LA GRAFICACIÓN COMO UN MEDIO PARA CONSTRUIR CONOCIMIENTO[56]

Gabriela Lara Medina, Teresa Parra Fuentes, Julio Omar Palacios Zarco, Eduardo Briceño

CINVESTAV-IPN

gabslar@hotmail.com, tparra@cinvestav.mx, jpalacios@cinvestav.mx, ebriceno@cinvestav.mx

Resumen: *en este laboratorio se presentan 3 secuencias de investigación sobre el uso de las gráficas, tratando de mostrar que este estudio no es exclusivo del dominio matemático, sino que de igual manera lo es en otros dominios científicos como la ingeniería y la tecnología. para ello en la primera abordaremos los temas de la conservación de la masa y potencia de bombas correspondientes a mecánica de fluidos; y en la segunda sobre su papel en el conocimiento matemático específicamente en el uso de calculadoras simbólicas bajo un marco de la génesis instrumental. a la luz de la aproximación socioepistemológica que considera a las prácticas sociales como normativas para la construcción de un conocimiento, en este trabajo creemos que la graficación pudiera realizar este papel. para lo cual el uso de las gráficas implicará un funcionamiento y forma específica para éstas, con el fin de resignificar un conocimiento.*

Palabras clave: mecánica de fluidos, resignificación, modelación-graficación, uso de las gráficas

Introducción

es indudable que las gráficas juegan un papel importante en el medio en el que nos encontramos; podemos conocer cómo es el precio del petróleo con respecto a años anteriores (figura 1); estimar la densidad de dos fluidos diferentes por medio de una tabla (figura 2); ver el funcionamiento del corazón en un electrocardiograma (figura

[56] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior.* Clave: No. 47045.

3); sin embargo aún cuando en la vida cotidiana nos encontremos frente a un universo gráfico no siempre podemos dar una explicación adecuada de la misma, sin duda alguna es un experto del área quien podrá dar una interpretación acertada de lo que cada una de estas gráficas significa, ya que la gráfica está diseñada con un objetivo o funcionamiento específico, y una forma de expresar dicho objetivo.

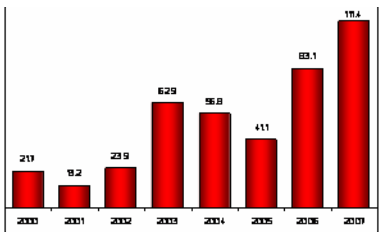


Figura 1. Precios del petróleo, en dólares por barril 2006 - 2007

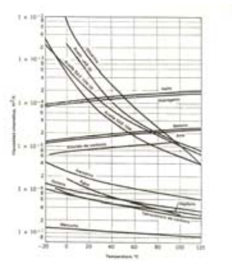


Figura 2. viscosidad cinemática de fluidos comunes (a presión atmosférica) como una función de temperatura

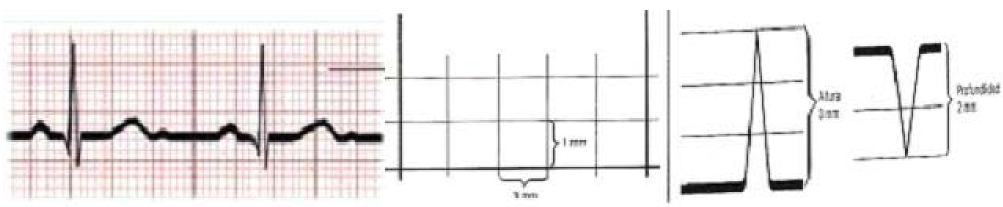


Figura 3. Electrocardiograma

La Figura 1 es una gráfica en la cual podemos apreciar como ha variado el precio del petróleo en un período de tiempo, específicamente del 2000 al 2007, en el cual podemos apreciar que en el 2007 el precio se elevó de manera significativa en dicho lapso de tiempo, mientras que el precio mas bajo se encuentra en el 2001. La gráfica es muy explicita, lo que permite obtener información aún si ser un economista o un analista experto.

Por otra parte las figuras 2 y 3 son gráficas que requieren un análisis más profundo del tema para ser interpretadas.

La Figura 2 es una tabla en la cual se compara la viscosidad de diferentes fluidos, quien tiene dominio de conocimientos de Mecánica de Fluidos la interpreta de acuerdo a sus conocimientos previos y con base a su experiencia. Esta tabla es empleada en ejercicios en los cuales se tiene que usar la densidad de algún fluido específico, la forma de usarla básicamente está en cómo se realiza la lectura de los datos de un fluido específico, para ello es necesario ver la intersección de las líneas vertical y horizontal.

La Figura 3 muestra un electrocardiograma, el cual puede suministrar mucha información sobre el corazón y su funcionamiento. Con este estudio es posible averiguar más sobre el ritmo cardíaco, el tamaño y funcionamiento de las cavidades del corazón y el músculo cardíaco. Un cardiólogo sabe que el electrocardiograma de una persona sana presenta un trazado particular; Cuando se producen cambios en ese trazado, el médico puede determinar si existe un problema.

Lo anterior nos indica que el uso de una gráfica va más a allá de una interpretación intuitiva y que sólo quien conoce el verdadero significado de cada línea o dato que aparece en la gráfica es quien puede realmente interpretar la gráfica y obtener toda la información posible de ella, es decir *usa la gráfica*.

