LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES

Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

FACULTAD DE MATEMÁTICAS - UAG / CINVESTAV-IPN

marcela_fe@yahoo.com.mx

Resumen. *Desde una visión socioepistemológica, el entremezcle de prácticas sociales y representaciones sociales que las mismas generan, establecen un diálogo diferente al discurso escolar imperante. En este reporte, reflexionaremos sobre los argumentos que los alumnos de licenciatura en matemáticas utilizaron, ante la construcción geométrica de las funciones cuadrática y logarítmica utilizando el ambiente de geometría dinámica, para reconocer y describir las funciones mencionadas. Este trabajo se ha desarrollado utilizando la ingeniería didáctica como metodología de investigación.*

Palabras Clave: curvas - curva logarítmica – covariación - geometría dinámica

Introducción

Nos interesa en este artículo discutir el papel que juegan los argumentos geométricos en la exploración de algunas funciones escolares estudiadas en Cálculo respecto a la construcción social del conocimiento, tomando cierta distancia de las prácticas escolares que hoy por hoy observamos en los salones de clases.

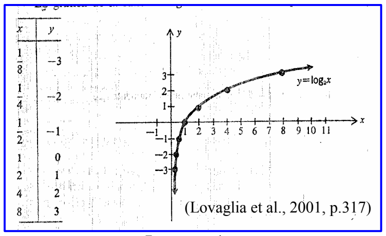
En general, hablar de función implica entrar en un vasto campo de reportes e ideas, de explicaciones y preguntas, que parece inagotable. Al realizar un estado de arte sobre el tema, uno observa que persiste el distanciamiento entre aquellos investigadores que buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función (Dubinsky & MacDonald, 2003; Carlson, *et al*, 2002) y, aquellos como Ferrari (2007), Martínez-Sierra (2006) y Montiel (2006), entre otros, que reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas de las funciones.

Particularmente, y dentro de la primera vertiente de pensamiento, Mariotti, *et al*. (2003) consideran que en el ambiente generado por la geometría dinámica se puede estudiar función mediante la idea de variación vinculada con el movimiento ya que los puntos pueden ser arrastrados por la pantalla y representar las variables básicas. Así, de la combinación de observación y acción surge la idea de covariación, que es experimentada por la coordinación entre ojos y manos. Otros, como Cantoral y Montiel (2001) consideran a la visualización como un mecanismo para la construcción social del conocimiento y por tanto, de formación de significados matemáticos fortaleciendo el segundo mecanismo mencionado, donde reconocer la naturaleza de cada función es necesario para enriquecer el universo gráfico de los estudiantes, lenguaje que puede discutirse desde las operaciones gráficas.

Desde nuestra visión socioepistemológica, cobran vida varios elementos que han caído en desuso ante cambios de paradigmas; tal el caso de la irrupción, en el siglo XVIII, del lenguaje algebraico-analítico como soporte del rigor del lenguaje matemático apoyado principalmente por Euler y Cauchy, dejando en segundo plano los modelos geométricos y numéricos. Esta desvinculación de los argumentos que podrían enriquecer el acercamiento a la noción de función se evidencia también en el discurso matemático escolar actual donde, en la mayoría de los textos de Cálculo, la presentación de elementos gráficos es netamente ostensiva.

Brisas sobre el discurso matemático escolar actual

Al analizar la forma de encarar la construcción gráfica dentro del contexto general de libros escolares, fundamentalmente de Cálculo para Bachillerato y Licenciatura, es interesante observar cómo se reafirman las presentaciones ostensivas de ciertas funciones. Se percibe en ellos, una evolución hacia el uso de elementos del lenguaje visual, tanto icónico como gráfico cartesiano. Irrumpen efectivamente una exuberancia de imágenes y colores que los distinguen de los clásicos textos en blanco y negro del siglo pasado.



(Lovaglia et al., 2001, p.317)

Imagen 1

En general, se reflexiona sobre las gráficas de las funciones en los primeros capítulos ya que, con mayor o menor profusión de acuerdo al autor, se constituyen en un elemento complementario de cada noción presentada, aunque, en realidad, sin ser un argumento de discusión de las mismas, sino, en la mayoría de los casos, como “interpretaciones geométricas” de los conceptos.

