REGRESANDO A LA GEOMETRÍA PARA CONSTRUIR FUNCIONES

Marcela Ferrari Escolá, Blanca Estela Nazario Vázquez, Carolina Sánchez Santamaría

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS - UAG

marcela_fe@yahoo.com.mx, will33303@hotmail.com, santamariacarolina3@yahoo.com.mx

Resumen. *En este artículo discutiremos nuestro acercamiento a una de las operaciones que sometemos a las funciones, la integración, incluso antes de que los estudiantes de Cálculo hayan construido con mayor robustez a éstas. Este trabajo ha sido desarrollado bajo la visión socioepistemológica apoyándonos en la ingeniería didáctica como metodología de investigación, y donde hemos escogido como herramienta de aprendizaje a la geometría dinámica.*

En este sentido, reflexionaremos sobre la construcción de algunas funciones escolares desde un regreso a elementos básicos de la geometría que, desde la irrupción de la visión euleriana en el siglo XVIII, ha sido relegada a un segundo plano en el estudio del Cálculo escolar.

Palabras Clave: áreas - curvas – covariación - geometría dinámica

Introducción

Se percibe hoy en nuestra disciplina, la matemática educativa, la necesidad de desarrollar investigaciones en torno a la construcción de conocimiento matemático desde una perspectiva social. Algunos, como los *socioconstructivistas*, que la miran desde estructuras mentales, donde la cohesión y la colaboración se entremezclan para dar lugar a la abstracción reflexiva y al fortalecimiento de estructuras. Otros, como los *socioculturales*, que dirigen la mirada a los contextos sociohistóricos y temporales donde las herramientas median entre el sujeto y el objeto, imbuidos en prácticas sociales. O aquellos, como los *interaccionistas*, que se enfocan en la generación de discursos desde la interacción y negociación de significados, donde la relación profesor-estudiante es el foco principal de análisis. O, por último los *socioepistemólogos*, aquellos que reconocen la necesidad de desarrollar investigaciones sistémicas en torno a la construcción social del conocimiento matemático.

En respuesta a esta necesidad, este grupo de investigación se ha preocupado desde hace unos años, por desarrollar un acercamiento teórico que contemple los cuatro polos que conciernen a esta problemática bajo el supuesto que no se puede comprender ni analizar los fenómenos didácticos sin estudiar a fondo el discurso matemático escolar y por tanto cuestionar los mecanismos de su transmisión; sin rever el devenir en objeto a ser enseñando ni la forma en que vive en la escuela, lo que conlleva a cuestionar los contenidos y significados que se proponen en las curricula; sin recabar y analizar las concepciones de los alumnos y docentes respecto a un contenido específico y por tanto sin tomar una postura respecto a qué significa aprender o apropiarse de una noción; por último, sin tener presente que la matemática es una actividad humana cultural e históricamente determinada.

En este artículo presentamos así, un breve estado de arte donde entremezclamos reflexiones sobre función, covariación e integración desde los reportes que varios investigadores han generado bajo distintas perspectivas, todos preocupados por aportar a la discusión entablada en la comunidad de matemáticos educativos alrededor del desarrollo del pensamiento funcional. Luego, compartiremos algunos argumentos que, desde ciertas producciones de estudiantes, nos permiten observar la fragilidad de la apropiación de ideas sobre integrar funciones, básicamente del Teorema Fundamental del Cálculo que evidencia la algoritmización y memorización ya reportada por Muñoz (2000), restringiendo nuestra mirada a la función logaritmo. Inmediatamente después, presentaremos algunos de los argumentos que soportan nuestras actividades matemáticas producto de un estudio epistemológico reportado en Ferrari (2001, 2007) y Sánchez (2007). Concluiremos este artículo desarrollando algunas de las ideas que rigen las actividades diseñadas donde nos interesa que los alumnos generen una red de modelos alrededor del área bajo las curvas propuestas, para generar otras. Es decir, nos interesa poner en juego la recreación de argumentos funcionales desde la exploración de la cuadratura. Consideramos así, que lo numérico, lo gráfico y lo algebraico como red de modelos entremezclados con las prácticas de referencia y sociales nos crean un ámbito de argumentación y por ende de construcción de un discurso.

Un breve estado de arte

Desde los primeros artículos, tales como el de Youschkevitech (1995) donde reflexiona sobre el desarrollo histórico de la función hasta el principio del siglo XIX o los aportes de investigadores como Vinner (1983) preocupados por explicar el aprendizaje de matemáticas, tomando a la función para ejemplificar sus ideas teóricas, *la función* es una de las nociones matemáticas que ha sido abordada desde distintas perspectivas y enfoques desde los primeros tiempos de nuestra disciplina, la matemática educativa, y que sigue siendo uno de los puntos de discusión en las problemáticas abordadas actualmente.

Hasta hoy, persiste el distanciamiento entre aquellos investigadores que buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función (Dubinsky & MacDonald, 2003; Carlson, et al 2002, etc.) y, aquellos como Ferrari (2007), Martínez-Sierra (2006) y Montiel (2006), entre otros, que reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas, de "la otredad" (Arrieta, 2003) de las funciones.

Por otro lado, varios investigadores se han interesado en el estudio de la covariación como una herramienta para la comprensión tanto de la noción de función (Confrey y Smith, 1995; Carlson et al., 2002) como de otros conceptos del Cálculo, tales como: la derivada (Zandieh, 2000), el teorema fundamental del Cálculo (Thompson, 1994) o el concepto de límite (Contrill et al, 1996; Carlson, *et al*., 2001).

Uno de los primeros trabajos reportados en este rumbo es el realizado por Thompson (1994), sobre límite y problemas de acumulación. Del análisis de los resultados recabados se concluye que parece que los estudiantes de cálculo de primer semestre fueron capaces de aplicar efectivamente sus habilidades de razonamiento covariacional en una variedad de contextos. Las imágenes que emergen en estos contextos sugieren que el razonamiento covariacional podría ser, utilizando el término de Tall, una "raíz cognitiva" para comprender y completar tareas específicas para límites y acumulación.