El uso del conocimiento nos lleva a hablar de que dicho conocimiento debe tener un *funcionamiento*, es decir un objetivo definido, al cual debe de llegar de alguna manera específica, de una *forma* la cual va a ser descrita por medio de una situación específica, todo ello va a permitir que haya una *resignificación* de un conocimiento. En nuestro caso en particular hablamos de *uso de gráficas.*

En el sistema didáctico es usual considerar a la graficación como representación, a modo de alternativa para dar *sentido* a procedimientos algebraicos, privilegiando lo algorítmico, y dejando de lado el hecho de que a través de la reflexión sobre ésta se puede llevar al estudiante a incorporar significados a sus procedimientos que le permitirán diferentes construcciones mentales que puede ser reflejado en sus argumentos alejados de formalismos y basados en su propia experiencia. Los cuales son igual de válidos, que los que son realizados con rigor. De esta manera se podría favorecer la funcionalidad del conocimiento, esto es, que el conocimiento se incorpore orgánicamente al estudiante haciendo una diferencia en su percepción de su medio

Dado que es en *la actividad humana donde el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención,* nos hemos enfocado a una actividad propia del área superior en la cual se pueda dar evidencia de lo anterior. Coincidimos con Cordero (2001) y con Cen, (2006) cuando justifican que es propiamente la organización de los grupos humanos quien le da sentido al conocimiento que construyen. Es por ello que nos enfocamos a ubicar los *marcos de referencia donde el conocimiento matemático adquiera sentido y significación* (Cantoral y Farfán, 2003).

Así el objetivo está orientado a brindar un marco de referencia distinto al dominio matemático que de evidencia de los usos del conocimiento ante una situación específica, en particular estamos interesados en los usos de las gráficas en el Nivel de Educación Superior; ya que una característica del conocimiento matemático de este nivel consiste en que no necesariamente es propia del domino matemático, sino que necesariamente existen otros dominios científicos y otras prácticas de referencias donde se resignifica, es decir convive con otros dominios; por lo tanto la matemática enseñada en los distintos dominios deben de cubrir ciertas necesidades especificas del área de tal manera que sea en el ambiente de formación disciplinar que la matemática logre constituir una herramienta para modelar problemas

Se han establecido tres laboratorios donde intervienen conocimientos del Nivel Superior que de evidencia de los usos de las gráficas con el fin de obtener *marcos de referencia donde el conocimiento matemático adquiera sentido y significación*:

- L1: Caracterizar a la graficación con el uso de una calculadora graficadora, para construir conocimiento matemático en ambientes tecnológico. El binomio

Modelación-Graficación juega un papel importante ya que al modelar situaciones de movimiento los participantes se aproximan a la gráfica de posición, para describir, caracterizar, controlar, explicar o estudiar el movimiento, desarrollan procedimientos a partir de significados de las gráficas y construyen argumentos; es decir tomar una situación donde la modelación esté anclada a la graficación. Pero también se toma en consideración el papel que juega la calculadora graficadora observando de qué manera se integra al humano para construir conocimiento matemático bajo un marco de la “génesis instrumental”.

- L2: En esta secuencia tratamos de enlazar 3 elementos que son: La derivada en el sentido de Lagrange, entendida como el coeficiente del término lineal en el desarrollo de la serie de potencias esto es, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{3}+\ldots$ perteneciente al dominio matemático; la conservación de la masa en la mecánica de fluidos, que pertenece al dominio de la ingeniería; y la epistemología sobre el uso de las gráficas bajo la aproximación Socioepistemológica. Con la finalidad de mostrar la relación que existe entre ambos dominios de conocimiento y que la graficación puede ser ajustada como un medio para construir conocimiento.

- L:3 A través de una disciplina de referencia como lo es la mecánica de fluidos y en particular el concepto de la ecuación de Torricelli, definir algunos usos de las gráficas los cuales den elementos para considerar a la graficación una práctica social.

Cada uno de estos ciclos darán evidencia de la graficación es un medio que puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación (Cordero, 2005; Cordero, 2006b, Cordero y Flores, 2007).

A continuación se describe detalladamente cada uno de estos ciclos.

L1: La Génesis Instrumental en una Situación de modelación del movimiento

Las calculadoras son consideradas como recursos didácticos, lo que conlleva a nuevas formas para abordar los procesos de aprendizaje de la matemática, pero estos procesos no han sido suficientes. Sin embargo la ciencia y la tecnología están integradas parcialmente al sistema educativo, los alumnos las reconocen como un cuerpo del conocimiento fuera del salón de clases, eventualmente hacen uso de ellas y al hacerlo construyen conocimiento que no forma parte de su enseñanza. (Suárez, 2007), como la tecnología vive separada de la enseñanza de las matemáticas en ciertos sectores curriculares, es un ente externo, que requiere de una intensa negociación para ser incorporada intencionalmente, en los procesos de aprendizaje (Cordero, 2006b).

Para dar respuesta a estas problemática se reporta una investigación para entender el rol que juega la tecnología en el conocimiento matemático, para ello describimos dos aproximaciones como antecedentes de nuestra investigación relacionado con el uso tecnológico: La socioepistemología del binomio*: modelación-graficación* (B (M-G)) y la *génesis instrumental*. Esto con el propósito de encontrar elementos de entender este rol tecnológico y tratar de evidenciar con el apoyo del uso de las gráficas favorece este entendimiento.

Para los propósitos de la investigación se implementa una puesta en escena, una situación de aprendizaje de modelación del movimiento realizada por Torres (Torres, 2004). El aporte de la investigación contribuye en la creación de un modelo del conocimiento matemático que dé cuenta de lo que constituye su contenido y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento de tal manera que se resignifique la matemática (Cordero, 2006). A continuación presentamos nuestros marcos teóricos como antecedentes a nuestra investigación.