En la mayoría de este tipo de textos, se inicia la discusión de cómo trazar gráficas mediante el trazado de puntos (Ver Imagen 1). La secuencia que establecen para tal fin es:

- ***Paso 1****: Obtener las coordenadas de unos cuantos puntos que satisfagan la ecuación.*
- ***Paso 2:*** *Construir la gráfica de esos puntos en el plano.*
- ***Paso 3:*** *Unir los puntos mediante una curva suave.*

(Purcell y Varberg, 1993, p. 33)

En las últimas ediciones esta estrategia es extendida con argumentos más globales como “traslación vertical y horizontal” mediante $y = f(x) + K$ o $y = f(x + K)$, además de “reflexión – expansión - contracción” con $y = -f(x)$ o $y = cf(x)$, aunque son poco retomados en el discurso posterior de los textos, quedando confinados en su primer o segundo capítulo.

En general, en cada iniciación al lenguaje gráfico escolar, nos apoyamos en los tres pasos mencionados, que genera total dependencia de la expresión analítica de la función. Efectivamente, conociéndola, podemos construir una tabla de valores, graficar los pares ordenados y luego trazar la curva. Esta dependencia también es fomentada por algunas herramientas tecnológicas como las calculadores graficadoras, o el software Derive, aunque nos permiten explorar exhaustivamente los movimientos mencionados arriba.

Cuando les preguntamos a varios estudiantes: ¿qué se requiere para graficar funciones?, durante el desarrollo de un curso de Didáctica de las Matemáticas (octavo semestre de Licenciatura), nos encontramos con una única respuesta: *fórmula – tabla – gráfico, sin eso no podemos graficar.*

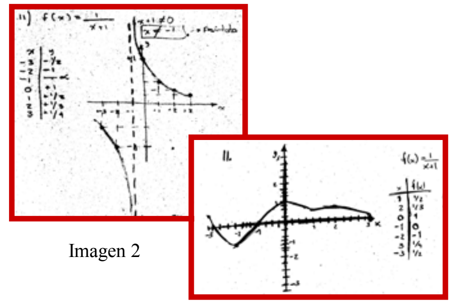


Imagen 2

Esta idea se observa también en algunas producciones de alumnos de ingreso a la licenciatura cuando se les solicitó que graficaran una función (ver Imagen 2).

Observamos en ellos el riguroso seguimiento de los pasos enseñados: *tabla – puntos – unión…* pero resultados muy distintos y nos preguntamos: ¿de qué se apropiaron realmente al repetir estas instrucciones? ¿cómo generar en los alumnos una actitud crítica a sus producciones? Pregunta que se intensifica cuando analizamos las producciones de alumnos de Ecuaciones diferenciales (segundo semestre de Ingeniería) ante la tarea de explorar con Derive los movimientos de ciertas funciones, particularmente la traslación $y = f(x) + K$ y argumentar sus respuestas. La conclusión a la que la mayoría confluye es: *sumarle una constante a la función hace que suba o baje;* o *la función corta al eje y más arriba cuando K es positiva y más abajo cuando K es negativa* (Ver Imagen 3). Pero no falta la extensión de este argumento al tratar con la función logarítmica (Ver Imagen 4), dando evidencia de la no construcción de argumentos que soporten la naturaleza de la misma.

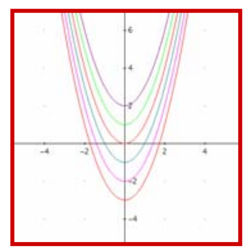
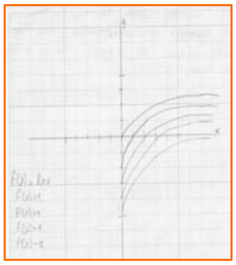


Imagen 3



Como se puede ver en la gráfica la función logaritmica tiene un comportamiento similar ala exponencial en cuanto ala forma, tambien al agregar una constante, ala función afecta su desplazamiento sobre el eje "y".