El "razonamiento covariacional" mencionado se define, en Carlson, Jacob & Larsen (2001), como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Estos investigadores coinciden con la visión de Saldanha y Thompson (1998) de que las imágenes de covariación son evolutivas y se usa el término "desarrollo" en el sentido de Piaget (1970), para significar que las imágenes de covariación pueden ser definidas por niveles los cuales emergen en una sucesión ordenada.

En opinión de Saldhana & Thompson (1998), la noción de covariación tiene que ver con la imagen mental de dos cantidades calculadas simultáneamente. Describen la comprensión de la covariación como "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos cantidades" (p. 298). En esta teoría, las imágenes de covariación son vistas como un desarrollo que involucra la coordinación de dos cantidades, es decir, la coordinación continua de ambas cantidades para la misma duración de tiempo.

En este sentido, seguimos las ideas de Confrey y Smith (1994, 1995) ya que explican la noción de covariación como aquella que vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable. Consideran también que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos.

Así, en este trabajo nos referiremos a la covariación como la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Nos interesa aquí que se perciba el tipo de crecimiento que sufre cada uno de los elementos que intervienen y aceptar la íntima relación que se establece entre ambos.

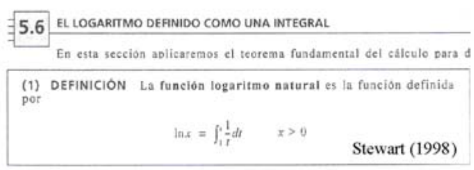
En este sentido, la covariación rige también a la integración en un segundo plano, que puede ser reflotado mediante la gestión de otros elementos. Sin embargo, si miramos algunos reportes sobre integración hallamos interesantes reflexiones sobre la complejidad de que los alumnos se apropien de tales ideas. Cordero (2005), por ejemplo, reporta que en general, tanto el profesor como el estudiante se inclinan más por describir la definición de la integral por medio de la “resta” $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$, en lugar de considerarla como el “límite de una suma”, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i$. Los que describen la definición por la “resta” no alcanzan a reconocer la relación que guardan las funciones f y $F : f = F'$, en el sentido del Teorema Fundamental del Cálculo; quienes la reconocen, la aceptan como comprobación del cálculo de la integral. Los profesores y estudiantes aprenden a “decir” que la “resta” calcula el área bajo la curva, pero no pueden explicar porqué, además el cálculo de primitivas, lo entienden como un procedimiento algebraico. En tanto que Muñoz (2000) comenta que se prioriza en la enseñanza procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de la ejercitación y de una manera separada de la parte conceptual.

Por otro lado, Dubinsky (1991, 1992), pone en juego otros acercamientos a la función ya que considera que comprender las funciones definidas mediante integrales indefinidas, como en el caso de los logaritmos, constituye un buen ejemplo de encapsulación con internalización. Estimar el área bajo una curva con sumas y pasaje al límite es, en la teoría APOE, un proceso. Los estudiantes que parecen comprender esto, frecuentemente tienen dificultades con el próximo paso, este es, entender que el producto encontrado es una función, algo que varía al modificar el parámetro considerado. Por tanto, se requiere de procesos de "alto nivel" para especificar una función dada por una integral indefinida lo cual puede explicar la complejidad de este proceso y las dificultades que el mismo acarrea a los estudiantes, conceptos éstos muy ligados a la comprensión y manejo del Teorema Fundamental del Cálculo.

Robutti (2003), en cambio, propone a alumnos de secundaria (entre 16 y 19 años) explorar el área bajo una hipérbola equilátera observando la riqueza de argumentación que dispara la actividad que propone una profesora en un ambiente tecnológico. Aparecen así, argumentos tales como: *...con más intervalos ... es posible dar una mejor aproximación a la curva con una línea que va a más ... microscópico, y luego ... más cerca* que apoyan la hipótesis de la autora respecto a que este tipo de acercamientos atiende la discontinuidad epistemológica, respecto al paso de finito al infinito, de discreto al continuo, marcado por la definición de la integral definida como el límite de sumas finitas.

Vemos así que este breve estado de arte nos permite observar la diversidad de reportes que sustentan las ideas desarrolladas en torno a la noción función. Entremezclamos entonces, en esta sección, tres elementos importantes, función-covariación-integración, que coexiten en el mundo covaricional, y bajo esta idea poco es lo que se reporta en la comunidad aterrizando todo esto, en nuestro trabajo, en la discusión de la función logaritmo, su naturaleza propia, conflictiva y compleja, a la que podemos mirar como el resultado de una cuadratura y viceversa al lado de otras funciones tales como las polinomiales.

Una breve revisión de textos escolares y de producciones estudiantiles


5.6 EL LOGARITMO DEFINIDO COMO UNA INTEGRAL

En esta sección aplicaremos el teorema fundamental del cálculo para d

(1) DEFINICIÓN La función logaritmo natural es la función definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

Stewart (1998)

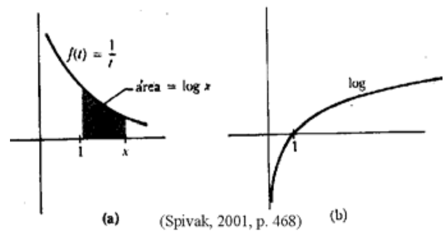
Uno de los clásicos argumentos escolares para dar ejemplo del uso del Teorema Fundamental del Cálculo es, sin más, el caso de los logaritmos.

Según Sánchez (2007), los autores (Stewart, 1998; Leithold, 1999; Spivak, 2001; Salas *et al*., 2002) coinciden en ubicar a la función logarítmica, después de haber visto los temas de función, límite, función continua, función inversa, derivada e integral (como antiderivada y área bajo la curva), incluido en este último tema, el teorema fundamental del cálculo.

En Stewart (1998) y Leithold (1999), antes de entrar al tema de integral definida, se presenta el tema de antiderivación, donde ésta es presentada como la operación inversa de la diferenciación. En este tema es presentado el cálculo de diversas antiderivadas, donde puede observarse esa parte operativa que muchas veces domina en la enseñanza del cálculo integral. En Stewart (1998) es presentado como un ejemplo encontrar la antiderivada de $f(x)=\frac{1}{x}$, esto ocurre antes de definir a la integral de la hipérbola equilátera como el logaritmo natural, anteriormente en el libro ya se había calculado la derivada de $\ln x$, situación que no ocurre en ninguno de los otros libros, porque ninguno de ellos da la derivada de $\ln x$ antes de definir a la integral de la hipérbola equilátera como el logaritmo natural. También se puede observar un catálogo de fórmulas que simplemente son aplicadas a ejercicios que no requieren más que de su utilización.