Socioepistemología del binomio modelación-graficación

El presente trabajo es el estudio del uso las gráficas generadas por prácticas con el uso tecnológico, el cual genera un nuevo uso de las gráficas. Para ello se ha tomado la socioepistemología del *"binomio modelación-graficación"* (B (M-G)) (Suárez, 2007). El cual refleja una epistemología en donde la modelación no es vista como un modelo que hay que aplicar y representar (Cordero, 2006b), sino como un tipo de construcción de tal manera que caracteriza y articula, precisamente, la modelación y la graficación, es decir donde la modelación escolar esté anclada a la graficación y su relación que esta tiene con la tecnología (en este caso calculadoras graficadoras) Se encuentra elementos de funcionamiento y forma que caracterizarán el binomio modelación-graficación que son: múltiples realizaciones al graficar, identificación de patrones, realizaciones de ajustes en una estructura para producir un patrón deseable y la graficación como un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación. La socioepistemología, que mira el conocimiento como una construcción producto de la actividad humana, y que considera a la práctica social generadora del conocimiento, sostiene que dicha construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001). Para ejemplificar partamos de la descripción de la experiencia tomada en (Suárez, 2007), donde se han realizado exploraciones con estudiantes que han cursado Álgebra, Geometría, Geometría Analítica y Cálculo:

Se les pide graficar una situación de movimiento en la que una persona se aleja de un punto de partida y regresa en un tiempo determinado y se pide también describir la variación que se da en tal situación de cambio. A continuación se comenta de qué *manera se ponen en uso sus conocimientos para responder a las actividades de modelación ancladas en la graficación. Se ha observado que se recurre en primer lugar, y de forma persistente, a líneas rectas y a curvas parecidas a una parábola. El modelo lineal (véase fig. 4a) permite describir la variación numéricamente a partir de la velocidad constante promedio para cada uno de los intervalos de ida y vuelta. Se asignan valores de signo contrario para designar las velocidades de la ida, por un lado, y de la vuelta, por otro. En el modelo cuadrático se usa una aproximación de velocidades promedio para intervalos de tiempo igual a lo largo de todo el trayecto (véase figura. 8b), y poner el número de página donde se encuentra.*

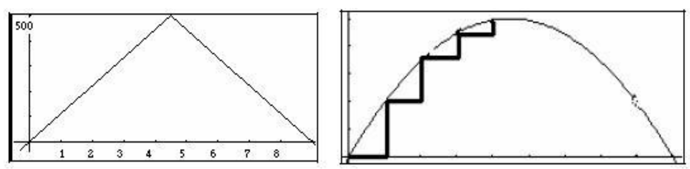


Figura. 4. Modelos a) lineal y b) cuadrático para el movimiento de una persona en gráficas de posición contra tiempo (Tomada de Suárez, 2007).

Suárez (2007) reporta que los estudiantes logran asociar la pendiente de los distintos intervalos con la velocidad en cada uno de ellos, permitiendo el paso de una descripción cuantitativa de la variación a una cualitativa, esto permiten asociar la inclinación de la curva en un punto dado con la pendiente en un intervalo cada vez más pequeño y, por lo tanto, con la velocidad en un tiempo dado. Se puede apreciar que el uso de gráficas de una situación del movimiento se inicia con trazos rectos, y a partir del análisis descrito en el párrafo anterior, posteriormente sigue con los trazos curvos sin aparecer explícitamente ningún procedimiento analítico-algebraico. De esta manera, con la línea de razonamiento a partir del procedimiento de obtener velocidades por intervalos y asociar la pendiente con la velocidad los estudiantes pueden lograr una gráfica del movimiento donde describan los matices de la variación de la velocidad en los distintos intervalos del trayecto (véase figura.5).

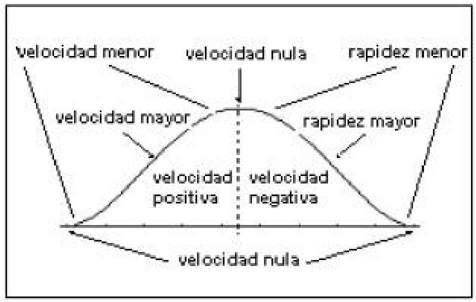


Figura. 5. Una gráfica de movimiento. Matices en la velocidad (Tomada de Suárez, 2007)

Este tipo de tarea demanda a los estudiantes a modelar una situación de cambio y variación por medio de una gráfica, parte de un eje que hace que surja una argumentación gráfica a partir de la necesidad misma de la modelación. De acuerdo con (Suárez y Cordero) este eje de argumentación proporciona una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, a la que se denomina una socioespistemología de la modelación-graficación es un marco de referencia para que los estudiantes resignifiquen sus conocimientos matemáticos en este caso la variación.

La aproximación instrumental *"La génesis instrumental"*

Un segundo propósito es encontrar elementos para entender el papel que juega estos dispositivos tecnológicos al enfrentar problemas matemáticos en este caso las gráficas generadas al movimiento de un sujeto. Para ello se a tomado un marco teórico que se preocupa por las cuestiones instrumentales llamada génesis instrumental, el cual se enfoca al estudio de integrar la tecnología al sujeto, es decir cuando el sujeto pasa a construir de un artefacto a un instrumento de tal manera que se integra a él para resolver problemas matemáticos (Artigue, 2002). Para ello la disciplina ha creado una dualidad y así entender esta integración nos referimos a la *instrumentalización*, dirigida hacia el artefacto, se trata del conocimiento propio del artefacto, por ejemplo cuando alguien compra un celular lo primero que se hace es conocerlo, cuales son las funciones que tiene, los menús, sus características, en síntesis personalizarse de él. En este proceso del conocimiento crea esquemas de uso, el cual se desarrollan habilidades de uso del artefacto, es decir el individuo podrá crear accesos directos para realizar una llamada de su celular con solo apretar una tecla del celular esto debido a que se ha familiarizado con el artefacto y organizado de acuerdo a sus necesidades. Por lo tanto concierne al surgimiento y la evolución de artefactos[57] componentes del instrumento: selección, reagrupamiento, producción e institucionalización de funciones, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento,...) que prolongan la concepción inicial de los artefactos (Rabardel, 1995). Un segundo elemento es la *instrumentación* el cual se dirige hacia el sujeto y lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva a tareas dadas. Es un elemento importante de la aproximación instrumental, su estudio cuidadoso da indicios de integración del artefacto, al entender los procedimientos observados de interacción entre estudiante-artefacto.