Imagen 4

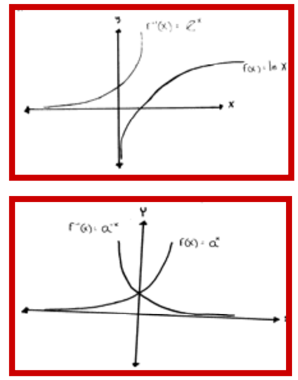


Imagen 5

Por otro lado, la mayoría de los textos discuten la función inversa desde la simetría geométrica de las funciones respecto a la recta $y = x$, siendo extendida en la mayoría de los alumnos a otros tipos de simetrías como la que evidencia la producción de un alumno (ver Imagen 5). Estas confusiones tienen su lógica quizás en los distintos sentidos que adoptan las palabras "inversa" y "recíproca" dentro y fuera de las matemáticas.

Efectivamente, la palabra "inversa" aparece en el discurso matemático escolar en distintos momentos como: la "función inversa" que nos remite a aquellas funciones que intercambian su dominio e imagen, la "proporción inversa" que nos informa que mientras un valor crece el otro decrece, o la utilizamos por allí como "al revés". Si exploramos un poco el uso de "recíproco", encontramos que designa a otro teorema cuya hipótesis es la tesis de un primer teorema y cuya tesis es la hipótesis del primero, ¿intercambio que nos lleva a la inversa? Por otro lado, se escribe $A^{-1}(x)$ como abreviatura de la función inversa de $A(x)$, y el signo A^{-1} también significa $1/A$, es decir, el recíproco de una función. Así, ¿la palabra recíproco nos lleva también a "invertir" con el mismo sentido de inverso? Podríamos seguir enumerando ejemplos del entremezcle escolar de estos términos, algunas veces utilizados como sinónimos y otras, como la que nos interesa para los logaritmos, con un sentido distinto, que los alejan. No es extraño entonces, hallar en los estudiantes esta no distinción entre ambas ideas, y observar que no se han apropiado de la noción de función, y particularmente, de la función logaritmo.

Brisas epistemológicas sobre curva

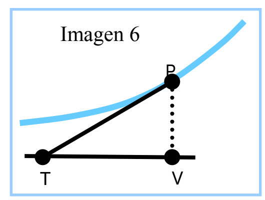
En la antigüedad se hablaba de curvas mecánicas como aquellas que requieren, para ser descritas, alguna especie de instrumento, tales como las rectas y las circunferencias, pues éstas no pueden trazarse sin usar la regla y el compás. Descartes (1647) menciona que en esta época se desarrollaron interesantes ideas respecto a dos postulados, aquel que establecieron respecto a que *una línea recta puede trazarse entre dos puntos cualesquiera*, y aquel que decía que *alrededor de un centro dado puede describirse una circunferencia que pase a través de un punto*, ambos enriquecidos al introducir la proposición de que un plano dado puede cortar a cualquier cono, surgiendo así las cónicas.

Efectivamente, Descartes al inicio del Libro II de su *Geomètrie* (1647), que titula: *Sobre la naturaleza de las líneas curvas* menciona que: *… Los antiguos estaban familiarizados con el hecho de que los problemas de la geometría pueden dividirse en tres clases, a saber, problemas planos, sólidos y lineales. Esto equivale a decir que algunos problemas requieren sólo de circunferencias y líneas rectas para su construcción, mientras que otros requieren de una sección cónica y aún otros requieren curvas más complejas. Estoy sorprendido, sin embargo, de que no hayan ido más allá, y distinguido entre distintos grados de estas curvas más complejas, y no veo por qué llamaron a las últimas mecánicas, en lugar de geométricas* (*íbidem*, p. 315).

De la mano de Descartes así como otros científicos como Viète y Fermat, comienza a consolidarse una nueva manera de mirar a las curvas. Descartes en particular, reflexiona sobre que: *… si pensamos en la geometría como la ciencia que provee un conocimiento general de la medida de todos los cuerpos, entonces ya no tenemos derecho a excluir las curvas más complejas que las más sencillas, con tal de que puedan concebirse como descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos…* (*íbidem* p. 316).

