REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio 2014
páginas 149-153

www.fisem.org/web/union

Ideas para enseñar:

El concepto de límite de Cauchy, el cine, la tv y la mecánica newtoniana

Oscar A. González Chong, Marister Lopetegui Canel, Sandra Madan Valdés

Fecha de recepción: 8/03/2013
Fecha de aceptación: 5/02//14

Resumen	El trabajo es una propuesta de introducir el concepto de límite de una función de una variable real formulado por Cauchy apoyados en comparaciones con el cine, la tv y la mecánica newtoniana, en cuanto a su visualización **Palabras clave**: Cauchy, límite de una función, mecánica newtoniana.
Abstract	This paper is a proposal to introduce the concept of a function limit in a variable, enunciated by Cauchy, supported by comparisons with TV, movie and Newtonian mechanics regarding its visualization. **Keywords**: Cauchy, limit of a function, Newtonian mechanism.
Resumo	O trabalho é uma proposta de introduzir o conceito de limite de uma função de uma variável real formulado por Cauchy apoiados em comparações com o cinema, a tv e a mecânica newtoniana, quanto a sua visualização. **Palavras chave:** Cauchy, limite de uma função, mecânica newtoniana.

1. Introducción

Cuando impartimos las asignaturas de cálculo diferencial e integral a estudiantes de los primeros años de la mayoría de las carreras universitarias enfrentamos las dificultades en la comprensión y aplicación del concepto básico de límite de Cauchy, sobre el cual se construye todo el cálculo.

Hoy con los avances de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones y su aplicación a la enseñanza de la Matemática, sobre todo las experiencias adquiridas en la visualización de conceptos, podemos pensar en usarlas en una visualización del concepto de límite apoyándonos en comparaciones con el cine, la televisión y la mecánica newtoniana. Surgen rápidamente las preguntas

- ¿En que se parecen el cine y la televisión con el concepto de límite de Cauchy?
- ¿Qué relación existe entre la mecánica newtoniana y el concepto de límite de Cauchy?
- ¿Qué relación existe entre el cine, la tv y la mecánica newtoniana?

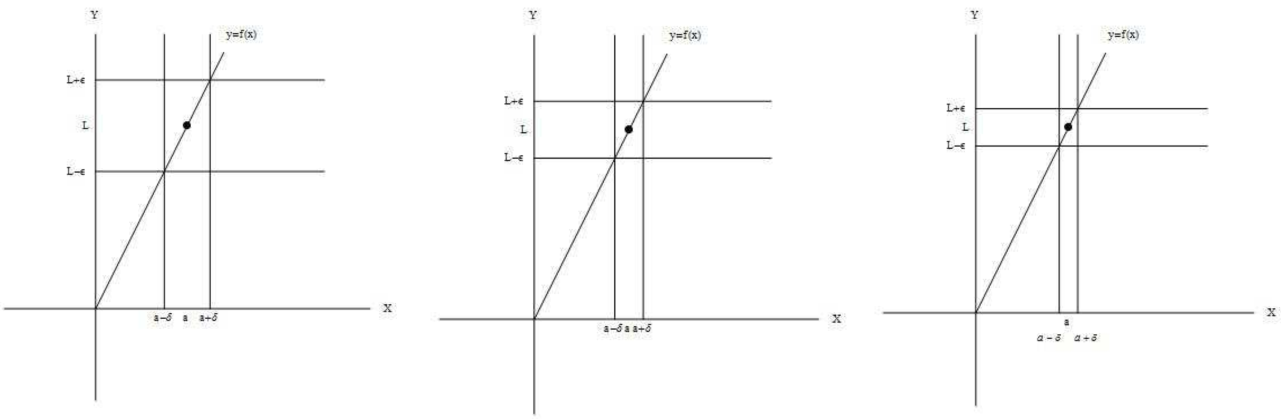
Las diferencias del movimiento en el cine y la tv con la mecánica newtoniana

La sensación de movimiento se logra en el cine y la televisión como una secuencia de fotos o como llaman también de cuadros por segundo, el cine es de 24 cuadros por segundo, la televisión en dependencia de la norma si es NTSC es de 30 cuadros por segundo y la N Pal de 25, es decir se logra el movimiento como una secuencia de reposos (fotos).Podemos decir que en el cine, la tv y en general en el video se logra el movimiento a través del reposo.

El punto de partida de Newton en su mecánica clásica es contrario, con su primera ley determina que un cuerpo se encuentra en estado de reposo cuando su velocidad es cero, es decir define el reposo a través del movimiento con velocidad cero.

El concepto de límite de Cauchy antecesor del cine.