Metodología

La situación de aprendizaje consiste en una puesta en escena donde los dicentes realizan gráficas de movimiento de una persona que se aleja de un punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos. Pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos. Con la ayuda de una calculadora simboliza y sensor de movimiento[58], en dicha escena se les pide lo siguiente:

[57] Se utiliza el término *artefacto* en un sentido general, en lugar del término *máquina*, ya que esta última incluye ideas de complejidad y de manufactura industrial. Un martillo es un artefacto, un compás es un artefacto, una calculadora y computadoras son artefactos. El término artefacto tendrá el sentido de un objeto material que está disponible para la actividad humana. En el caso que nos ocupa, en este escrito cuando hablamos de artefacto nos referimos a calculadoras simbólicas.

[58]Calculadora simbólica, sensor de movimiento y calor (son dispositivos tecnológicos que detectan ondas de movimiento y temperaturas) y transductor-CBL (dispositivo que procesa la información de onda que envía el sensor y los convierte en números digitales, es decir recibe información mecánica y la convierte en información digital).

1) Construye una gráfica que describa los cambios de posición de tal situación en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.

2) Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te vienen a la memoria. Convengamos en que la velocidad de será positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario. Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.

3) Se les pide a los estudiantes que diseñen la forma en que se van a mover ante el sensor, por lo que ellos toman en cuenta el tiempo y la distancia y la forma en que se tienen que moverse ante el sensor para lograr la gráfica de su propuesta.

Las estrategias a seguir para la resolución del problema son: comprensión del problema, que los estudiantes construyan una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo; simulen el movimiento a partir del gráfico propuesto utilizando el sensor y la calculadora graficadora; relacionen las gráficas de la distancia y de la velocidad, con el fin de dar un significado físico y matemático a dichas variables; que utilicen las tablas que se registran en la calculadora, para establecer los diferentes tipos de funciones.

Resultados

En cuanto a sus resultados obtenidos en la investigación de torres (Torres, 2004) se pueden relacionar aspectos de la situación de movimiento con las gráficas obtenidas a partir de múltiples realizaciones del movimiento frente al sensor, identificar los intervalos de cambios de velocidad, con respecto a la pendiente, se observó que identificaron en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquélla que tuviera mayor inclinación como el ejemplo de la figura 2. La tecnología permitió a los estudiantes tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, en la que los estudiantes pueden explorar y dar explicaciones de lo que sucede con la situación

Conclusiones

Hemos descrito elementos centrales de dos investigaciones. La socioepistemología B(M-G) y la Génesis instrumental en la primera nos da un desarrollo de uso de las gráficas que tiene como propósito de formular una categoría de M-G[59] donde se resignifique la variación y en la segunda se refiere a la construcción de un artefacto a un instrumento por un sujeto de tal manera que se integra a él para resolver problemas matemáticos. El aporte del laboratorio bajos estas dos perspectivas es, que la tecnología esta relacionada con el B(M-G) porque nos permiten hacer un nuevo uso de las gráficas producto de las practicas de modelación, por el otro lado el aporte instrumental proporciona elementos de importancia del rol que juega el uso tecnológico en el conocimiento matemático en el cual pretendemos obtener elementos de construcción del instrumento, y así tener una ampliación de dicha teoría a la luz de la socioepistemología. Estas dos referencias son de mayor importancia si nos preguntamos ¿Cómo ver solo el uso de las gráficas sin integrarlo a un artefacto que subyace al uso de las gráficas? ¿Qué es lo que hace que yo haga un uso de las gráficas con el uso del artefacto? ¿Qué es lo que norma un uso de gráficas en ambientes tecnológicos? Estas preguntas nos han permitido reflexionar la hipótesis de que el uso de las gráficas tiene una función normativa que favorece tal construcción del artefacto al instrumento de tal manera que se integra al humano como algo orgánico y poder dar respuesta a problemáticas relacionadas con la practicas tecnológicas.

[59] Modelación-graficación

L2: El uso de las gráficas en la conservación de la masa. El caso de la derivada

Metodología

Como es bien sabido el discurso matemático escolar ha favorecido la derivada por medio del límite del cociente $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, en donde el concepto de función es fundamental ya que sobre él se realizarán operaciones. Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades con las concepciones de función y se ha encontrado que estudiantes de grados avanzados como los de ingeniería siguen teniendo dificultades con el concepto de pendiente (García, 1998).

Cabe señalar que ésta no ha sido la única concepción que se ha tenido sobre la derivada, otra de ellas es la que tenía Lagrange que consiste en el coeficiente del término lineal en el desarrollo de la serie de potencias esto es, $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3} + \ldots$ Su idea era fundamentar el análisis de manera rigurosa pero lejos de los infinitesimales, definiendo las derivadas de una función sin límites ni infinitésimos, al suponer que toda función se puede desarrollar en serie de potencias. El objetivo de incorporar el residuo en la serie es que al colocarlo en el desarrollo puede limitar el número de términos según se requiera y, simultáneamente, tener la garantía de que para valores pequeños de h, cualquier sumando es más grande que la suma de todos los términos que le siguen. Por ejemplo, en un problema de cinemática en el que se requiere conocer la posición de un cuerpo en un tiempo dado, sólo se necesita la función posición en el instante inicial y la velocidad y aceleración, por lo que bastará detenerse en la segunda derivada.