Comienza a jugar aquí la idea de describir, pensando en visualizar, a las curvas como movimientos continuos distanciándose cada vez más de las ideas estáticas de los griegos. Esta necesidad de estudiar las curvas y de generar métodos o herramientas para describirlas se refleja también en varios trabajos discutidos durante el siglo XVII. Fermat por ejemplo, publica en 1637 la obra titulada: *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* donde declara su búsqueda de un método universal para el estudio de las curvas es decir, establece que … *Siempre que una ecuación contenga dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar geométrico, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea, recta o curva* (Ruiz, 1990).

En este sentido, los antiguos consideraban "mecánicas" a las curvas que construían mediante regla y compás, pero Descartes propone llamarlas curvas geométricas, al mirarlas como aquellas curvas que: "…*admiten una medición exacta y precisa, deben tener una relación definida con todos los puntos de una línea recta, y que esta relación debe expresarse por medio de una sola ecuación…*" (Descartes, 1647, Libro II, p. 319) cambiando así, como otros científicos del siglo XVII, la manera de estudiar las curvas.



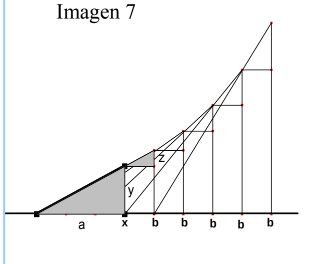
Debeaune (1601-1652), discípulo de Descartes y luego de leer su Geometría, propone a la comunidad de científicos un problema geométrico: *encontrar una curva* $y(x)$ *tal que, para cada punto P, la distancia entre V y T, puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales.* Problema que escapa de las posibilidades que les daban las curvas geométricas de esta época ya que sumando o multiplicando líneas o circunferencias no les proporcionaban una solución interesante.

Según Hairer y Wanner (1998) este problema permanece sin resolución, hasta que Leibniz en 1684, casi 50 años más tarde, propone una manera de construir esta curva. Plantea entonces, que dados dos puntos, x y y, para hallar la curva solicitada basta incrementar x por pequeños incrementos de b, de modo que y incremente (debido a la semejanza de dos

Red Cimates

triángulos) por $\frac{yb}{a}$. Repitiendo este proceso se obtiene las siguientes sucesiones de valores para las ordenadas: y, $\left(1+\frac{b}{a}\right)y$ $\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y$, ... y, para las abscisas: *x, x+b, x+2b, x+3b,etc.*

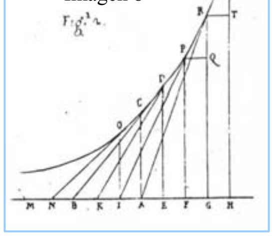
Imagen 7



Aparece así como respuesta a este cuestionamiento la *curva logarítmica*, aquella conocida como la relación entre una progresión aritmética y otra geométrica. Efectivamente, Napier (1614) en su obra titulada *A description of the admirable table of logarithms* pone en juego estas dos progresiones en la definición que propone: *El logaritmo de un seno dado es aquel número que se* ***incrementa aritméticamente*** *con velocidad constante e igual a aquella con la cual el radio empieza a* ***decrecer geométricamente, en el mismo tiempo*** *que el radio decrece hacia el seno dado* (Cantoral *et al*., 1983) y por tanto la necesidad de construir la idea de covariación.

En esta ebullición de ideas, Agnesi (1748) retoma la construcción propuesta por Leibniz (ver Imagen 8), y continúa la discusión de la curva logarítmica partiendo de la construcción geométrica para obtener la expresión algebraica, mediante semejanza de triángulos y extendiendo las ideas a los diferenciales. Para ello, traza dos rectas PQ y RT, llamando "*a*" al segmento NI, "*dx*" a cada división de la recta MH, por ejemplo GH=*dx* y las ordenadas GR=*y,* y TS=*dy*. Además RT= GH=*dx* y AG es "*a*" por similitud de los triángulos SRT y RGA, así $\frac{y}{a}::\frac{dy}{dx}$, por tanto $dx=\frac{ady}{y}$, es la expresión que representa la curva logarítmica.

