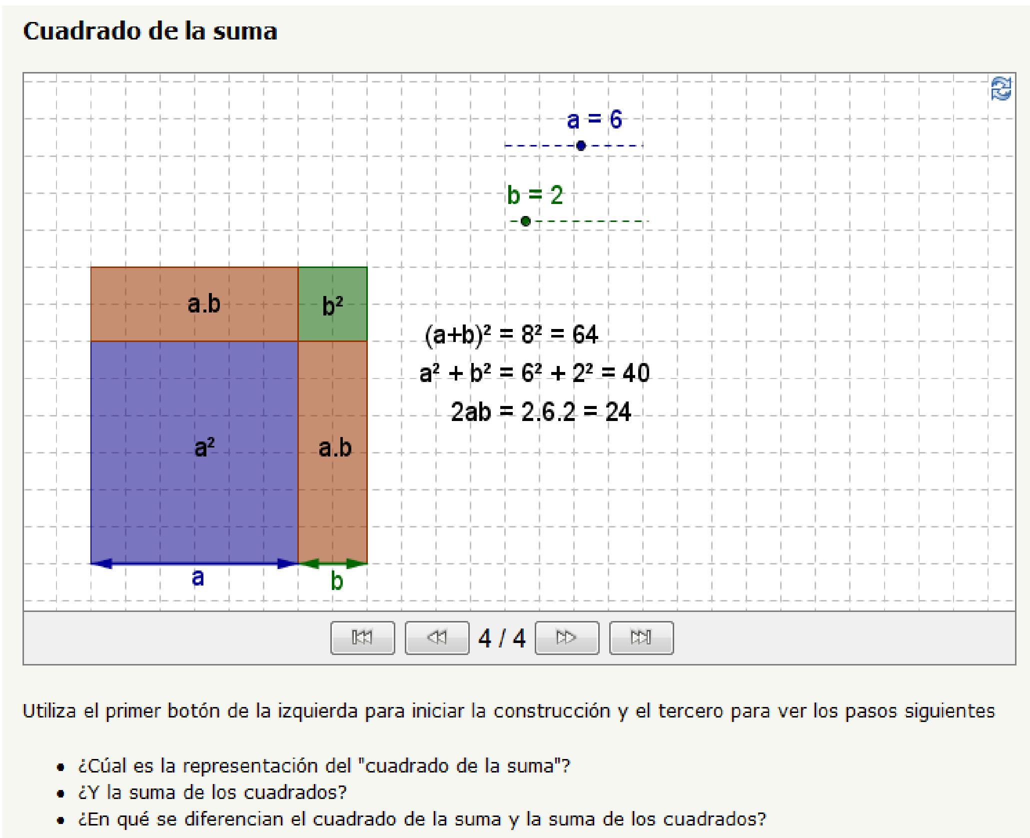
e)Comprobar dicha fórmula realizando la operación.

El profesor acompañará a los alumnos en la realización de la tarea, resolviendo dudas y analizando las respuestas que den los alumnos a las cuestiones. El profesor dará pistas para la obtención del dibujo siguiente que dará la interpretación geométrica de dicha fórmula.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Con ayuda del material informático los alumnos explorarán los pasos de la justificación geométrica de la fórmula.



- Material o recurso necesario**:** Ordenador e internet, para visualizar el enlace (http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/),en su defecto, pizarra y tiza .
- Descripción sobre la gestión del aula**:** Se trabajará por parejas, proporcionará un ordenador por pareja.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**:** La intención del profesor es la de evitar en lo posible el aprendizaje memorístico de las identidades notables y que se haga un uso rutinario de ellas, aportando un significado geométrico en este caso a la fórmula de la suma.

Tarea 5. (Tareas para casa)

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor**:**

El profesor mandará esta actividad para aplicar las identidades notables:

a) Calcula el valor de las siguientes expresiones:

$(4x+4)^2, \quad (x+3)^2, \quad (10x-100)^2, \quad (3-4x)^2$

b) Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.

$$\mathbf{(2x^3+3x)^2 = 4x^6+9x^2+12x^4}$$

$$\mathbf{(2x^3-5x)^2 = 4x^6-25x^2+20x^4}$$

$$\mathbf{(5x+3)(5x-3) = 25x^2+9}$$

$$\mathbf{(3x^2-4y)^2 = 9x^2-16y^2}$$

b) Haz un dibujo que represente gráficamente los siguientes polinomios:

$x^2+14x+49, \quad x^2+10x+25\,, \; x^2+22x+121$

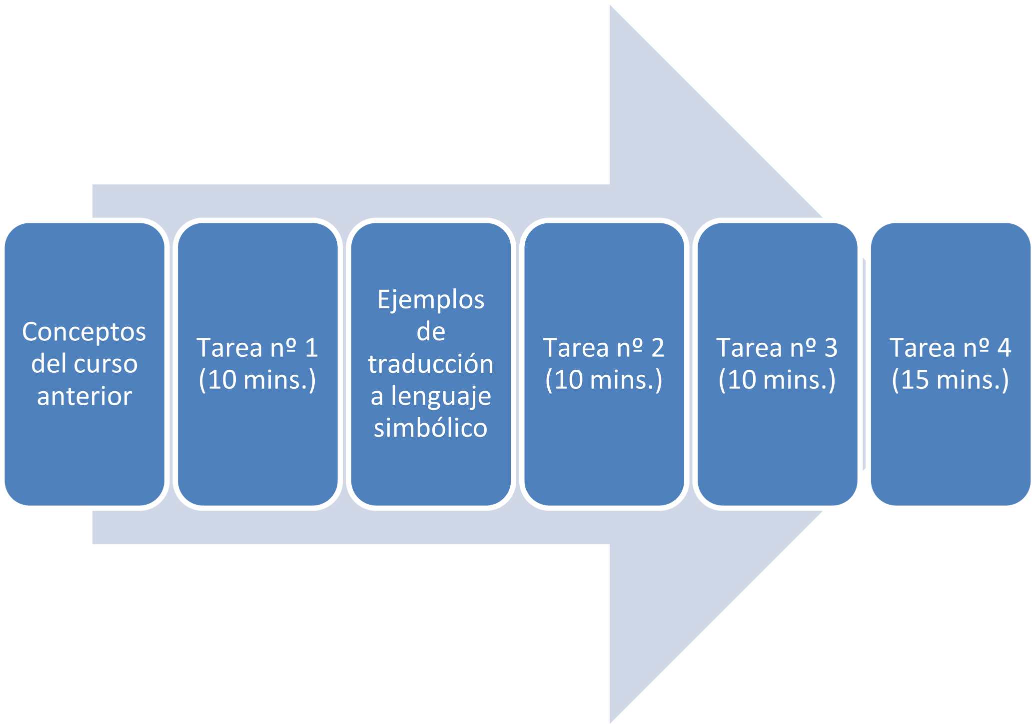
Exprésalos como cuadrado de una suma o diferencia.

c) La diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera, ¿Es par o impar? Justifica tu respuesta.

d) Demostrar que la diferencia entre los cuadrados de dos números pares consecutivos es siempre un múltiplo de 4. ¿Y qué ocurre con la diferencia entre los cuadrados de impares consecutivos? Justifica tu respuesta.