En esta secuencia haremos uso de esta concepción sobre la derivada, truncando la serie de potencias de acuerdo a lo que nos interesa de la siguiente forma:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

Por otro lado, la matemática es usada en diferentes dominios y adquiere significado de acuerdo a las actividades propias de cada uno. Por lo cual un mismo objeto matemático puede tener diferentes significados de acuerdo a la situación en la que se encuentre, es por eso la importancia del estudio de los usos del conocimiento y no la centración en los conceptos u objetos matemáticos, ya que por sí mismos estos carecen de sentido y significado. Un ejemplo de que la matemática vive en otros dominios y adquiere otros significados es el caso de la derivada en el tema de la conservación de la masa, la cual es una de las leyes básicas sobre el movimiento de un fluido en mecánica de fluidos que pertenece al dominio de la ingeniería. Esta ley establece simplemente que la masa, *M*, del sistema es constante, planteándose como:

$$\frac{DM_{sistema}}{Dt} = 0$$

En donde el sistema es una cantidad fija de masa o flujo que está compuesto por la misma cantidad en todo momento. En la figura 6 se muestran 3 ejemplos de sistemas, que circulan a través de un *dispositivo* en un tiempo *t*. Este dispositivo se llama volumen de control, el cual es un volumen arbitrario en el espacio por el cual circula fluido.

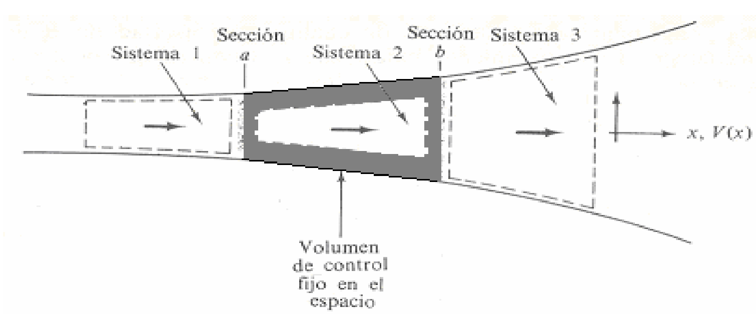


Figura 6

Sin embargo, es más conveniente expresar las leyes básicas del movimiento en términos del volumen de control, ya que los fluidos al ser capaces de distorsión y deformación continuas, es difícil identificar y seguir la misma masa de fluido todo el tiempo (como debe hacerse para aplicar la formulación del sistema). Es por ello que es más conveniente expresar estas leyes en términos del volumen de control, lo cual se expresaría de la siguiente forma:

$$0=\begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que sale del}\\ \text{volumen de control}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que entra al}\\ \text{volumen de control}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{rapidez de cambio}\\ \text{de la masa dentro}\\ \text{del volumen de control}\end{bmatrix}$$

Estableciéndose que para conservar la masa la razón de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control es igual a las razones de acumulación y agotamiento de masa dentro del volumen de control (Munson, B.; Young, D; Okiishi, T. (1999)).

Al reescribir la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que sale del}\\ \text{volumen de control}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{gasto másico}\\ \text{que entra al}\\ \text{volumen de control}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{rapidez de cambio}\\ \text{de la masa dentro}\\ \text{del volumen de control}\end{bmatrix}$$

La cual en esta investigación describimos en términos de la serie de potencia de Lagrange:

$$f(x+h)\approx f(x)-f'(x)h$$

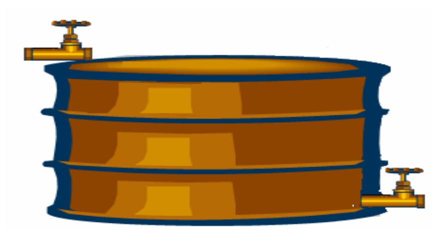
En donde: $f(x+h)$ es el gasto másico que sale del volumen de control, $f(x)$ es el gasto másico que entra al volumen de control y $f'(x)h$ es la rapidez de cambio de la masa dentro del volumen de control.

Entendiéndose la derivada como el coeficiente de la diferencia entre 2 estados uno inicial y otro final:

$$f(x+h)-f(x)\approx -f'(x)h$$

Esta relación entre la derivada en el sentido de Lagrange con la conservación de la masa la establecemos a través del uso de las gráficas, por lo cual las gráficas tendrán un funcionamiento y una forma. Siendo el *uso* establecer la variación de la acumulación del fluido, su *funcionamiento* establecer el comportamiento de la acumulación de éste y la *forma* será por medio de las diferencias entre la entrada y la salida.

La idea fundamental de la secuencia didáctica gira en torno de presentar al estudiante un contenedor o volumen de control con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:



A partir de esta idea, se proponen cinco situaciones:

La primera es una introducción para que el estudiante establezca la correspondencia entre las manipulaciones de las llaves con lo que sucede en el volumen de control presentándose a los estudiantes situaciones como: *Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.* Y se le pide que grafique el registro de la cantidad de agua en el volumen de control. Siendo la relación: Manipulación $\rightarrow$ gráfica.