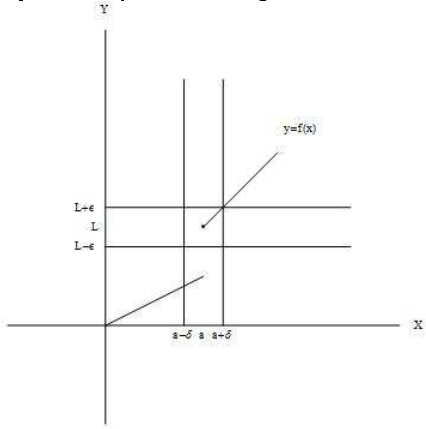
Cauchy define rigorosamente el concepto de límite de una función de una variable real y=f(x), cuando determina su límite como L (valor al que se aproxima) cuando la variable independiente(x) se aproxima de un valor(a), si para cualquier franja horizontal con centro en L de ancho 2ε existe la correspondiente vertical con centro en a de ancho 2δ que garantiza que el rectángulo intercepción de las mismas contiene dentro la gráfica próxima al centro, esto no es más que una secuencia de cuadros(de reposos) indicando el movimiento de aproximación a través de imágenes(reposos) cada vez menores. Lo mostramos a continuación en una secuencia de 3 cuadros solamente.



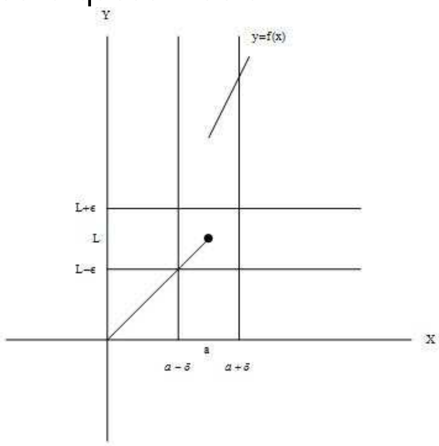
Por tanto el concepto de límite de Cauchy es el antecesor del cine, pues se define como una secuencia de reposos que indican el movimiento de aproximación de las imágenes de la función a un valor cuando su variable independiente se aproxima a un número, con la diferencia que los estados de reposo son cuadros semejantes al zoom digital dentro de una imagen alrededor de un punto central tan pequeño como queramos , donde cada cuadro sucesivo tendrá que contener completamente la gráfica de la función que corresponde a los valores próximos del número por muy pequeño que sea el zoom alrededor del punto centro.

Con este paralelo podemos cuestionarnos ¿Cuándo entonces puedo afirmar que una función no tiene límite cuando su variable independiente se aproxima de un valor determinado?

Vamos a ver en un ejemplo que no tiene límite la función cuando su variable independiente se aproxima a un valor, como se rompe la secuencia de cuadros que contienen la gráfica próxima y es imposible lograrlo.



Observe que para esa franja horizontal resulta imposible encontrar la correspondiente vertical que garantiza que toda la gráfica correspondiente a los puntos próximos del valor central (a) este dentro del cuadro intercepción. Los valores a la izquierda quedan fuera. Lo contrario ocurre para esta otra franja horizontal cuando los valores a la derecha quedan fuera.

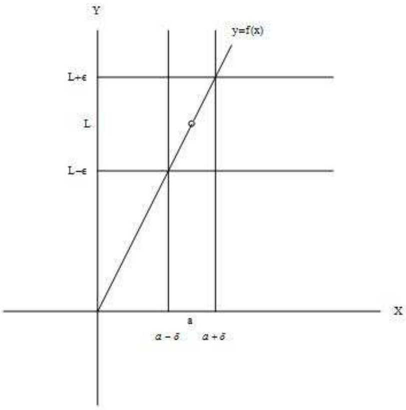


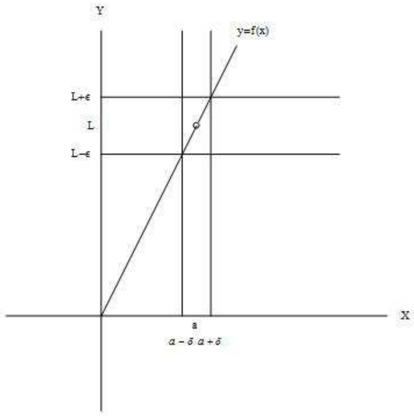
No se puede construir la película de imágenes (reposos) que contengan la gráfica de los puntos próximos.

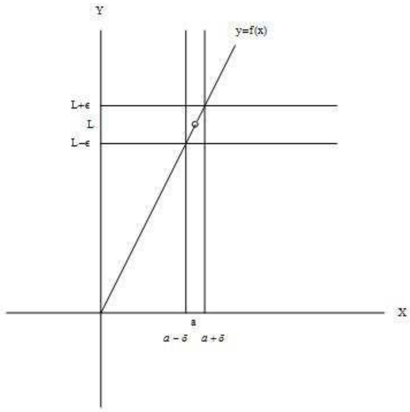
En estos ejemplos en el primero la función se aproxima a L cuando x se aproxima a a solo cuando lo hace por la derecha (para $x > a$) y en el segundo se aproxima a L cuando x se aproxima a a solo cuando lo hace por la izquierda (para $x< a$), podemos entonces definir los límites laterales derecho e izquierdo. También podemos decir que una función tiene límite en un punto cuando sus límites laterales son iguales.

Aprovechamos la situación para comenzar hablar de la continuidad de la función, en este caso se dice que es discontinua en el punto $x= a$.