Los cuatro autores mencionados, parten del problema de calcular el área de una región para llegar a la definición de la integral definida, esta región esta limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa f, en su parte inferior por el eje x, a la izquierda por la recta $x=a$ y a la derecha por la recta $x=b$. Sin embargo la forma en la que abordan este problema difiere por un lado tenemos a

Salas (2002) y Spivak (2001) que utilizan el método de Darboux, que consiste en obtener la integral definida aproximándola cada vez más por arriba y por debajo con las sumas superiores e inferiores, posteriormente muestran las sumas de Riemman como un método alternativo y relacionado a su vez éste con el método de Darboux. Por otro lado, Stewart (1998) y Leithold (1999) utilizan sólo las sumas de Riemman para resolver este problema y así llegar a la definición de la integral definida.



(Spivak, 2001, p. 468)

El Teorema Fundamental del Cálculo reduce el problema de calcular la integral definida a través del método de Riemman, donde el cálculo del límite o las sumas suelen ser muy laboriosos e ingeniosos, convirtiéndolo y reduciendo este problema en el cálculo de antiderivadas. Sin embargo como muchos investigadores muestran, en la enseñanza del cálculo muchas veces se le da mayor importancia al cálculo de antiderivadas, olvidándose de la parte conceptual de la integral.

En Leithold (1999), Spivak (2001) y Salas (2002) la justificación de definir a la función logarítmica como área bajo la curva y abandonar la definición basada en los exponentes, es llenar el vacío dejado en álgebra, donde sólo se define a la función para los racionales, ignorando por completo a los irracionales $f(x) = a^x$; $f^{-1}(x) = \log_a x$

Por otro lado, entre los ejercicios propuestos en Salas (2002) y Stewart (1998) encontramos hallar el área bajo la curva en un segmento, proponiendo la solución a través de inscribir y circunscribir rectángulos de igual base. La partición propuesta es pequeña, ya que si fuera más grande la suma resultante no sería tan fácil de calcular ni con la ayuda de la calculadora.

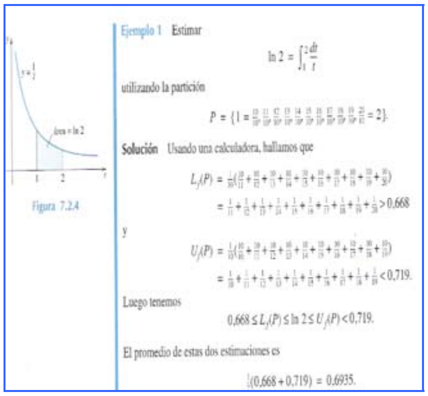


Figura 7.2.4

Ejemplo 1 Estimar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$$

utilizando la partición

$$P = \{1 = \tfrac{10}{10}, \tfrac{11}{10}, \tfrac{12}{10}, \tfrac{13}{10}, \tfrac{14}{10}, \tfrac{15}{10}, \tfrac{16}{10}, \tfrac{17}{10}, \tfrac{18}{10}, \tfrac{19}{10}, \tfrac{20}{10} = 2\}.$$

Solución Usando una calculadora, hallamos que

$$L_f(P) = \tfrac{1}{10}(\tfrac{10}{11} + \tfrac{10}{12} + \tfrac{10}{13} + \tfrac{10}{14} + \tfrac{10}{15} + \tfrac{10}{16} + \tfrac{10}{17} + \tfrac{10}{18} + \tfrac{10}{19} + \tfrac{10}{20})$$
$$= \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{20} > 0{,}668$$

y

$$U_f(P) = \tfrac{1}{10}(\tfrac{10}{10} + \tfrac{10}{11} + \tfrac{10}{12} + \tfrac{10}{13} + \tfrac{10}{14} + \tfrac{10}{15} + \tfrac{10}{16} + \tfrac{10}{17} + \tfrac{10}{18} + \tfrac{10}{19})$$
$$= \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{19} < 0{,}719.$$

Luego tenemos

$$0{,}668 \le L_f(P) \le \ln 2 \le U_f(P) < 0{,}719.$$

El promedio de estas dos estimaciones es

$$\tfrac{1}{2}(0{,}668 + 0{,}719) = 0{,}6935.$$

Para Sánchez (2007), se puede percibir en los textos analizados que en un primer momento el problema de buscar el área bajo la curva nos lleva a definir a la integral definida $\int_a^b f(t)dt$ como ese ***número*** que es considerado como el área buscada.

Posteriormente en segundo momento, establecer la relación que existe entre integración y diferenciación, se hace notar que si f es continua en $[a,b]$, entonces para cada x en $[a,b]$, la integral $\int_a^x f(t)dt$ es un ***número*** y es posible definir una ***función*** F en $[a,b]$ haciendo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, esta F es llamada la antiderivada de f o integral indefinida.

Como sabemos, los textos escolares generan un cierto discurso donde se entremezclan rigor y creatividad, síntesis y abstracciones que con mayor o menor explicitación llegan al salón de clases y por ende, a las argumentaciones de profesores y alumnos. Es interesante observar en las producciones de alumnos de segundo semestre de licenciatura la permanencia de ideas que funcionan en ciertos ámbitos pero que no se pueden extender a otros. Tal el caso de calcular el área bajo las funciones polinomiales del tipo $f(x) = x^n$.

La pregunta: *Sea* $\int x^n dx$. *Calcula la integral para n = -2, -1, 1, 2* generó varios argumentos diferentes. Algunos de los alumnos declararon que necesitaban las tablas de integrales para contestar esta pregunta pues no recordaban las fórmulas, en tanto que otros utilizaron la clásica fórmula trabajada en cursos anteriores sin mayor dificultad.

$$\int x^n \, dy = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{fórmula 1}$$

Sin embargo, la aplicación de esta "fórmula" generó desasosiego en varios de los estudiantes cuando se trataba de n = -1 Algunos, recurriendo a su memoria expresando, con mayor o menor desarrollo, que:

$n = -1$

$$\int x^{-1} dx = \ln(x) + C$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

aunque sin reparar en el valor absoluto requerido para una función cuyo dominio está sólo en los reales positivos. Pero otros, se enfrascaron en comprender que información les daba ese $x^0/0$ que aparecía en el reemplazo de los valores en la fórmula.