La segunda tiene como objetivo que el estudiante reconozca la *acumulación* o *agotamiento* que se realiza en pequeños intervalos de tiempo, esto es, cuánto creció o decreció la cantidad de masa en el volumen de control de un instante a otro. Para lo cual necesita conocer dos estados: la cantidad de masa en el volumen de control en algún momento y un instante después, cuya diferencia dará la acumulación o agotamiento en ese instante. Observándose que al crecer la cantidad de fluido en el volumen de control entonces habrá una acumulación, por lo que la gráfica de las diferencias será positiva; y cuando decrece habrá un agotamiento por lo que la gráfica de las diferencias será negativa. Se les pide que realicen un bosquejo de estas cantidades con respecto a las gráficas que trazaron en la situación anterior.

En la tercera se presentan al estudiante gráficas como las que trazaron en la situación 2 que corresponden a diferencias, es decir, gráficas sobre la acumulación o agotamiento. Teniendo como finalidad que los estudiantes confronten las gráficas de las diferencias con las manipulaciones de las llaves, esto es, cómo tendrían que ser éstas últimas para obtener las gráficas que se les dan. Entre las cuales están:

Figura 7

De esta forma la relación de las manipulaciones de las llaves con la gráfica se dará en sentido contrario al del inicio, esto es: Gráfica $\rightarrow$ Manipulaciones.

En la cuarta se espera que el estudiante establezca la conservación de la masa de forma implícita, esto es, que establezca las relaciones entre los datos dados que estarán regidos por la misma conservación de la masa. Ya que se tiene que cumplir que la cantidad que sale menos la cantidad que entra sea igual a la cantidad acumulada en ese instante. Para ello se presentan al estudiante 3 columnas como las que se muestran en la figura 8, en las que se dan 2 datos y él tiene que establecer el tercero, usando las gráficas como un medio argumentativo para tal fin.

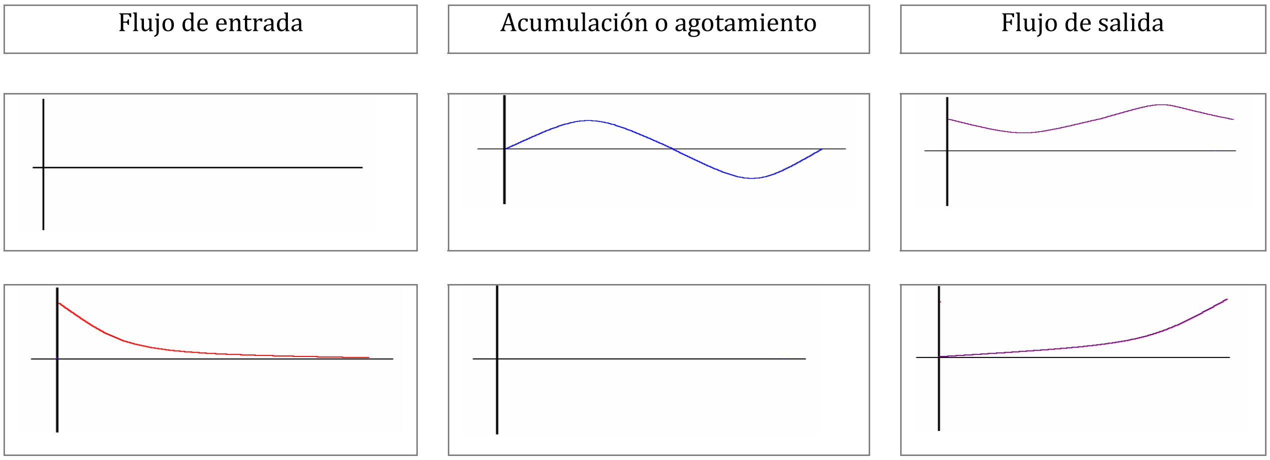


Figura 8

La última situación tiene como finalidad que el estudiante establezca la conservación de la masa a través de la expresión lineal de la serie de Taylor, esto es, f(x+h)=f(x)+(-f´(x)h). Esto es, que identifique una cantidad primitiva o flujo de entrada de la cual se van a derivar las demás. Para ello se le guía por medio de preguntas sobre gráficas que se le muestran sobre flujo de entrada, acumulación instantánea y flujo de salida con el fin de que establezca las diferentes relaciones que existen entre ellos.

Resultados

Entre los resultados encontrados se encuentran darle sentido a las gráficas de la acumulación o agotamiento, que corresponde a la derivada, con base a dos estados: la entrada y la salida de flujo. Específicamente en los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, usando argumentos que le son comunes. Por ejemplo, en los puntos donde la acumulación es cero identifican que es cuando coinciden el flujo de entrada y salida; cuando hay un máximo es porque hay un cambio en las llaves, es decir, que la llave de entrada de estarse abriendo empieza a cerrarse pero sin superar a la llave de salida; y en el caso de un mínimo es porque la llave de salida de estarse abriendo se empieza a cerrar pero sin superar la llave de entrada.

Conclusiones

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabaja con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. En un escenario en el cual puede construir argumentos y significados con base en su experiencia y en una situación usual, usando las gráficas como argumentos para realizar sus procedimientos.

L3. Desarrollo conceptual de la ecuación de Torricelli

La premisa fundamental que guía a este taller es el hecho que la matemática de nivel universitario no ha logrado integrarse a los individuos de forma orgánica. Es por esto que es necesario definir mecanismos a través de los cuales la enseñanza de la matemática logre la integración orgánica de esta a la vida de los estudiantes, ya que a ellos (en especial estudiantes de ciencias e ingenierías) se les exige socialmente que su conocimiento de esta disciplina sea funcional, no solo en su quehacer profesional, sino también, en todos los contextos de su vida(Cordero, 2006). Esta premisa fundamental de la enseñanza de las matemáticas se hace más evidente en educación superior ya que, en este nivel de enseñanza se asume a la matemática como una disciplina que está al servicio de otras disciplinas científicas de las cuales adquiere sentido y significado.