Imagen 8



Por otro lado, Euler en el Libro II de su obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) inicia la discusión de la "*Teoría de las curvas*" desde los elementos que se requieren para estudiar las funciones, tanto algebraicos como gráficos. Utiliza las ideas básicas de variable cuya representación geométrica se asocia a una línea recta para comenzar a discutir las curvas. Es en el párrafo 15, donde presenta a las curvas *algebraicas* y *trascendentes*, ya que reconoce haber reducido su conocimiento de curvas a las funciones, pero que existen diferentes clases de curvas como lo hay en funciones. Considera que las curvas algebraicas son aquellas donde *la ordenada y es una función algebraica de la abscisa x*, es decir, aquellas que *se acostumbraban llamar geométricas.* En tanto que las curvas trascendentes son aquellas cuya naturaleza es expresada por una ecuación trascendente en *x* e *y*, es decir, *una ecuación en la cual y es igual a una función trascendente de x* (Euler, 1835, Libro II, párrafo 15, p. 8).

Euler presenta además, la definición de la curva logarítmica utilizando el argumento principal de la época, la relación entre progresiones, una aritmética y, la otra, geométrica.

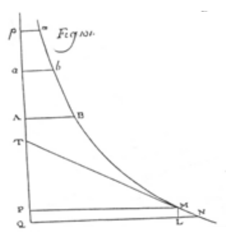
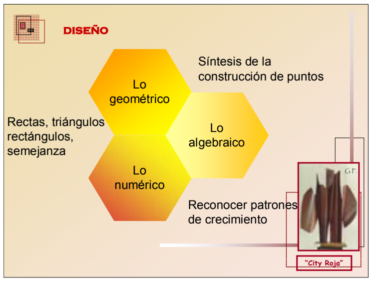


Imagen 9

Evidencia también, entre las figuras que presenta al final de su segundo volumen, los elementos importantes que para graficar curvas se requerían en ese entonces. Su escueta explicación, netamente algebraica, anuncia que *A* es el origen del eje de las abscisas (*AP*) siendo el segmento $AB = a$ su ordenada. Establece además que si se toma la abscisa $AP = x$, entonces la ordenada es $PM = y = ae^{\frac{x}{b}}$. Por tanto, menciona a continuación que $\log\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$, estableciendo que: "*aquí, la abscisa AP dividida por la constante b expresa el logaritmos de la razón* $\frac{PM}{AB}$" (Ver Imagen 9).

Vemos así, que el uso de la idea de covariación entre progresiones ha estado presente junto a las explicaciones de función desde el movimiento que se han ido desarrollando juntamente con lo que hoy conocemos como Cálculo, estudio de las variaciones.

Comentarios de la actividad matemática



Luego de reflexionar sobre los argumentos que apoyaron el desarrollo y consolidación de la idea de logaritmos como función, varios de ellos fuera del lenguaje matemático que hoy utilizamos y otros, directamente involucrados a la génesis del mismo que llevaran a la gestación de función en sí, decidimos articular en búsqueda de evidenciar que lo numérico, lo gráfico y lo algebraico como red de modelos entremezclados con las prácticas de referencia y sociales nos crean un ámbito de argumentación y por ende de construcción de un discurso que fortalecería el acercamiento a *lo logarítmico* en estudiantes de licenciatura.

Los argumentos gráficos que estamos explorando surgen de las ideas de Agnesi, utilizar la semejanza de triángulos para evidenciar la naturaleza de ciertas funciones. Sin embargo, no es éste el único argumento que nos interesa utilizar. Efectivamente, el uso de la semejanza de triángulos se fundamenta en la coordinación de dos patrones de crecimiento, regidos por progresiones aritméticas y geométricas. Si tomamos como argumento la covariación entre dos progresiones aritméticas, donde el carácter variacional está regido por la diferencia, estamos hablando de las *funciones lineales* y al extender el argumento a la diferencia de ordenadas (primera, segunda, etc) estamos hablando *funciones polinomiales*. Si en cambio lo hacemos entre una progresión aritmética y otra geométrica, donde el carácter variacional está regido por la razón, nos abocamos a explorar *funciones trascendentes,* particularmente la exponencial y logarítmica ya que las trigonométricas no siguen este patrón.

En el caso de este estudio, nos abocamos a discutir con alumnos de licenciatura dos funciones particulares, las que llamaremos curva cuadrática y logarítmica. Cada manera de construir se basa en el trazo de triángulos semejantes, su diferencia radica en el movimiento que se le imprime al punto de inicio de la construcción, así como en la partición de los ejes involucrados que depende del tipo de progresión que se convoque.