- Material o recurso necesario**:** Ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula**:** Son tareas para realizar en casa para entregar al día siguiente al profesor.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**:** Al ser un contenido nuevo se manda esta actividad para tener constancia de que aplican bien las identidades notables .Los dos últimos ejercicios de dificultad media-alta están planteados para algunos alumnos que quisieran profundizar más en la aplicación de dicho contenido.

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN



SESIÓN 2: <u>CONCEPTO DE ECUACIÓN</u>

1. Análisis de contenido y cognitivo:

<u>Contenidos básicos</u>: Estructura de una ecuación de primer grado, solución de una ecuación, concepto de equivalencia de ecuaciones.

<u>Contextos y situaciones</u>: Científico, personal y social.

<u>Sistemas de representación utilizados</u>: verbal y simbólico.

<u>Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales</u>:

- Comprender el concepto de ecuación (PR,LS).
- Saber diferenciar entre una lista de ecuaciones cuáles son de primer grado (PR,AJ,LS).
- Comprobar si un valor dado es solución de una ecuación (PR,C).

- Acercamiento intuitivo al concepto de equivalencia (PR,AJ,C).

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión : Se introducirán actividades de grado de complejidad bajo-medio para que los alumnos entiendan el concepto de ecuación y solución, y, además, distingan qué ecuaciones tienen las mismas soluciones. También se intentará desarrollar su actitud crítica planteándoles ecuaciones sencillas que no tienen solución o que son identidades.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posterior

Esta sesión la incluimos entre "expresiones algebraicas" y "resolución de ecuaciones", por lo tanto el tratamiento algebraico de ecuaciones debe ser intuitivo y cercano a los pocos conocimientos que han sido introducidos.

3. Secuencia de tareas:

Tarea nº 1 (Duración aproximada, 15')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

En esta tarea planteamos problemas sencillos aritméticos y situaciones y contextos cercanos al alumno, del tipo:

a)En una cesta con manzanas alguien coge 5 manzanas y quedan 3.¿Cuántas había al principio?

b) Salgo a la calle , voy al cine que me cuesta 4 euros y después compro un refresco por 2 euros, cuando llego a casa me quedan 5 euros. ¿Con cuánto dinero salí?.

c)Tengo un billete de 20 euros y compro un artículo cuyo precio desconozco, y me dicen que me faltan 2 euros .¿Cuánto cuesta dicho artículo?

Para cada uno de ellos se pide. Identificar el dato desconocido, asignarle una letra y por último conjeturar una ecuación para cada problema.

- Material o recurso necesario: ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: El profesor podría dividir la clase en 3 grupos, uno para cada problema y tomar nota de las dificultades que surjan.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención principal es mostrar a los alumnos que sin saberlo han resuelto ecuaciones y que son cercanas a su ámbito personal, científico y social.

Tarea Nº 2 (Duración aproximada, 15')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Una vez presentada la estructura de la ecuación comprobamos que el alumno la ha comprendido con cuestiones del tipo:

a)Dada la ecuación: 2x+3= 5x.Identifique los miembros 1º y 2º ,la incógnita, coeficientes y términos independientes . Comprueba que x=1 es solución

y que x=2 no lo es.

b)Sabemos que la expresión x+2=4 es cierta para x=2,¿Será cierta para otro valor?

c)Comprueba que 2(x+1)=2x+2 es una identidad.

d) La ecuación 2(x+1)-x=x+3 ¿Tiene alguna solución?

e) Resuelva x+2=5 y x+23=26 .¿Qué puedes decir de sus soluciones?¿Qué nombre reciben este tipo de ecuaciones?

f)Traduce la expresión ("Un número más el siguiente es 5")

- Material o recurso necesario: ninguno específico
- Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios individuales.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención es afianzar el concepto y forma de ecuación, la noción de solución y acercarles al concepto de equivalencia.

Tarea Nº 3 (Para realizar en casa)

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Con esta actividad se quiere que el alumno repase en su casa todos los conceptos aprendidos en esta sesión, con cuestiones sencillas como:

a)Señala cuál de las siguientes expresiones es una ecuación de primer grado. Y en el caso en el que no lo sea, explica por qué.

$$x^2 + 2x\text{-}1\text{=}5, \quad 3x + 2y = 6, \quad \sqrt{x+5} = 3, \quad 2x + 3 = 43$$

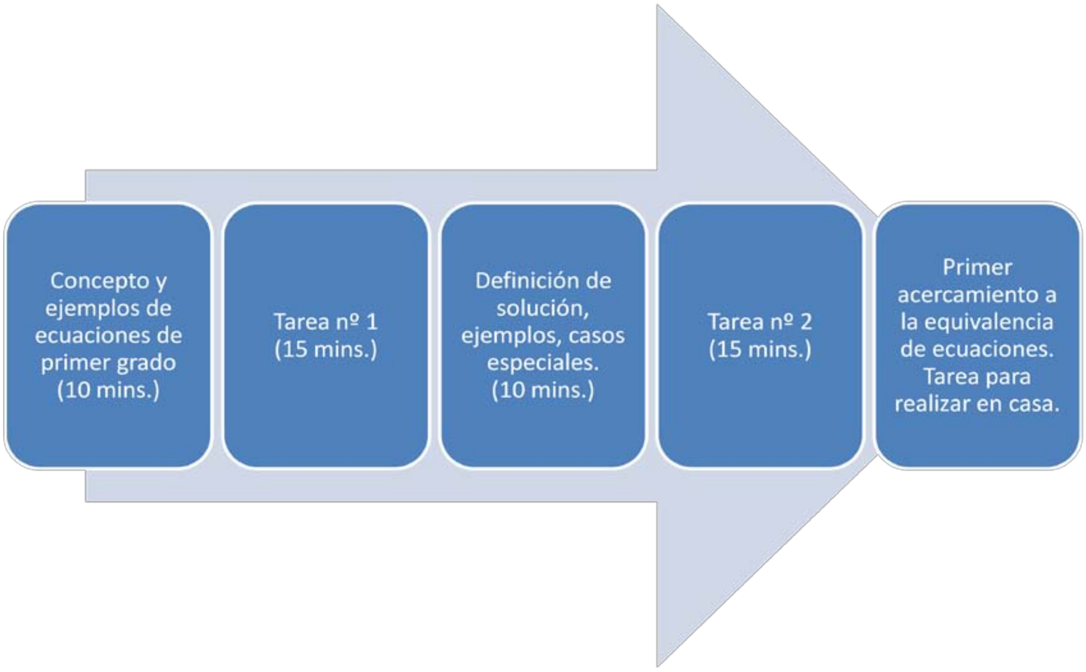
b) Dadas las siguientes ecuaciones, inventa un problema que se pueda resolver con ellas:

$$3x + 2x + 5 = 15, \quad x + (x + 1) = 7, (x + 1)^2 - x^2 = 5.$$

c) Encuentra tres ecuaciones (de primer grado), que tengan al uno (x=1) como solución.