Esta visión abre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática no solo al ¿cómo enseñar? sino también al ¿qué enseñar?, dando a la problemática una naturaleza multidisciplinar. Por lo tanto, la visión teórica que utilizamos para definir las líneas de acción de este taller es la socioepistemología la cual, integra el estudio sistémico de la dimensión epistemológica, cognitiva, didáctica y social (Cantoral y Farfán, 2003). Esto permitirá generar marcos de referencia en los cuales la matemática se resignifique es decir, darle un mayor sentido y significado a los objetos matemáticos, cambiando la centración que hay sobre estos objetos a contextos socioculturales en los cuales, los objetos matemáticos tienen un sentido y un significado que se expresa en el contexto social. De este modo, el estudio de las "prácticas sociales" brindara elementos que permitirán la reorganización de la obra matemática con el fin de hacer de esta una disciplina funcional.

Por ejemplo, la graficación tiene un carácter argumentativo y funcional el cual, se encuentra velado en el Discurso Matemático Escolar ya que en el, se usa a la graficación como una representación del concepto de función, esto genera un estatus de la graficación que sólo, en el contexto del aula tiene sentido, perdiendo su carácter argumentativo y funcional. Por tal motivo los círculos de investigación en matemática educativa que usan la socioepistemología como marco teórico con mayor frecuencia asumen a la graficación como una "práctica social". Para institucionalizar en la socioepistemología a la graficación como una "práctica social" es necesario brindar mayor evidencia sobre los usos de las gráficas, lo cual es uno de los objetivos de este taller. Para brindar dicha evidencia en este taller nos apoyaremos en una disciplina de referencia en la cual, determinaremos algunos usos de las gráficas a través de su funcionamiento y forma.

De la disciplina que nos apoyaremos en este taller será la "Mecánica de Fluidos", esto se debe, a que en el proceso de desarrollo del Cálculo aparecen los nombres de Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Johann Bernoulli, Pierre Varignon, etc. Los cuales, están íntimamente relacionados al desarrollo de la "Mecánica de Fluidos" a través de contribuciones que les ayudaron a ampliar y robustecer el estatus del Cálculo como un saber utilitario y socialmente aceptado (Levi, 1989).

Al realizar un estudio epistemológico en la Mecánica de Fluidos en trabajos de Leonhard Euler, Daniel Bernoulli y Johann Bernoulli; observamos que muchos de los teoremas que definieron en sus trabajos hacían referencia al trabajo de Evangelista Torricelli (conocido como el padre de la hidrodinámica) el cual, se encargo de definir una expresión que relaciona la velocidad de salida en un deposito abierto en su parte más baja y la altura que tiene la columna de agua sobre dicho orificio. Al buscar la epistemología que uso en su trabajo nos fue posible encontrar una resignificación de las ecuaciones cuadráticas como un medio que hace posible la describir la variación de los fenómenos de flujo. Así como el papel que juega el flujo estacionario para describir los fenómenos de flujo de fluidos (Levi, 1989).

Torricelli escribió dos libros uno llamado De motu gravium naturaliter descendentium (Del movimiento de los graves que descienden naturalmente) y De motu proiectorum (Del movimiento de los proyectiles), de este ultimo escribió una sección completa dedicada al movimiento de los líquidos al cual le llamo De motu aquarum (Del movimiento de las aguas). Para el análisis del movimiento de los fluidos partió de la hipótesis siguiente: *"Las aguas que desembocan violentamente en un orifico pequeño poseen el mismo "ímpetu" que tendría un cuerpo pesado al caer naturalmente desde el nivel de la superficie libre del agua hasta el del orificio" (Levi, 1989)*

Del estudio epistemológico que realizamos definimos dos etapas a las cuales les llamaremos:

La ecuación cuadrática como modelo de variación

En esta actividad dirigiremos nuestro esfuerzo a que a través de la evidencia experimental se prediga el flujo de un fluido a través de una vasija como la que se muestra en la Figura 1.

De hecho el experimento que Torricelli describe en su libro es el siguiente:

"Un deposito está lleno de agua hasta A y tiene un orificio en B, por el cual fluye el fluido libremente, entonces: ¿Cuál será la velocidad del fluido al salir del depósito? ¿Cómo disminuirá la altura del punto A? ¿Cómo se comportaran la velocidad y la altura del punto B si se varían los diámetros del deposito y del orificio de salida?" (Levi, 1989)

Las primeras dos preguntas que se hizo Torricelli serán en las que nos centraremos en esta primera parte del taller.