Efectivamente, algunos reconocen que en matemáticas esta operación no está definida pero otros, esbozaron como respuesta "*x*" evidenciando una menor abstracción.

$\int_1^e \ln x \, dx$ es igual a	0
	1
	e
	$1 - e$
¿por qué?	$e - 1$

$n = -1$

$$\int x^{-1} dx = X$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{-1+1}}{0}$$

$$\int x^{-1} dx = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} + c = 1/0 \; x^0 \; \therefore \text{ No está definido}$$

En otros casos, se puede observar con claridad, la confusión entre "*integrando*" y "*primitiva*", es decir, entre los elementos que juegan el papel de derivada o de integral. Al solicitarles en la actividad que determinen la respuesta y la argumenten, hallamos que varios de los alumnos no lograron determinar la opción correcta entre las dadas pues su exploración matemática fue: $\int_1^e \ln x dx = \left.\frac{1}{x}\right|_1^e = \frac{1}{e} - 1$.

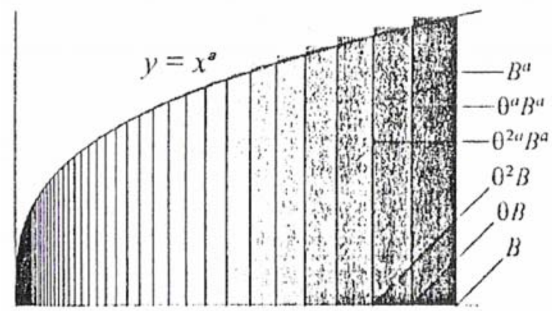
Pero al no ajustarse a las opciones, borraban la producción e intentaban de nuevo bajo la misma idea, dejando al final sólo expresada la fracción.

Observamos así, la no construcción de la función logaritmo como una integral. Refuerza así las expresiones de Cordero (2005) y Muñoz (2000) sobre la algoritmización del acercamiento a la integral que escolarmente se priorizan, complicada aquí con la emergencia de una función que acepta tres maneras diferentes de mirar: como exponente, como función inversa y como ésta, la respuesta de una integral. Además se evidencia la distancia que se produce respecto a argumentos covariacionales, es decir, a producir la emergencia de otro tipo de acercamientos.

Argumentos desde una Epistemología histórica de los logaritmos

En Ferrari (2001) establecíamos de acuerdo a (Mahoney, 1973) que ciertas exploraciones sobre cuadratura de curvas aparecen en el *Treatrise on Quadrature*, que Fermat publica en 1658. Aquí explica su método y vuelca sus resultados respecto a la cuadratura de parábolas de la forma $y^q = kx^p$ e hipérbolas del tipo $x^p y^q = k$, con excepción de la hipérbola rectangular.

En realidad, su método es una extensión de la aplicabilidad del método arquimediano a segmentos infinitos, en este caso, la división del eje *x* en un número infinito de segmentos de longitud finita, y su sustento se halla en el método de exhausión. Su ingenio le hace dividir el eje *x* con segmentos cuyas longitudes conforman una progresión geométrica, y determina que la cuadratura de la parábola $y^2 = kx$ es directamente transferible a las curvas de la forma $y^q = kx^p$ con p y q enteros. Tomando p como media proporcional de la división del eje llega al resultado general que el segmento parabólico es al rectángulo que lo contiene, como $\frac{q}{p+q}$.



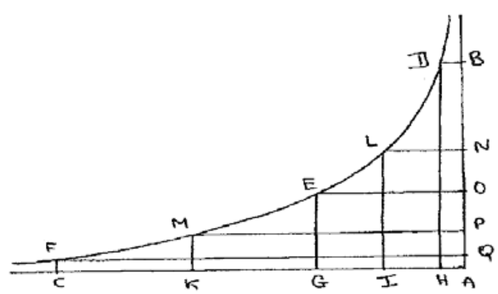
Luego, generaliza para las hipérbolas: si $x^p y^q = k$ entonces el área de la porción de hipérbola desde la ordenada y_0 es al rectángulo $x_0 y_0$ como $\frac{q}{p-q}$, resultado no aplicable a la hipérbola $xy = k$ pues en este caso $p = q = 1$ y la expresión anterior quedaría como $\frac{1}{0}$ lo cual carece de sentido. La vinculación entre la función logaritmo natural y la hipérbola rectangular $xy = 1$ aparece en una publicación de 1647 del jesuita Gregorie Saint Vincent.

Por su parte Le Goff (1989), considera que la obra de Saint Vincent sienta precedentes importantes para el posterior desarrollo del cálculo, por ejemplo, declara su intención de sistematizar el estudio del volumen de los sólidos, preparando el terreno para la aparición de las integrales dobles, desarrolla ideas de convergencia de series, es decir, respecto a la posibilidad de aproximar una suma infinita tanto como se desee. Así mismo, declara su deseo de hallar la cuadratura del segmento de hipérbola con la puesta en relación de dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, sin introducir la idea de logaritmo, lo cual será el aporte de su discípulo Sarasa en 1649 al responder las objeciones de Mersenne. Desarrolla estas ideas en el libro VI, proposición 109 estableciendo que:

> *"si les abscisses d'une hyperbole équilatere croissent en progression géométrique, les aires des surfaces decoupées entre l' hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes, croissent en progression arithmétique"* (Le Goff, 1989, p 199).

Efectivamente, Saint Vincent demuestra la cuadratura del círculo y de la hipérbola en su controvertido libro "*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*", escrito en 1630 y publicado en 1647. En él aparecen varias proposiciones que aportan ideas nuevas y originales, tales como, "*si las abscisas de una hipérbola equilátera crecen en progresión geométrica, las áreas de las superficies determinadas por las ordenadas correspondientes crecen en progresión aritmética*" (Burn, 2000). Por tanto, muestra que las medidas de las áreas de sectores bajo la hipérbola y sus abscisas forman un sistema logarítmico, aporte de Sarrasa que se analiza en Sánchez (2007).