- Material o recurso necesario: ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: Estos ejercicios están pensados para ser realizados en casa y entregados al profesor en la siguiente clase.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención del profesor es la de tener constancia de qué conceptos de los explicados en esta sesión son más difíciles de asumir por los alumnos, como también la de ir introduciendo la importante relación entre las representaciones verbal y simbólica de las ecuaciones de primer grado.

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN



SESIÓN 3: <u>REGLAS DE EQUIVALENCIA</u>

1. Análisis de contenido y cognitivo

<u>Contenidos básicos</u>: Estructura de una ecuación de primer grado, solución de una ecuación, concepto de equivalencia de ecuaciones.

<u>Contextos y situaciones</u>: Científico.

<u>Sistemas de representación utilizados</u>: verbal, simbólico, numérico y gráfico.

<u>Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales</u>:

- Dada una ecuación, completar el miembro desconocido de otra ecuación equivalente a la misma dada por el profesor (PR,LS,HT).
- Aplicar a una ecuación o sistema una regla arbitraria y analizar si la ecuación o sistema resultante es equivalente al anterior (AJ,LS).
- Dada una ecuación o sistema, obtener ecuaciones o sistemas equivalentes a los dados justificando las reglas de equivalencia que se han empleado (PR,AJ,LS).

- Obtener la solución general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, previo a la resolución de sistemas.(AJ,LS)
- Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación(C,R,LS,HT).

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión : Una vez presentado el concepto de ecuación y solución, se pasa a la resolución de ecuaciones, donde las reglas de equivalencia toman especial importancia, al facilitar un método para llegar a nuestro objetivo.

Para la comprensión de estas reglas le daremos importancia a la ayuda de las distintas representaciones, tales como, la ecuación como balanza en equilibrio, o el tablero que más tarde veremos. Se espera que el alumno aprenda en esta sesión a resolver cualquier tipo de ecuación de primer grado, comprendiendo el proceso paso a paso, y no sólo aprendiendo el método mecánico.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posterior

Esta es la tercera sesión del tema, tras presentar el concepto de ecuación, con la previa introducción a las expresiones algebraicas. En esta sesión nos dedicamos a la resolución de ecuaciones de primer grado, herramienta básica a utilizar en las sesiones posteriores, dedicadas a los sistemas de ecuaciones.

3. Secuencia de tareas

Tarea Nº 1 (Duración aproximada, 10’)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Las siguientes ecuaciones tienen como solución al 1 o -1, di cuál se corresponde con cada solución, y después comenta qué ecuaciones de entre la lista son equivalentes y por qué lo son:

a) $x+5=4$, *b)* $-x+3=x+5$, *c)* $2x+10=-x+13$,

d) $-3x-10=-7$, *e)*$5x=x+4$, *f)* $7=3x+4$.

Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes dadas, y explica que reglas de equivalencia has aplicado en cada caso para llegar a la ecuación que propones:

a)x+4=-2, *b)-2x=8,* *c)x+5=-x+3,* *d)-x+6=2x+1.*

De entre estas parejas de ecuaciones di cuáles son equivalentes, y en caso de que lo sean, qué regla de equivalencia debemos aplicar para pasar de una a otra.

a) x+5=2x+3 , 3x+15=6x+9. *b) –x+3=6 , -2x+6=9.*

c) x-7=-2x+8 , x-5=-2x-6. *d)5x=20 , 5x-4=20-4.*

e)8x-8=16 , x-1=2. *f) -2x-3=x-6 , -2x=x-3.*

- Material o recurso necesario: calculadora (opcional).
- Descripción sobre la gestión del aula: Esta actividad puede ser propuesta para ser realizada de forma individual por el alumno en el aula, para después ser resuelta por el profesor en la pizarra con los resultados dados por los alumnos.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Sin entrar en la resolución de las ecuaciones se intentará afianzar el entendimiento de las reglas de equivalencia previamente explicadas.

Tarea Nº 2(Duración aproximada, 10')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Despeja la incógnita de las siguientes ecuaciones, aplicando las reglas de equivalencia:

$a)\ 2x = 4,\ \ b)\ 4x + 3 = 7,\ \ c) - 3x = x + 2,\ \ d)\ 5x - 4 = 2x + 2,$

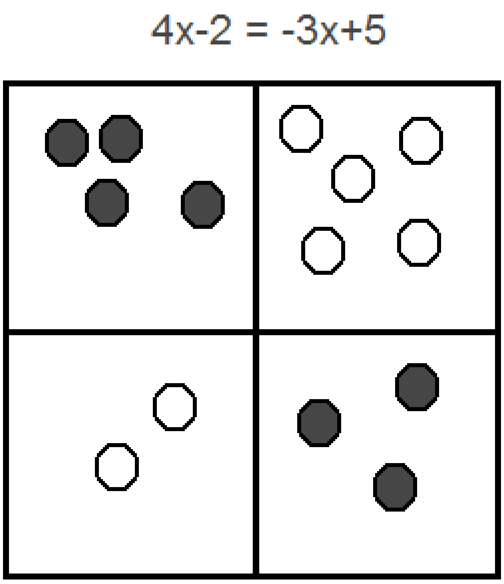
$e)\ \frac{3x+2}{3} = \frac{2x}{2},\qquad f)\ \frac{2x}{4} + 3 = \frac{x}{2},\qquad g)\frac{x-2}{-3} = \frac{x}{5},$

- Material o recurso necesario: Ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: Los alumnos tendrán unos minutos para pensar en la solución de los primeros ejemplos, y, posteriormente, el profesor mostrará la resolución de los ejemplos más sencillos con ayuda del programa, y los más complicados los hará en la pizarra pidiéndole indicaciones a los alumnos.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Tras enseñar cómo se puede mediante las reglas de equivalencia simplificar una ecuación de manera que la incógnita aparezca aislada, "despejada", el profesor propondrá estas ecuaciones de mayor dificultad, en la que aparecen paréntesis y fracciones.

Tarea Nº 3 (Duración aproximada, 20')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

TABLERO MOFIP



Simplifica al máximo las siguientes ecuaciones con el tablero y explica en cada transformación que realices la regla de equivalencia que utilizas:

a) $3x+2=2x+3$, b) $-x-2=x$,

c) $5=4x-3$, d) $2x-1=-2x+3$,

- Material o recurso necesario: tablero (MOFIP)
- Descripción sobre la gestión del aula: En esta tarea se dividirá el alumnado por grupos (de unos cuatro alumnos cada uno), a los cuales se les repartirá un tablero para que cada alumno resuelva una ecuación. Tras la realización del ejercicio se le pedirá a los alumnos que comenten los problemas que han encontrado en el proceso.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Tras una explicación del funcionamiento del tablero, la intención es la de que los alumnos tengan un punto de vista distinto de las reglas de equivalencia con ayuda de esta representación de las ecuaciones, y, que sigan a la vez ensayando el método de resolución de ecuaciones.