¿Qué nos interesa entonces? Percibir mediante la construcción mecánica de las curvas su naturaleza, es decir, reconocer las progresiones que se involucran en cada una al identificar patrones generados por distintos tipos de triángulos que surgen al trazar semirrectas con cierta inclinación y entrelazarlas con verticales u horizontales dependiendo de la curva.

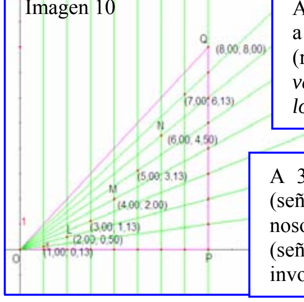
Por tanto, creemos necesario la construcción de una red de modelos, donde lo geométrico, lo numérico y lo algebraico, generen la plataforma que les permita, a los estudiantes y profesores, hablar de *lo logarítmico*.

Algunos argumentos estudiantiles

Al trabajar con alumnos de séptimo y octavo semestre de la Licenciatura en Matemáticas, área matemática educativa, encontramos una interesante creatividad entremezclada con una fragilidad argumentativa que nos dan pautas interesantes para el análisis de la red de modelos que generan al explorar las curvas que les presentamos.

Ante la construcción geométrica de una función cuadrática, tarea inicial de la actividad matemática, hallamos que cada alumno prioriza uno de los modelos, el numérico como en el caso 1, o el geométrico en el caso 2, pero sin perder de vista el íntimo entremezcle de ellos, es decir su red de modelos.

Imagen 10



A2*: Si vamos por los impares* (refiriéndose a las abscisas) *todos terminan en 13* (refiriéndose a los decimales en juego) *y si vamos por los pares, se alternan enteros y los que terminan en medios.*

A 3: *Mira, si acá nos movimos dos veces* (señala las abscisas en el triángulo que nosotros resaltamos) *acá también son dos* (señalando el número de semirrectas involucradas)…

Caso 1: Una pareja de estudiantes (A2 alumno y A3 alumna) constituyen un interesente equipo de trabajo ya que mientras uno decide explorar numéricamente, el otro se queda observando la construcción geométrica. En la hora de trabajo, generan varias construcciones utilizando distintos puntos de inicio, y en todos los casos no logran visualizar cómo extender la construcción fuera del triángulo inicial. En esta discusión encontramos un diálogo interesante donde comparten sus ideas (Ver Imagen 10). Concluye la discusión en la posibilidad de que toda curva así construida sea una parábola del tipo $y = kx^2$, argumento extraído del uso de la herramienta “cónica” y “coordenada o ecuación” de Cabri aplicándolas a varias de sus producciones.

Caso 2: nos da ejemplo de la necesidad de convencerse de lo que Cabri propone, explorando en primera instancia la parte numérica de la construcción para determinar un punto fuera del triángulo inicial para continuar con una exploración geométrica (Ver Imagen 11) sustentada por la construcción de círculos pasando luego a la búsqueda de la expresión analítica.

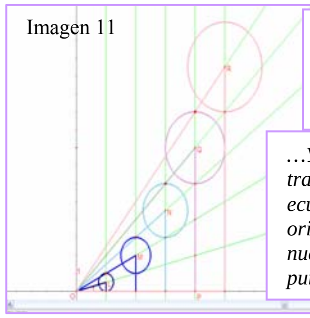


Imagen 11

Como observamos esta curva se comporta muy bonita y al tener varios puntos de la curva nos surgió la inquietud de saber con que curva estábamos tratando.

…Y así sucedió, la curva con la que estábamos tratando era la parábola, después calculamos su ecuación, se facilita por que tiene su vértice en el origen, tiene como eje un eje coordenado (el eje y en nuestro caso) y además contábamos con varios puntos de la misma.

Caso 3: Un equipo de trabajo conformado por dos alumnas y un alumno generan una producción interesante alrededor de la función logaritmo. Rápido perciben que se trata de una logarítmica pero no pueden dilucidar cómo determinarla apoyándose para eso en una página de Internet sobre esta noción. Entre la construcción geométrica, su tabla de valores y una exploración numérica de la misma, determinan la expresión analítica (Ver Imagen 12). Interesante es ver cómo comienzan a percibir la covariación en esta curva y la no extensión de los argumentos que funcionaron en la curva anterior.