Efectivamente, Saint Vincent trabaja en la demostración del área bajo la curva, entremezclando argumentos geométricos entre áreas y segmentos. Siguiendo las explicaciones, que encontramos en Sánchez (2007), de algunas proposiciones del trabajo de este matemático podemos entrever la importancia del uso de la covariación, en el siglo XVII, como argumento regidor de construcciones.



PROPOSICIÓN 108. Deje a AB *y* AC *ser las asíntotas de la hipérbola* DEF *. Deje a* DH *,* EG *y* FC *ser paralelas a la asíntota* AB *y estar en progresión geométrica. Digo que el área* $DHGE$ *es igual al área* $EGCF$.

Deje a LI *y* MK *ser medias proporcionales entre* $HD, EG, FC...$ donde llama medias proporcionales a aquellas proporciones de segmentos tales como las siguientes: *LI* es la media proporcional de *DH* y *EG* pues $\frac{LI}{DH}=\frac{EG}{LI}$; en tanto que $\frac{MK}{EG}=\frac{FC}{MK}$ nos informa que *MK* es la media proporcional de *EG* y *FC.*

Se observa además, que si se sigue realizando la partición de las abscisas manteniendo una progresión geométrica en los segmentos involucrados, las áreas bajo la curva entre dos asíntotas consecutivas tienen la misma área y por tanto, se genera una progresión aritmética en el área bajo la curva.

Vemos entonces que Saint Vincent, en su obra, demuestra de manera geométrica estas aseveraciones, rompiendo en su búsqueda dos ideas que aun coexistían en la época, la de tomar particiones no aritméticas y la de aceptar áreas bajo una curva ya que los griegos centraban su atención a áreas por encima de las mismas. Después de su muerte, Sarasa uno de sus discípulos ayuda en la publicación del conflictivo libro de Saint Vincent.

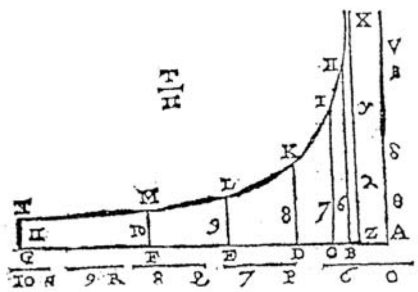
En este sentido, Sarasa publica un folleto donde aclara repetidamente que su mentor quería decir respecto a logaritmos: "*Cuando los términos de una progresión geométrica fueron emparejados con los términos de una progresión aritmética, en la secuencia, llamaron los términos de la progresión aritmética los logaritmos de los términos correspondientes de la progresión geométrica*". Esta descripción era la base de todas las construcciones de logaritmo, antes de 1649.

Aparecen también en su escrito, varias proposiciones de las cuales presentamos la siguiente aseveración:

> *Asuma otra vez la misma figura. Deje allí ser alguna secuencia de magnitudes* O, P, Q, R, S, T *en la proporción continua cuyos logaritmos son 6, 7, 8, 9, 10, etc. Estos*

números siempre exceden el uno al otro por la misma cantidad que se exige en la naturaleza de los logaritmos. Asumiendo otra vez una cierta hipérbola HIN *con asíntotas* AV *y* AG*, erija las líneas* $HB, IC, KD, LE, MF, NG,$ *etc. paralelas a la asíntota* AV *e igual a las líneas* O, P, Q, R, S, T *respectivamente, todo lo cual fácilmente es hecho por el primer corolario en este libro.*

Ahora por la proposición 3 en este libro, todas las áreas HC, CK, KE, EM, MG *son iguales. De ahí si la proporción* IC *a* HB *es seguida y se hace proporcional a* XZ *y por el primer corolario en este libro esto pertenece a la misma hipérbola, entonces el área* XB *será igual a las áreas* $HC, CK,$ *etc. De donde el área hiperbólica* XG *excede el área hiperbólica* HG *por la misma cantidad que el área hiperbólica* HG *excede el área hiperbólica* IG*. Otra vez el área hiperbólica* IG *excede el área* KG *por la misma cantidad, etc. con los demás.*

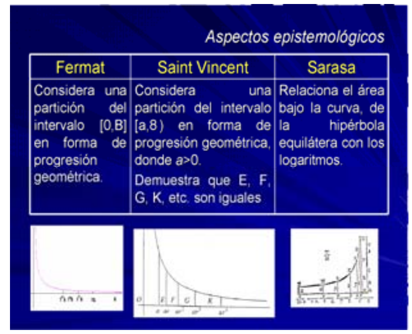


Por que en lugar de los números 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc. que son los logaritmos de las magnitudes O, P, Q, R, S, T*, podemos adoptar las cantidades hiperbólicas* HG, IG, KG, LG, MG *o mejor* MG, LG, KG, IG, HG *o si usted prefiere no mencionar la hipérbola, las cantidades (y de ahí las proporciones) exceden el uno al otro por un no menos la cantidad de igual como los números logarítmicos que habían sido asumidos. Por esta razón usted ve que la naturaleza de logaritmos con su continuación y exceso de términos es adaptada exactamente a la hipérbola, de modo que en lugar de los números, usted pueda tomar las partes de la hipérbola o la proporción dada de las líneas.*

(Sarraza, 1649; Scholion después de la proposición 3; ver Brun, 2001)