Tarea Nº 4 (para realizar en casa)

a) Resuelve las ecuaciones siguientes realizando un dibujo en cada paso emulando la situación que tendríamos en el tablero MOFIP, e indicando también en cada paso que regla de equivalencia has usado:

-2x+2=x-4,   x+3=-x+7,   2x+3=x.

b) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3-(x+4)}{2}-\frac{4x}{3}=2x+5, \qquad x-2\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{3x}{2}$$

$$x-3\left(\frac{1-(x-2)}{2}\right)=2(x-2\frac{-x-3}{5})$$

Material o recurso necesario: ninguno específico.

Descripción sobre la gestión del aula: Esta tarea será propuesta para hacer en casa, siguiendo el mismo proceso explicado en la tarea 3.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es la de que el alumno ponga en práctica lo aprendido en la sesión.

SESIÓN 4: CONCEPTO DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES, MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Análisis de contenido y cognitivo

Contenidos básicos: Estructura de una ecuación con dos incógnitas, representación gráfica de una ecuación lineal, soluciones de una ecuación con dos incógnitas, concepto y estructura de un sistema de ecuaciones lineales, sistemas sin solución o con infinitas soluciones. Representación gráfica de sistemas. Método de igualación.

Contextos y situaciones: Personal y laboral.

Sistemas de representación utilizados: verbal, gráfico y simbólico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Comprender el concepto de sistema de ecuaciones (PR,LS)
- Comprobar si un par de valores dados son solución de un sistema(PR,C).
- Representar gráficamente un sistema y escribir la solución observando la gráfica(R).
- Acercamiento intuitivo al concepto de equivalencia (PR,AJ,C).

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión : Se introducirán actividades de grado de complejidad bajo-medio para que el alumno entienda el concepto de sistema, que entienda lo que significa gráficamente la solución de un sistema, y desarrollar su actitud crítica planteándoles sistemas sin solución o con infinitas soluciones.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posterior:

Esta sesión se sitúa tras la sesión relacionada con las reglas de equivalencia, en la que también se enseña a resolver ecuaciones, y después de esta sesión se encuentra la de "métodos de reducción y sustitución"

3. Secuencia de tareas

Tarea Nº 1 (Duración aproximada, 15')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

En esta tarea planteamos problemas sencillos para el manejo de ecuaciones con dos incógnitas, situaciones y contextos cercanos al alumno, del tipo:

a) *Iván ha comprado tres paquetes de patatas y cuatro barras de pan, ha pagado con ocho euros y no le ha sobrado nada, ¿cuánto le han costado entonces las patatas?, ¿y el pan? Aquí te damos varias opciones, ¿cuáles podrían ser correctas?*
La ecuación sería $3x+4y=8$

1) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1/4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

b) *Completa la tabla con soluciones de esta ecuación*: 3x+y=12

X	0		3		5	-1		-3
y		9		0			18	

c) *Representa gráficamente*:

1)2x-y=1 2)2x-3y-3=0 3)y= $\frac{x+1}{2}$

- Material o recurso necesario: ninguno específico
- Descripción sobre la gestión del aula: Serían actividades individuales, con excepción de la última, en la cual el profesor podría dividir la clase en seis grupos, y asignarle a cada grupo un apartado, con lo que cada dos grupos tendrían el mismo ejercicio y así podrían comparar si sus resultados coinciden y posteriormente explicárselo al resto de compañeros.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención principal es demostrar a los alumnos que han resuelto ecuaciones con dos incógnitas, las cuales usarán mas adelante para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Tarea Nº 2 (Duración aproximada, 15')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

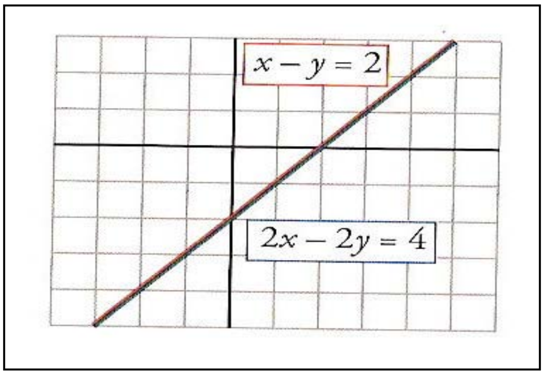
Una vez presentada la estructura y concepto de sistema de ecuaciones lineales con solución (una o varias) o sin solución, y la interpretación gráfica de los mismos, los alumnos realizarían las siguientes actividades, para ver si han comprendido bien dichos conceptos.

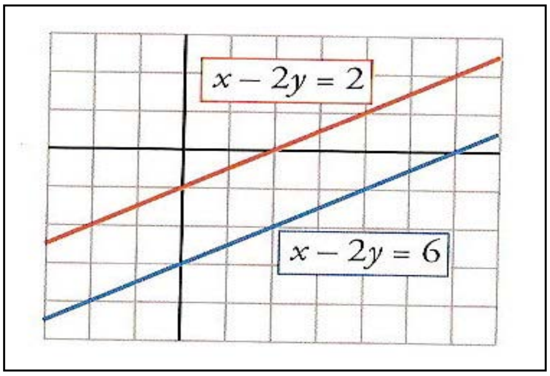
a) Representa gráficamente y escribe la solución:

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} y = 2 + \frac{x}{2} \\ y = 4 - \frac{x}{2} \end{cases}$

b) Dí mediante las siguientes representaciones gráficas si sus correspondientes sistemas tienen o no solución y porqué.

GRAFICA 1 **GRÁFICA 2**



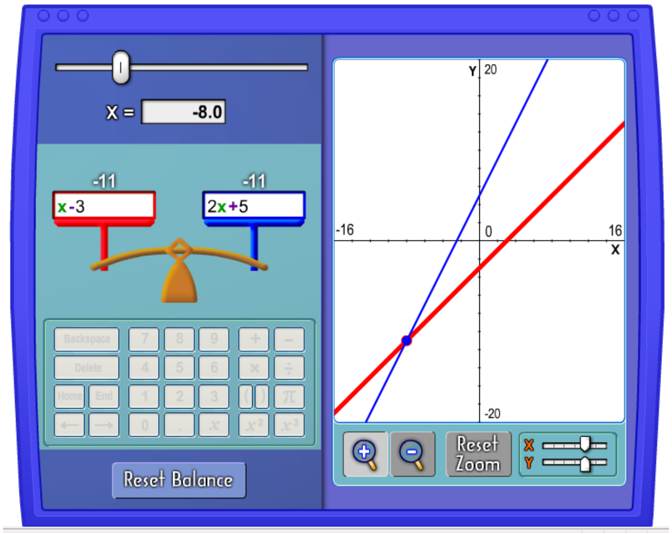


- Material o recurso necesario: ninguno específico, solo las fotocopias de los ejercicios donde salen las representaciones de dos sistemas.
- Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios individuales.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención es afianzar el concepto y forma de sistema de ecuaciones lineales, solución, y representación gráfica.