Caso 4: dos estudiantes de octavo semestre luego de construir algunos puntos, rellenar la tabla de valores, responden rápidamente que el punto B no pertenecía a la cónica. Extendiendo el argumento de la construcción anterior, recurren a la herramienta “cónica” pues contaban con 5 puntos (Ver Imagen 13). Al solicitarles que construyan más puntos de

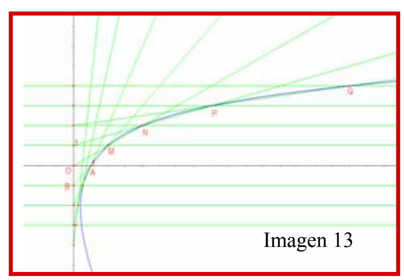


Imagen 13

la curva entre A y B, visualizan que la curva trazada se aleja de los puntos de la curva construida percibiendo que se trata de una función logarítmica.

A modo de conclusión

Este estudio, sustentado por la socioepistemología, nos permite observar que en general, los estudiantes que participaron en el estudio tienden a "creer" sin discutir: "*Cabri lo dice*", traspasando la responsabilidad de las respuestas a una herramienta técnica lo cual evidencia la necesidad de fomentar una visión crítica y a la argumentación colectiva e individual. Además, el diseño logra conflictuarlos al solicitarles argumentar sus respuestas. Perciben y viven la no extensión de argumentos entre funciones, es decir, aquellos que fueron valiosos en la función cuadrática no funcionan en la función logarítmica… lo que refuerza la hipótesis que es necesario reconocer la naturaleza de cada función tomándola desde la covariación. Iniciar la discusión, respecto a funciones particulares, con una construcción geométrica, resquebraja las concepciones escolares sobre graficarlas y conlleva a explorarlas de manera más integral. Consideramos entonces que la geometría dinámica nos proporciona un ambiente de discusión que genera argumentos particulares sobre covariación cuando se propicia la construcción de una red de modelos.

Bibliografía

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale (2 tomos). Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Hitt, F. & Rigo, M. (1983). *Historia de los conceptos de logaritmo y exponencial.* México: Cinvestav–IPN, Sección de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Edición especial CASIO, Prentice Hall.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Descartes, R. (1647). *La geometría de René Descartes. Español-Francés*. [Traduc. R. García – Cenlex-IPN]. Colección Clásicos de la Ciencia México: Limusa, Serie Matemáticas..

Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp.275-282). USA: Kluwer Academic Publishers.

Euler, L. (1835). *Introduction a l´analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique. (Trabajo original publicado en 1748).

Ferrari, M. (2007). *Construcción social del conocimiento matemático: La función logaritmo*. Memoria Predoctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Hairer, E. y Wanner, G. (1998). *Analysis by Its History. New York, USA:* New York, USA: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Lovaglia, F., Elemore, M. y Conway, D. (2001). *Álgebra*. México: Oxford.

Mariotti, M. A., Laborde, C. & Falcade, R. (2003). Function and graph in DGS environment. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 3* (pp. 237–244), Honolulu, USA. Disponible en: http://www.didmatcofin03.unimo.it/pubblicazioni/RR_mariotti.pdf. Consultada en octubre de 2007.

Martínez-Sierra, G. (2006) Los procesos de convención matemática constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En: G. Martinez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 745–751). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006

Montiel, G. (2006). *Construcción social de la función trigonométrica.* En: G. Martinez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 818–823). México: CLAME.

Napier, J. (1614). *A description of the admirable table of logarithms.* London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html. Consultada en abril de 2003.

Purcell, E. y Varberg, D. (1993). *Cálculo con geometría analítica.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Ruiz, A. (1990). La filosofía matemática cartesiana a través de León Brunschvicg. *Ciencias matemáticas*, N.1, Año 1, Vol. 1, 1990, UCR, San José, Costa Rica. Disponible en: www.cimm.ucr.ac.cr , consultado en Febrero de 2007.