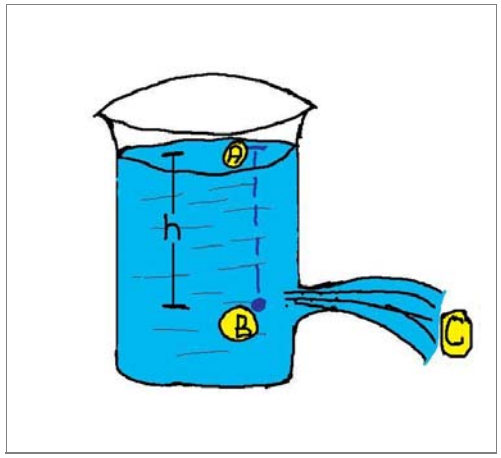
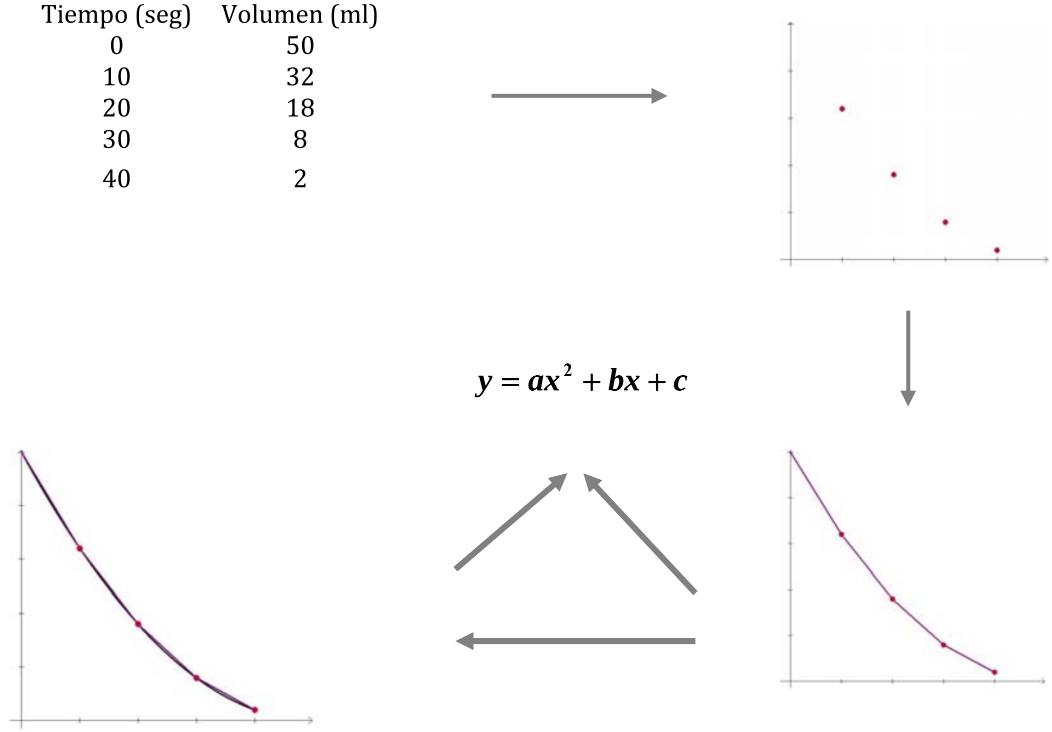


Figura 1

A través de esta evidencia epistemológica aplicaremos el dispositivo que Torricelli describe, para que, a través de datos experimentales poder predecir el comportamiento del fenómeno de flujo. Esto tiene la intención de hacer evidente la funcionalidad del uso de las gráficas a través de su funcionamiento y forma.

Lo que se espera que realicen los participantes es que a través de los datos obtenidos experimentalmente, realicen un "punteo de los datos" el cual es un uso de las gráficas. Esto permitía la "búsqueda de un patrón" que se ajuste mejor a los datos obtenidos, para de esta forma buscar un modelo analítico que se ajuste a nuestro fenómeno, y por ultimo comprobar nuestro modelo analítico con nuestra gráfica. La Figura 2 muestra el proceso que se espera que lleven a cabo los estudiantes.

Tiempo (seg)	Volumen (ml)
0	50
10	32
20	18
30	8
40	2



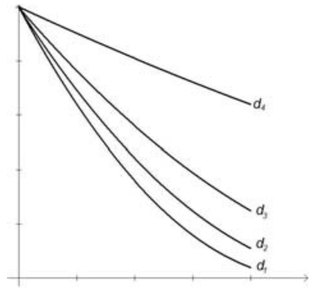
$$y = ax^2 + bx + c$$

Con esta actividad se dará respuesta a las primeras dos preguntas que se hizo Torricelli las cuales son: *¿Cuál será la velocidad del fluido al salir del depósito? ¿Cómo disminuirá la altura del punto A?*

Pero, para responder la última pregunta se ha diseñado la segunda etapa a la cual le llamaremos:

El flujo estacionario y su importancia en el estudio de fenómenos de flujo

Usando el experimento de Torricelli se variará el diámetro del tubo de salida, con el cual se obtendrán de nuevo datos experimentales que les permitirán determinar el comportamiento del fenómeno y las facilidades que brinda para el estudio de los fenómenos de flujo.



Dado a que el diámetro del deposito se mantendrá constante el diámetro del orificio será el que se variará, esto permitirá ver que ente mayor sea la diferencia entre estos el flujo másico del permanecerá constante.

Esto dará elementos para hacer evidente las simplificaciones que se generan en el análisis de los fenómenos de flujo.

Conclusiones

Dado a que las actividades aquí presentadas forman parte de una investigación la cual se encuentra en desarrollo, no tenemos evidencia experimental que justifique nuestras conclusiones, sin embargo esperamos aportar elementos que robustezcan la convención socioepistemológica de considerar a la graficación como una práctica social, y que a través de la evidencia que obtengamos de la puesta en escena, definir algunos usos particulares en el contexto de la Ingeniería Química. Además, esperamos robustecer el hecho de que los grafismos son elementos que permiten la matematización de fenómenos que no están necesariamente dentro de la matemática, pero que sin estos no podríamos obtener los significados que nos permitan la matematización de algunos procesos.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7**(3), 245-274.

Cen, C., (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 4, 2, 103-128.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79. Córdoba, 7-10 de Septiembre de 2005

García, D. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Levy, E. (1989). *El agua según la ciencia.* Ediciones Castell Mexicana

Munson, B.; Young, D; Okiishi, T. (1999) *Fundamentos de Mecánica de Fluidos.* Ed. Limusa, Wiley.

Suárez, L. (2007) *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* Borrador de tesis doctoral en revisión no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México

Suárez, L. y Cordero, F. Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.* (En evaluación).

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN, México.