Tarea nº 3 (Duración aproximada, 20')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Una vez explicado el método de igualación para la resolución de sistemas se les plantea estos ejercicios para que comprendan un poco más este método.

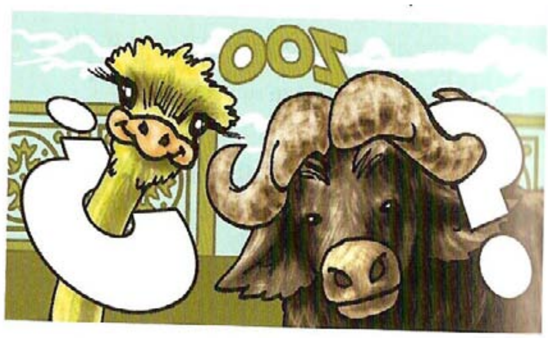


1)En el siguiente enlace, que nos lleva a una balanza virtual, investigar y descubrir la aplicaciones a resolución de sistemas de ecuaciones mediante el método de igualación:

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=10

2)En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas.

¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?



Pista:	
Búfalos	x
Avestruces	y
Patas de búfalo	4x
Patas de avestruz	2y

- <u>Material o recurso necesario</u>: las fotocopias de los ejercicios y un aula con ordenadores.
- <u>Descripción sobre la gestión del aula</u>: Ejercicios individuales.
- <u>Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad</u>: Su intención es que los alumnos sepan resolver un problema

utilizando el método de igualación, y que vean mediante un “juego” como funciona dicho método.

Tarea nº4 (Para realizar en casa)

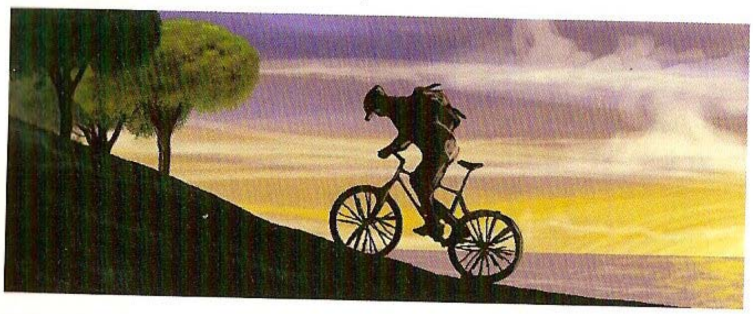
1)*Representa estas ecuaciones*:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

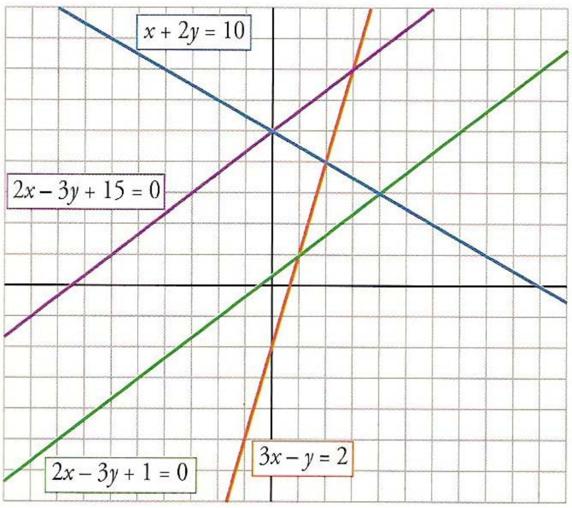
a) Escribe las coordenadas del punto de corte

b) Escribe la solución del sistema que forman ambas ecuaciones.

2) *Un ciclista sube un puerto y, después,desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y*



que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos. ¿Cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?



2) Observa el gráfico y responde:

a) Escribe un sistema cuya solución sea { x=2, y=4}

b) Escribe un sistema cuya solución sea {x=0, y=5} *c) Escribe un sistema sin solución.*

- Material o recurso necesario: las fotocopias de las actividades.
- Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios individuales para casa.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es que los alumnos repasen en casa lo explicado en clase, y así ver si han comprendido bien los conceptos o dónde tienen mayor

dificultad.

SESIÓN 5: MÉTODO DE SUSTITUCIÓN Y REDUCCIÓN.

1. Análisis de contenido y cognitivo

Contenidos básicos: Resolver ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de sustitución y reducción.
Contextos y situaciones: Científico. Sistemas de representación utilizados: Simbólico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Dominar resolución algebraica de ecuaciones justificando en cada paso que regla de equivalencia se está usando (AJ,LS,HT).
- Resolución de sistemas por sustitución y reducción (LS).
- Resolución gráfica de sistemas (R,LS,HT).
- Estudio de sistemas mediante el uso de tablas de valores (R).

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Se introducirán actividades, principalmente, de la resolución de dos ecuaciones con dos incógnitas donde el alumno tenga que utilizar los métodos de sustitución y reducción con la intención de que el alumno sepa distinguir bien entre los dos métodos.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posterior

Esta sesión la incluimos entre "Sistemas de ecuaciones, método de igualación" y "Resolución de problemas ", por lo tanto al alumno debe quedarle claro cada método de resolución de ecuaciones para después poder resolver con soltura los problemas que se le planteen.

3. Secuencia de tareas

Tarea Nº 1 (**Duración aproximada 15’**)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de sustitución. (Nota: antes de empezar a operar piensa bien que variable eliges en primer lugar para luego sustituir)

$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

•Material o recurso necesario: ninguno específico

•Descripción sobre la gestión del aula: Cada alumno va resolviendo sus sistemas de ecuaciones para que el profesor pueda comprobar la dificultad de cada uno en dicho método.

•Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención principal es comprobar que los alumnos han comprendido el método de sustitución.

Tarea Nº 2 (**Duración aproximada, 15’**)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción. (Nota: observa bien el sistema antes de empezar a operar, para ver qué camino puede ser el más sencillo):

$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x - 5y = 38 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

•Material o recurso necesario: ninguno específico

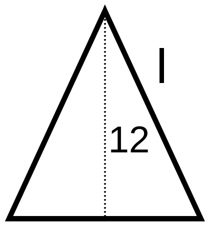
•Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios individuales para que el profesor vea las dificultades de cada alumno.

•Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención es ver que el alumno ha entendido el método de reducción.