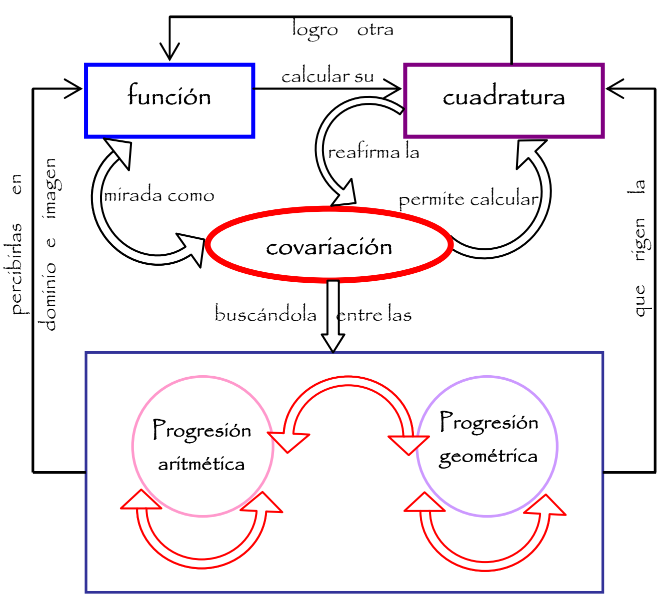
Sarasa, analizando los razonamientos de Saint Vincent relaciona el área bajo la curva de la hipérbola equilátera con los logaritmos. Sin embargo las hipérbolas de Sarasa no fueron definidas analíticamente, él no insistió en una base particular para sus logaritmos, tampoco escogió un valor para *log*1 y no se centró en lo que Euler más tarde llamó logaritmos naturales (Burn, 2001).

Vemos así, las producciones de tres científicos contemporáneos del siglo XVII, desafiados por encontrar el área bajo una curva, aquella que no admitía argumentos sustentados sólo por progresiones aritméticas. Efectivamente, los tres exploran con mayor o menor abstracción, particiones regidas por progresiones geométricas lo que genera nuevas argumentaciones que confluyen en reconocer un sistema logarítmico subyacente.



Así, de todas estas ideas surge una versión preliminar del Teorema Fundamental del Cálculo, aquel en el cual hablamos de primitivas e integrandos como sus derivadas. Sin embargo, rescatamos de esta visión epistemológica el ambiente covariacional de exploración que propusieron en su tiempo estos tres personajes.

Argumentos para actividades matemáticas



Síntesis de argumentos

Hasta este momento, hemos estado comentando tres elementos importantes en nuestra exploración, *función-covariación-integración.* En esta parte, nos interesará centrar el argumento de discusión en la íntima relación entre covariación y cuadratura, sin desconocer que la función estará también presente en ellos. Nos abocamos entonces, en esta sección, a evidenciar las decisiones tomadas para el diseño de las actividades matemáticas.

Si bien, estas actividades integran un conjunto de tres etapas, siendo ésta la última de aquellas con las que se intenta analizar la construcción de los logaritmos que pudiera emerger en un ambiente de geometría dinámica, no comentaremos en este trabajo las nociones que emergen en las actividades anteriores (ver Ferrari y Farfán, 2007)[60] que son el eje de esta actividad, sólo mencionaremos las ideas importantes para percibir el desarrollo de la actividad que puede discutirse sin problemas pues hemos realizado ajustes del diseño original al separarlo del cuerpo al que pertenece.

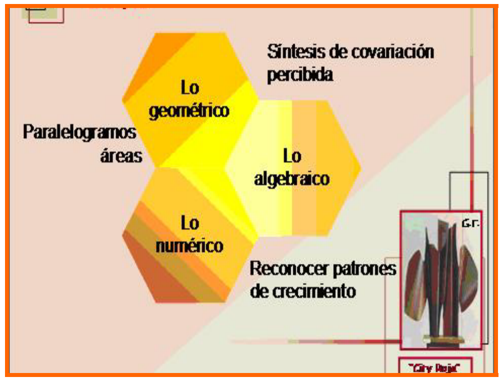
En párrafos anteriores hemos mencionado lo que para nosotros es covariación, aquella íntima relación entre dos patrones de variación particulares que dan indicios, en este trabajo, de la relación funcional que existe.

Efectivamente, si tomamos como argumento la covariación entre dos progresiones aritméticas, donde el carácter variacional está regido por la diferencia, estamos hablando de las *funciones polinomiales,* particularmente de la *función lineal* si podemos hallar en su dominio e imagen progresiones aritméticas. También las hallamos al extender el argumento a la diferencia de ordenadas (primera, segunda, etc.) donde estaríamos hablando de la *función cuadrática, cúbica, etc.* Si en cambio descubrimos una progresión aritmética y otra geométrica en su dominio e imagen, donde el carácter variacional esté regido por la razón, nos abocamos a explorar *funciones trascendentes,* particularmente la exponencial y logarítmica ya que las trigonométricas no siguen este patrón.

Del breve estado de arte que mencionáramos anteriormente, observamos que la mayoría de los investigadores que se apoyan en el ambiente de la geometría dinámica, recurren justamente a la posibilidad de movimiento de puntos y formas en la pantalla,

[60] Nos referimos al artículo que se encuentra en esta publicación bajo el título: *La geometría dinámica en la construcción de funciones.*

es decir, lo dinámico, donde herramientas como "traza" o "lugar geométrico" tienen un lugar preponderante.



En nuestro diseño, decidimos trabajar con esta herramienta tecnológica justamente por eso, esa herramienta que genera un ambiente de discusión que nos propone utilizarlo a veces y distanciarnos de él en otras, discutirle y discutirnos. No recurrimos en esta versión con la visión de que su potencialidad recae en "lo dinámico" en el sentido de arrastras cosas, sino en objetos que se construyen con elementos de la geometría clásica (paralelogramos, áreas, coordenadas) que necesitamos manipular para evidenciar la covariación atrapada en ellos.

Proponemos entonces, generar una red de modelos que den cuenta de la cuadratura de ciertas funciones, desde la covariación de progresiones aritméticas y geométricas. Elegimos así, lo geométrico, lo numérico y lo algebraico como un fundamental entrelace de coincidencias y particularidades, con las cuales robustecer nuestro acercamiento a la función logaritmo.

Decidimos también, discutir algunas funciones del tipo $f(x) = kx^n$, en donde k es constante y n un número real para explorar el área bajo ellas donde efectivamente encontraremos progresiones aritméticas asociadas a las curvas con $n > 0$ y un entremezcle de progresiones aritméticas y geométricas en otras curvas.

A manera de ejemplo de estas ideas, analizaremos sólo el caso 1, dejando al lector la exploración de los otros (***k = 1*** con ***n = 2*** y ***n = 1***)

Caso 1: ***k = 1*** **y** ***n = 1***

Vemos que no es más que la función lineal $f(x) = x$. Si construimos polígonos bajo esta recta tomando, por ejemplo, una progresión aritmética en las abscisas, es claro ver que entre el área de cada polígono se da también un progresión aritmética (*Véase Figura 1*).