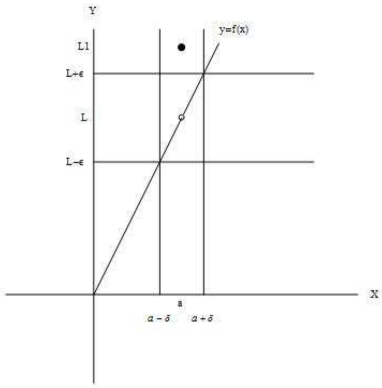
Ahora podemos empezar hablar de un detalle fundamental en el concepto de límite definido por Cauchy, donde no importa si la función está definida en el punto $x= a$, solo en su vecindad, por eso aprovechamos y vemos que la película puede ser construida en caso de tener un agujero en el punto central de la misma, lo importante es que la gráfica de los puntos próximos tiene que siempre estar dentro del rectángulo intercepción de las franjas horizontal y vertical y lo mostramos gráficamente en una secuencia de 3 cuadros.







Es evidente que la función $f\,(x)$ no es continua en el punto $x = a$ donde no está definida y podemos concluir que para la continuidad en el punto no es suficiente la existencia del límite en el punto, ni tampoco que este definida independientemente, como es el caso siguiente.



Donde está definida en x=a, $f(a)$=L1 y no es continua en a, por tanto concluiríamos que es necesario que su límite cuando se aproxima x a a, sea la propia imagen de la función en x=a.

Después de una visualización del concepto de límite de Cauchy el estudiante estará en condiciones de pasar a un trabajo numérico con el concepto (cuantificación de la aproximación cuadro a cuadro) encontrar para determinado valor de ε semi-ancho de la franja horizontal si existe el correspondiente semi-ancho δ de la franja vertical que garantice que la gráfica de los puntos próximos este contenida en el rectángulo intercepción de estas. Podemos plantear preguntas tipo (Stewart, p.112) ¿Qué tan cerca de a debe estar x para que $f(x)$ diste de L una distancia menor qué ε? Esta pregunta sería en ejemplos concretos con valores de ε e implicaría con trabajo de inecuaciones modulares encontrar el δ.

Aprovechando un ejemplo fácil de calcular podemos cambiar para otro ε la pregunta y entonces en un proceso inductivo llegar a que existe una proporción fija entre ε y el δ, independiente de los valores numéricos de cada uno .El estudiante estaría en condiciones de crecer a una aproximación analítica del concepto de límite de Cauchy (Stewart, p. 113), es decir:

$$\underset{x \to a}{Lim} f(x) = L$$

Si para cada número ε > 0 hay un correspondiente δ > 0 tal que | $f(x)$ - L|<ε siempre que 0 < | x - a | < δ

La solución de algunos ejemplos analíticamente (Stewart, 2002) daría al estudiante la posibilidad de crecer en el conocimiento del concepto de límite. El cálculo de límites por esta vía resulta complicado, por fortuna fueron demostradas leyes sobre los límites que nos permiten calcularlos sin recurrir a su definición. El concepto de límite de Cauchy estaba implícito en sus escritos, donde llamaba a los números pequeños ε, δ y fue formulado como lo definimos hoy por Karl Weiertrass (Stewart, p. 117). Si Newton definió el reposo en su mecánica como movimiento con velocidad cero, Cauchy definió el límite como una secuencia de reposos, es decir define el movimiento a partir del reposo, lo que en el cine y la tv está presente también.

Conclusiones

Utilizar las analogías y diferencias entre el cine, la tv, la mecánica newtoniana para visualizar inicialmente el concepto de límite de Cauchy garantiza una motivación del estudiante, al mismo tiempo aprovechamos sus conocimientos previos sobre estos temas. Si combinamos estas ideas en la producción de páginas web interactivas para la familiarización en la etapa inicial, podemos esperar mejores resultados en el aprendizaje del concepto.

Bibliografía

Newton, I. (1941). *Philosophie Naturalis Principia. Mathematica. Burndy* Library. London.

Rocha, A., Bianchini,W.(2002): *Aprendiendo Cálculo com Maple*, LTCeditora, Río de Janeiro.

Stewart,J. (2002): *Cálculo.Transcendentes tempranas*,cuarta edición. Thomson Learning, Mexico.

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/1/definition.2/index.html. Consultada el 6 de octubre del 2012.

Oscar Antonio González Chong. Licenciado en Matemática desde el año 1979, Doctor en ciencias Matemáticas desde el año 1989.Se desempeña como profesor del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Río. **oscar@mat.upr.edu.cu**

Marister Lopetegui Canel. Licenciada en Educación Matemática desde el año 1991. Master en Nuevas Tecnologías para la Educación. Profesora del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Río **marister@mat.upr.edu.cu**

Sandra Madan Valdés.Licenciada en Educación Matemática desde el año 1981. Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería. Se desempeña como profesora del departamento de matemática e la Universidad de Pinar del Río**.** **zmadan@mat.upr.edu.cu**