Tarea Nº 3 (**Duración aproximada, 10’**)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El perímetro de un triángulo isósceles es 36 metros .La altura relativa al lado desigual mide 12 metros. Calcula la medida de los lados iguales.



•Material o recurso necesario: ninguno específico

•Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios individuales para que el profesor vea las dificultades de cada alumno.

•Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Comprobar que el alumno sabe pasar de una situación a un sistema de ecuaciones para luego resolverlo por cualquiera de los dos métodos sustitución o reducción.

Tarea Nº4 **(Para realizar en casa)**

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:.

Resolver estas ecuaciones por los métodos de sustitución y reducción y comprobar que da el mismo resultado:

$\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 3x - 7y = 33 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 7x + 10y = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 5x + 3y = 18 \end{cases}$

•Material o recurso necesario: ninguno específico

•Descripción sobre la gestión del aula: Ejercicios resueltos en casa individualmente, los cuales, serán corregidos al día siguiente por un alumno seleccionado al azar en la pizarra

•Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Su intención es ver que el alumno ha comprendido los dos métodos y sabe resolver mediante los dos métodos sistemas de ecuaciones.

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. **Análisis de contenido y cognitivo:**

Contenidos básicos: se trata de dar herramientas a los alumnos para que puedan resolver problemas planteados sin necesidad de que te den explícitamente la ecuación a de la que queremos calcular su solución.

Contextos y situaciones: Científico, personal y vida cotidiana.

Sistemas de representación utilizados: verbal y simbólico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

- Inventar problemas en situaciones y contextos variados que se resuelvan con ecuaciones y sistemas (C, M, RP).
- Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solucione/s se ajustan al contexto del problema(C, M, RP, R,LS).
- Dada una ecuación o sistema inventar un problema que se resuelva con dicha estructura matemática(C, M, RP, LS).
- Detectar problemas mal planteados y discutir las razones. (PR, AJ, C, RP).

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

El objetivo principal es el que el alumno sepa afrontar un problema dado con una expresión verbal, traducirla a lenguaje algebraico para poder resolver una ecuación e interpretar el resultado.

2. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posterior:

Esta sesión es el culmen de la unidad didáctica, y será el principal y último objetivo a conseguir, por tanto irá en último lugar. La intencionalidad principalmente, es ver si los alumnos han comprendido la esencia del porqué existen las ecuaciones de primer grado, y por tanto que conozcan varias de sus aplicaciones a la vida real.

3. Secuencia de tareas

Tarea Nº 1 (Duración aproximada, 20')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Se trata de un problema en el que la principal dificultad radica en su traducción a lenguaje algebraico.

"*La vida de un hombre transcurrió durante la sexta parte en casa de sus padres; durante la doceava parte estudio en la escuela superior; la séptima parte vivió en la ciudad donde desarrollo su vida laboral. Con el paso de una quinta parte estuvo casado, que duro la mitad del tiempo que vivió, que solo vivió cuatro años más*".

a) Busca cuál es la incógnita del problema.

b) Sabiendo cuál es la incógnita del problema, trata de traducir el enunciado a una expresión algebraica.

c) Resuelve la ecuación buscada en el apartado anterior.

d) ¿A qué edad murió el hombre?

- Material o recurso necesario: ninguno específico

- Descripción sobre la gestión del aula: Trabajo individual. En este ejercicio en particular el profesor lo resuelve para dar un ejemplo de como plantear y afrontar un problema de estas características.

- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: la intención del profesor es que dado un enunciado, en primer lugar ver si se puede traducir a una expresión algebraica, en segundo lugar traducirlo y en tercero dar una solución a dicho enunciado e interpretar dicho resultado.

Tarea Nº 2 (**Duración aproximada, 20'**)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

a) "*Luis preguntó a su primo Juan cuántos años tenía y Juan le contestó: "Si al triple de los años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora." ¿Cuántos años tiene Juan?*."
b) *"El perímetro de un rectángulo tiene 22 cm. Al aumentar 3 cm una de las dimensiones del rectángulo y 2 centímetros la otra su área aumenta 32 cm2. Encuentra las longitudes de los lados de este rectángulo."*

- Material o recurso necesario: ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: el profesor asignará grupos de dos o tres personas para que entre los dos aplique la estrategia empleada en el apartado anterior

- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Después de dar varios ejemplos sencillos de cómo pasar a lenguaje algebraico enunciados que encierran ecuaciones, se proponen estos dos nuevos enunciados, un poco más complicados, para que los

alumnos profundicen en la traducción a lenguaje algebraico.

5. Evaluación de aprendizajes en la U.D.

La evaluación final de la U.D. consiste en una evaluación continua donde se valorarán las tareas que se han realizado en clase, y las realizadas en casa. También evaluaremos por medio de una prueba final escrita única que presentamos ahora:

[2] 1.*Haz un dibujo que represente gráficamente los siguientes polinomios:*

$x^2 + 14x + 49, \quad x^2 + 10x + 25\ , x^2 + 22x + 121$

Exprésalos como un cuadrado de una suma o diferencia.

[1] 2.La ecuación 2(x+1)-x=x+3 ¿Tiene alguna solución?

[2] 3. De entre estas parejas de ecuaciones di cuáles son equivalentes, y en caso de que lo sean, qué regla de equivalencia debemos aplicar para pasar de una a otra.

a) $x+5=2x+3$, $3x+15=6x+9$. *b)* $-x+3=6$, $-2x+6=9$.

c) $x-7=-2x+8$, $x-5=-2x-6$.

[1] 4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \frac{3-(x+4)}{2}-\frac{4x}{3}=2x+5, \qquad b)\ x-2\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{3x}{2}$$

[2] 5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método que consideres oportuno:

$$a)\begin{cases}5x+7y=-1\\3x-7y=33\end{cases} \quad b)\ \begin{cases}2x+5y=10\\7x+10y=20\end{cases} \quad c)\ \begin{cases}2x-3y=3\\5x+3y=18\end{cases}$$

El apartado c) resuélvelo gráficamente.

[2] 6. Luis preguntó a su primo Juan cuántos años tenía y Juan le contestó: Si al triple de los años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene Juan?

Procedemos con los objetivos que este control pretende evaluar***:***

Ejercicio 1.

Pretendemos evaluar el objetivo de "Interpretación gráfica de las identidades notables" y "uso correcto de las identidades notables".

Ejercicio 2.

Pretendemos evaluar el objetivo de "Discutir si una ecuación tiene o no tiene solución".

Ejercicio 3.

Con este ejercicio evaluamos objetivos de “Seleccionar ecuaciones equivalentes dada una lista de ellas” y ”Encontrar la regla que lleva una ecuación a otra equivalente”.

Ejercicio 4.

Con este ejercicio evaluamos objetivos de “Dominar la resolución algebraica de ecuaciones”.

Ejercicio 5.

El objetivo asociado es “Dominar la resolución algebraica y gráfica de sistemas y gráfica”.