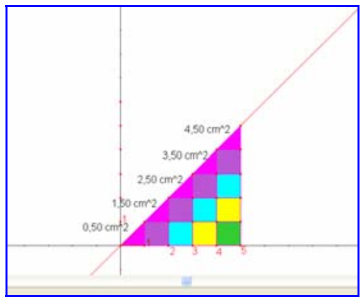


Figura 1

Con la simple inspección de estas ideas, podemos sospechar que estamos hablando de que la cuadratura de esta función es una función polinomial, ya que encontramos la covariación de dos progresiones aritméticas. ¿Pero entre qué variaciones?

Apoyándonos en el ambiente de la geometría dinámica, podemos escaparnos un poco de él y construir una tabla que nos permita analizar numéricamente ambas progresiones, siendo las columnas elegidas el *área bajo la curva* ($\sum A$); el *área* (A) al referirnos al área de cada paralelogramo formado por los segmentos que determina la partición realizada; y la *diferencia de áreas* (ΔA) como lo que sobrevive al superponer los paralelogramos (Ver la Tabla de Cuadratura).

x	$\sum A$	A	ΔA
0	**0**		
		1/2	
1	**½**		**1**
		3/2	
2	**2**		**1**
		5/2	
3	**9/2**		**1**
		7/2	
4	**8**		**1**
		9/2	
5	**25/2**		

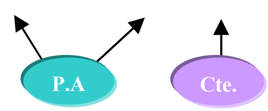


Tabla de Cuadratura

A partir de las progresiones aritméticas que se dan tanto en los valores de x como en el área A, además de tener una constante en la primera diferencia de las áreas, podemos concluir que la suma de las áreas bajo la curva es una *función cuadrática*.

En este caso es fácil calcular las áreas de los polígonos y con ellos cubrir completamente el área, debido a que se trata de una recta y su cálculo llega a ser trivial, por lo tanto, si queremos calcular el área, por ejemplo, de 0 a 3 (Ver Figura 2) podríamos utilizar los siguiente valores.

$$\sum_1^3 A_K = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

Como ya mencionábamos, tener sólo progresiones aritméticas involucradas y que la primera diferencia resulte una constante, nos da información de la cuadratura de la función lineal, que nos llevará a inducir que se trata de una función cuadrática.

Esto representa un tránsito fundamental, un entrelace entre lo geométrico, lo numérico y lo algebraico, aunque en las funciones que estudiamos, no necesariamente se llegue a la expresión real que define la integral, sino al menos reconozcan el tipo de función implicada.

En este caso, las imágenes se construyeron fácilmente con el software Cabri II Plus, al igual que utilizamos su herramienta "área" que rápidamente calcula los datos que requerimos. Así, debido a las coordenadas logradas para la cuadratura podemos concluir con la obtención de la expresión $F(x) = \frac{x^2}{2}$, luego de un trabajo algebraico.

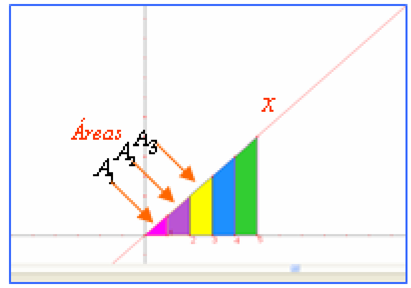


Figura 2

Otra pregunta que surge después de que hemos analizado las progresiones aritméticas, es ¿por qué no tomamos ahora progresiones geométricas en la exploración de las cuadraturas? tarea que le dejamos al lector.

Conclusiones

En este trabajo, hemos intentado comentar los avances de esta investigación desde elementos que nos proporciona la ingeniería didáctica que regula nuestro trabajo. Creímos importante iniciar el escrito evidenciando nuestra visión teórica, y contrastarla con otras mediante el reporte de un breve estado de arte respecto a función, covariación e integración, tres nociones que soportan el diseño de las actividades, así como algunos ejemplos de reflexiones sobre el uso del ambiente de geometría dinámica para el desarrollo de las mismas ya que optamos por generar nuestro ámbito de discusión en él.

Proponemos entonces movernos en el mundo covariacional, donde patrones de variación de particiones y cuadraturas se constituyen en el argumento principal de las actividades matemáticas. Particularmente nos interesa propiciar la discusión de lo logarítmico, su naturaleza propia, conflictiva y compleja, evidenciándolo desde el contraste con otras funciones y curvas. Consideramos importante "jugar" con varios modelos que los describen, pero fundamentalmente propiciar el entrelace de ellos.

Así, el eje de discusión que nos permite pensar en una red de modelos, y en la que estamos trabajando, es la *covariación logarítmica*. Recordemos que se trata, según Confrey y Smith (1995), de la relación entre patrones de crecimiento, para nosotros, la relación entre una sucesión geométrica y una aritmética sumergidas en el dominio e imagen de la función tratada y que nos permite hablar de logaritmos (Ferrari, 2004). Estamos hablando así, de la relación entre dos patrones de crecimientos distintos, uno generado por medio de la adición y el otro, mediante la multiplicación, es decir, los logaritmos surgen de la vinculación de un crecimiento aritmético y uno geométrico. En este sentido, el isomorfismo entre lo aditivo y lo multiplicativo es la razón de ser de los logaritmos.

El eje de este artículo ha descansado justamente en la covariación, pero en esta oportunidad dándole más peso al surgimiento de ella al explorar el área bajo ciertas curvas que preferimos llamar *cuadratura,* reminiscencias de los argumentos primigenios de la integración de funciones. Los argumentos que hemos presentado generan un rediseño del discurso matemático escolar al realzar la vinculación de áreas con funciones desde esta visión covariacional y al reconsiderar otras particiones que han caído en el desuso en el ámbito escolar, es decir, de la emergencia de una función desde un estudio de áreas particulares y su suma.

La geometría dinámica, genera un ambiente propicio para discutir el surgimiento de funciones ya que sus herramientas como: "expresión", "aplicar expresión", "triángulo", "polígono", "área", entre otras nos bastan para explorar visual y numéricamente los desafíos de determinar la cuadratura de las curvas trazadas.