Ejercicio 6.

El objetivo destacado es “Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solucione/s se ajustan al contexto del problema”.

El criterio utilizado para seleccionar tareas es escoger algunas del tipo reproducción, otras de conexión (resolución de ecuaciones y sistemas) y de reflexión (Problemas) de forma que los objetivos mínimos del tema y la mayor parte de las competencias sean abarcados. La ponderación se hace según el grado de complejidad de dichas tareas.

También se tendrá en cuenta para la evaluación los aspectos actitudinales del alumno.

6. Conclusiones y valoración del grupo acerca del trabajo realizado para la U.D. y del producto final.

En primer lugar nos gustaría decir que hemos aprendido mucho en esta asignatura. Ninguno imaginábamos en principio que tras la palabra didáctica hubiera tanto escondido. Esperamos poder poner en práctica todos estos conocimientos en un futuro.

Pero por otra parte nos hubiera gustado haber podido hacer este trabajo poco a poco, desde el primer día de curso. Creemos que de esta forma el resultado habría sido un poco mejor.

7. Bibliografía

Páginas web:

- http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/mate3a/mate3a.htm
- http://html.rincondelvago.com/origen-del-algebra.html
- http://www.insa-col.org/sites/url/melissa/index1.htm
- http://matesup.utalca.cl/matematica1/web_curso_mat_2007/historia/algebra_historia.htm
- http://recursos.pnte.cfnavarra.esl~msadaall/geogebra/
- http://www.acienciagalilei.com/mat/problems/ejer1mat-sistecuazlin-1
- http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/Modelopedagógico/MOdelo%20Mofip.pdf
- http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=10

Libros:

Libro de texto de Matemáticas 1 y 3: *ESFERA*, editorial SM.

Libro de texto de Matemáticas 3 de ESO: editorial Anaya.

Libro de texto de Matemáticas 2 de ESO: editorial Anaya, Autores: J. Colera, I. Gaztelu.

La educación matemática en enseñanza secundaria. Luis Rico, Encarnación Castro, Enrique Castro, Moisés Coriet, Antonio Marín, Luis Puig, Modesto Sierra, Martín Socas; editorial Horsori.

Iniciación al algebra 23. Matemáticas, cultura y aprendizaje, editorial Síntesis.

8. Anexo: Relación de las tareas que intervienen en la U.D. analizadas según los indicadores usuales.

En las siguientes tablas, presentamos un análisis de las tareas propuestas en cada sesión, atendiendo a los indicadores usuales, tales como:

- Contenidos a los que hace referencia.
- Sistemas de representación involucrados.
- Situación en que se enmarca.
- Objetivos a los que se refiere.
- Competencias a cuyo desarrollo contribuyen.

- Grados de complejidad.
- Tipos de secuencia de aprendizaje asociados.

SESIÓN 1 Tarea 1:

Objetivos	*Operar con enteros con soltura.* *Recordar la estructura de un monomio y realizar operaciones con ellos correctamente.* *Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.* *Recordar fórmulas de áreas y perímetros de figuras planas regulares.*
Tipos de contenidos	*Aritmética entera.* *Operaciones básicas con monomios.(D)* *Valor numérico de una expresión algebraica.(C)* *Áreas y perímetros de figuras planas.*
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*

Situación/Contexto	*Científico*	
C.D Competencias	*PR(Reproducción)*	*LS(Reproducción)*
(complejidad)	*Comprender y emplear conceptos ya aprendidos en el curso anterior*	*Descodificar* *Interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*De análisis de conocimientos previos*	

Tarea 2:

Objetivos	*Expresar en lenguaje algebraico enunciados sencillos y viceversa.*
Tipos de contenidos	*Escritura y lectura de expresiones algebraicas(D)* *Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.(D)*
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*
Situación/Contexto	*Científico*
C.D Competencias	*LS(Reproducción)*

(complejidad)	*Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*

Tarea 3:

Objetivos	*Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.* *Justificar si una igualdad entre expresiones algebraicas es o no es identidad.*
Tipos de contenidos	*Valor numérico de una expresión algebraica.(C)* *Igualdades algebraicas e identidades algebraicas.(C)* *Reconocimiento de identidades (E)*
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*
Situación/Contexto	*Científico*

<table>
<tr><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.D Competencias

(complejidad)</td><td>PR(Repr)</td><td>AJ(Repr)</td><td>LS(Repr)</td></tr>
<tr><td>Comprender y emplear conceptos de valor numérico e identidad.</td><td>Elaborar argumentos sencillos que justifiquen su respuesta</td><td>Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.</td></tr>
<tr><td>Tipo de secuencia

de aprendizaje</td><td colspan="3">De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.</td></tr>
</table>

Tarea 4:

Objetivos	*Interpretar gráficamente alguna de las fórmulas notables*
Tipos de contenidos	*Identidades notables.* *Fórmulas del área para el cuadrado y el rectángulo..* *Razonamiento figurativo (R).*
Sistemas de representación	*Verbal, simbólico, gráfico*
Situación/Contexto	*Científico*

C.D Competencias (Complejidad)	*PR(conex)*	*C(conex)*	*R(conex)*
	Formular preguntas simples y comprender el tipo de respuesta	*Saber expresarse oralmente y por escrito explicando asuntos que implican relaciones sencillas.*	*Interpretar formas de representación más o menos familiares de objetos matemáticos.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*		

Tarea 5:

Objetivos	*Representar gráficamente polinomios.* *Operar y justificar igualdades utilizando las identidades notables.* *Expresar un polinomio como cuadrado de una suma o resta.*
Tipos de contenidos	*Identidades notables.* *Fórmulas del área para el cuadrado y el rectángulo..* *Razonamiento figurativo (R).*
Sistemas de representación	*Verbal, simbólico, gráfico (d) y(e)*
Situación/Contexto	*Científico*

C.D Competencias **(Complejidad)**	*PR(conex)*	*R(conex) (c)*	*AJ (conex)* *AJ (reflex) (e),(d)*
	Comprender los tipos de respuesta plasmados en tablas, gráficas, lenguaje algebraico, cifras…	*Interpretar formas de representación más o menos familiares de objetos matemáticos.*	*Razonar distinguiendo entre pruebas y otras formas de argumentar.*
Tipo de secuencia **de aprendizaje**	*De consolidación de conocimientos.*		

SESIÓN 2 Tarea 1:

Objetivos	*Resolución de problemas sencillos sin usar expresamente la herramienta de una ecuación.*
Tipos de contenidos	*Aritmética entera.*
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*
Situación/Contexto	*Personal*
C.D Competencias **(complejidad)**	*RP (Reproducción)*
	Exponer, plantear y resolver problemas puros.