De acuerdo al estudio realizado, (Ferrari, 2001 y 2007; Sánchez, 2007), sobre las herramientas generadas en el acercamiento epistemológico de Saint Vincent y Sarasa (ambos a mediado de 1600), así como los aportes de Fermat, para hallar la cuadratura de una curva se ponía en juego la relación entre progresiones. El trabajo numérico que involucra la construcción de tablas de valores que describan el área de trapecios determinados bajo la hipérbola equilátera, resulta interesante, pues pone en relieve nuevamente la covariación logarítmica, así como en las exploraciones algebraicas que conllevan la expresión que describe de manera general a la curva.

Este argumento es extendido en este trabajo a las funciones polinomiales que responden a la expresión $f(x)=kx^{n}$. Particularmente, proponemos estudiar la función lineal, la cuadrática y la hipérbola equilátera, donde se entremezclen las progresiones aritméticas y geométricas como esencia de las particiones utilizadas para la determinación de las áreas y por ende la cuadratura.

Muchos investigadores, entre ellos Arrieta (2003), proponen utilizar los argumentos numéricos para robustecer el acercamiento a ciertas funciones como parte de una red de modelos. En las polinomiales, basta explorar las tablas con las columnas (*x, y*, $\Delta y, \Delta\Delta y...$) para determinar el grado y orden de las curvas estudiadas. A la recta puede ser reconocida como la covariación de dos progresiones aritméticas, la cuadrática, requiere determinar que tanto *x* como la primera diferencia de las ordenadas son progresiones aritméticas para asegurar que se trata de ese tipo de funciones, lo mismo ocurre con la cúbica, aunque en este caso se debe calcular la segunda diferencia.

Si se extiende este argumento de columnas con las diferencias, hacia las funciones trascendentes, no encontramos ningún patrón interesante, sólo una repetición del patrón de crecimiento en el caso de las exponenciales, una disminución de las diferencias de las ordenadas en la logarítmica pero sólo nos da cierta información sobre su naturaleza, sucediendo algo similar con las trigonométricas. Entra en juego aquí, las progresiones geométricas sin dejar de considerarse las progresiones aritméticas, pues la covariación entre ambas permiten la emergencia de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Vemos entonces que en este trabajo entremezclando cuadraturas, hoy conocidas como integrales, con el reconocimiento de la covariación generada en su determinación evidenciamos la naturaleza de ciertas funciones quedando en segundo plano la operatoriedad puesta en juego. Buscamos así en este reporte, robustecer la construcción de lo logarítmico reconociendo las prácticas sociales y de referencia que han dado pie a ciertas herramientas que hiladas con herramientas técnicas como Cabri, generan un nuevo ambiente de discusión para ciertas funciones y por tanto de argumentación distante del discurso matemático escolar imperante.

Bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Burn, B. (2000). Gregory of St Vincent and the rectangular hyperbola. *The Mathematical Gazette* 84(501). 480-485.

Burn, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica* 28. 1-17.

Carlson, M., Larsen, S. & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En: R. Speiser, C. Maher y C. Walter (Eds.), *Proccedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Intenational Grop for the Psychology of Mathematics Education 1*(pp. 145-153), Snowbird, UT: PME-NA.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Estudies in Mathematics* 26, 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86

Contrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior 15,* 167-192.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 265-286.

Dhombres, J. (1993). Is One Proof Enough? Travels with a Mathematician of the Baroque Period. *Educational Studies in Mathematics* 24(4). 401-419.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. En: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht; USA: Kluwer

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp.275-282). USA: Kluwer Academic Publishers.

Leithold, L. (1999). *El cálculo* (séptima edición). México, D.F, México.: Oxford.

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire.* (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En: L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa.* Volumen 17 – Tomo 1 (pp. 143-148). México: Clame.

Ferrari, M. (2007). *Construcción social del conocimiento matemático: La función logaritmo*. Memoria Predoctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire.* (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Mahoney, M. S. (1973). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat. 1601-1665*. New Jersey: Princeton University Press.

Martínez-Sierra, G. (2006) Los procesos de convención matemática constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En: G. Martínez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 745–751). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006.

Montiel, G. (2006). *Construcción social de la función trigonométrica.* En: G. Martínez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 818–823). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2). 131-170.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: Columbia University Press.

Robutti, O. (2003). Real and virtual calculator: from measurements to definite integral. *Proceedings of the* European Research in Mathematics Education III (Cerme3), Bellaria, Italia. Disponible en http://www.didmatcofin03.unimo.it/pubblicazioni/TG9_Robutti_cerme3.pdf. Consultada en julio de 2007.

Salas, Hille & Etgen. (2002). *Calculus* volumen 1 (Cuarta Edición). España: Editorial Reverte.

Saldhana, L. y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, y L. Stiff (Eds.), *Proceeding of the 20th Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 1., (pp. 298-303). Columbus, OH: ERIC Cleainghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Sánchez, C. (2007). *Un acercamiento Socioepistemológico a la integral: el caso de la hipérbola equilátera*. Tesis de maestría en revisión. Facultad de Matemática – UAG, México.

Spivak, M. (2001). *Cálculo infinitesimal* (segunda edición). España: Editorial Reverte.

Stewart, J. (1998). *Cálculo* (Tercera Edición). México: International Thomson Editores.

Thompson, P: W. (1994). Imagens of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics 26*, 229-274.Vinner, S. (1983). Concept, definition, concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematical Education, Science and technology 14*(3), 293-305

Vinner, S. (1983). Concept, definition, concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematical Education, Science and technology 14*(3), 293-305.

Youschkevitech, (1995). The concept of function up to the midde of the 19th century. (R. Farfán, trad.). En: R. M. Farfán (Ed.), *Antologías 1* (pp. 81-185). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México. (Reimpreso del *Arch. Hist. Exact. Sci. 16*, pp. 37-85, 1976).

Zandieh, M. (2000). A theorical framewortk for analyzing student understanding of the concept of derivative. En: E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (Vol 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

http://www.fisicanet.com.ar/matematica/progresiones/ap01_progresiones.php Consultada en Julio de 2007.