Objetivos	*Comprobar si un valor dado es solución o no de una ecuación.* *Decidir si una ecuación es identidad o no.*

Tipo de secuencia de aprendizaje	*De análisis de conocimientos previos*

Tarea 2:

Tipos de contenidos	*Valor numérico de una expresión algebraica.(C)* *Conceptos de ecuación y solución de una ecuación.* *Reconocimiento de identidades(E)* *Traducción al lenguaje simbólico de enunciados sencillos(D)*	
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*	
Situación/Contexto	*Científico*	
C.D Competencias	*PR(Reproducción)*	*LS(Reproducción)*
(complejidad)	*Comprender y emplear conceptos ya aprendidos en el curso anterior*	*Descodificar* *Interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*	

Tarea 3:

<table>
<tr><td rowspan="1">Objetivos</td><td colspan="3">Distinguir y justificar qué igualdades algebraicas son ecuaciones de primer grado.

Plantear problemas cuya ecuación resolutora sea una dada.</td></tr>
<tr><td>Tipos de contenidos</td><td colspan="3">Conceptos de ecuación y estructura

Proceso inverso a la traducción un enunciado verbal de un problema al lenguaje simbólico</td></tr>
<tr><td>Sistemas de representación</td><td colspan="3">Verbal y simbólico</td></tr>
<tr><td>Situación/Contexto</td><td colspan="3">Científico, personal, social, laboral</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.D Competencias

(complejidad)</td><td>AJ(conexión)</td><td>RP(reflexión)</td><td>LS(reflexión)</td></tr>
<tr><td>Justificar con argumentos de tipo simbólico.</td><td>Plantear problemas a partir de la ecuación que los resuelve</td><td>Traducir entre el lenguaje simbólico y el natural.</td></tr>
<tr><td>Tipo de secuencia

de aprendizaje</td><td colspan="3">De consolidación de conocimientos.</td></tr>
</table>

SESIÓN 3 Tarea 1:

SESIÓN 4 Tarea 1:

<table>
<tr><td>Objetivos</td><td colspan="3">Operar con ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
Resolver problemas sencillos con ecuaciones de dos incógnitas..
Dados parejas de datos, x e y determinar cuales son solución de una ecuación dada y cuáles no.
Aprender a usar la tabla de valores
Representar gráficamente una ecuación..</td></tr>
<tr><td>Tipos de contenidos</td><td colspan="3">Ecuaciones con dos incógnitas.
Operaciones con ecuaciones de dos incógnitas
Representación gráfica.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de representación</td><td colspan="3">Verbal, simbólico, gráfico y numérico</td></tr>
<tr><td>Situación/Contexto</td><td colspan="3">Vida cotidiana.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.D Competencias
(complejidad)</td><td>PR</td><td>RP</td><td>R</td></tr>
<tr><td>Reproducción
Conexión</td><td>Acción</td><td>Acción.</td></tr>
<tr><td>Tipo de secuencia
de aprendizaje</td><td colspan="3">De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.</td></tr>
</table>

Tarea 2:

Objetivos	*Crear y utilizar la representación gráfica en la resolución de problemas*	
Tipos de contenidos	*Representación gráfica de una ecuación y sistemas de ecuaciones y utilización de esta como herramienta para resolver problemas*	
Sistemas de representación	*Simbólico y gráfico.*	
Situación/Contexto	*Matemático.*	
C.D Competencias (complejidad)	*LS(Reproducción)*	*AJ*
	Acción y reproducción.	*Acción.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*Asimilación de de la representación*	

Tarea 3**:**

<table>
<tr><td>Objetivos</td><td colspan="4">Aprender a manipular sistemas informáticos como herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones por igualación.</td></tr>
<tr><td>Tipos de contenidos</td><td colspan="4">Sistema de ecuaciones resolviéndolas por método re igualación.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de representación</td><td colspan="4">Verbal, simbólico y gráfico.</td></tr>
<tr><td>Situación/Contexto</td><td colspan="4">Social.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.D Competencias

(complejidad)</td><td>PR(Repr)</td><td>RP</td><td>AJ(Repr)</td><td>LS(Repr)</td></tr>
<tr><td>Comprender y emplear conceptos de valor numérico e identidad.</td><td>Acción.</td><td>Elaborar argumentos sencillos que justifiquen su respuesta</td><td>Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.</td></tr>
<tr><td>Tipo de secuencia

de aprendizaje</td><td colspan="4">De desarrollo y aprendizaje de nuevas herramientas virtuales para la resolución de problemas.</td></tr>
</table>

SESIÓN 5 Tarea 1:

Objetivos	*Resolución de ecuaciones mediante el método de sustitución*	
Tipos de contenidos	*Resolución de sistemas por igualación, reducción y sustitución*	
Sistemas de representación	*Simbólico*	
Situación/Contexto	*Científico*	
C.D Competencias (complejidad)	*PR(Reproducción)*	*LS(Reproducción)*
	Emplear conceptos ya aprendidos en sesiones anteriores	*Descodificar* *Interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*Desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*	

Tarea 2:

Objetivos	*Resolución de sistemas mediante el método de reducción.*	
Tipos de contenidos	*Resolución de sistemas mediante el método de reducción.*	
Sistemas de representación	*Simbólico*	
Situación/Contexto	*Científico*	
C.D Competencias (complejidad)	*PR(Reproducción)*	*LS(Repr)*
	Emplear conceptos ya aprendidos en sesiones anteriores.	*Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*Desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*	

Tarea 3:

Objetivos	*Expresar en sistemas de ecuaciones enunciados sencillos y viceversa.*		
Tipos de contenidos	*Identidades notables.* *Fórmula del perímetro* *Razonamiento figurativo (R).*		
Sistemas de representación	*Verbal, simbólico, gráfico*		
Situación/Contexto	*Científico*		
C.D Competencias **(Complejidad)**	*PR(conex)*	*C(conex)*	*R(conex)*
	Formular preguntas simples y comprender el tipo de respuesta	*Saber expresarse oralmente y por escrito explicando asuntos que implican relaciones sencillas.*	*Interpretar formas de representación más o menos familiares de objetos matemáticos.*
Tipo de secuencia de aprendizaje	*De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.*		

SESIÓN 6 Tarea 1:

Objetivos	*Comprender y encontrar la incógnita de la que queremos averiguar su valor.* *Traducir a lenguaje algebraico una expresión verbal.* *Resolver dicha expresión verbal.* *Interpretar el resultado*	
Tipos de contenidos	*Escritura y lectura de expresiones algebraicas(D)* *Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.(D)* *Resolución de una ecuación.* *Interpretación del resultado.*	
Sistemas de representación	*Verbal y simbólico*	
Situación/Contexto	*Vida cotidiana.*	
C.D Competencias **(complejidad)**	*PR(Reproducción)*	*LS(Reproducción)* *Comunicar*
	Comprender y emplear conceptos ya aprendidos en las clases anteriores	*Descodificar* *Interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario.*
Tipo de secuencia **de aprendizaje**	*De análisis de conocimientos previos*	