EL CÁLCULO PROMEDIAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL BACHILLERATO

Olaf López Rodríguez, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, Carlos Rondero Guerrero, Crisólogo Dolores Flores

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

lolafr@hotmail.com, flormonr@hotmail.com, crondero6@hotmail.com, cdolores1@hotmail.com

Resumen. *Se retoman elementos epistemológicos como producto de ejercer la vigilancia epistemológica sobre algunos saberes matemáticos para presentar una propuesta para introducir la integral, que se define como el producto de la base por una altura promedio, es decir, se reduce el problema del cálculo del área de cierta región irregular a el cálculo del rectángulo introducido en dicha región con área equivalente, por tanto todo se reduce al cálculo de dicha altura, ya que la base es fija. Estas son las ideas del cálculo promedial en relación con la didáctica del cálculo integral. En esta investigación se aportan nuevos elementos para una propuesta alternativa y por tanto para dar evidencias empíricas de cómo los alumnos se apropian y producen dichas ideas. La ingeniería didáctica nos aportó elementos necesarios para elaborar la propuesta que se implantó en el aula.*

Palabras Clave: Cálculo promedial, Integral definida, Ingeniería Didáctica

Introducción

La literatura nos reporta que la mayoría de las problemáticas en cálculo están concentradas, privilegiando el plano de las prácticas algorítmicas olvidando el plano conceptual, es decir, se favorecen los procedimientos algorítmicos y no los procedimientos básicos que dieron origen a los conceptos fundamentales (Derivación e Integración). De manera particular en cálculo integral se privilegian las llamadas técnicas o métodos de integración como forma de propiciar el cálculo de cierta integral definida, en consecuencia los significados de los procedimientos básicos quedan relegados a un valor puramente testimonial.

Al respecto de esto algunos investigadores hacen referencia a que:

- Los estudiantes aprenden los procedimientos de cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales[43] escasas (Dreyfus, 1990).
- Dificultades al momento de estudiar ideas de cálculo integral, que son debidos a problemas con los procedimientos algorítmicos (Orton, 1983).

Dolores (1996) menciona que las causas atribuidas a esta problemática están relacionadas, fundamentalmente, con la planificación-ejecución del proceso de enseñanza del Cálculo y con los procesos de asimilación de sus conceptos básicos, en este sentido propone introducir a la derivada a través de las ideas que dieron origen a dicho concepto.

Al analizar la introducción de la integral mediante el estudio histórico-epistemológico, Cantoral (2001) reconoce como problema abierto la no evidencia empírica que muestre cual de las distintas presentaciones para introducir la integral definida esté mejor adaptada para efectos de enseñanza-aprendizaje, siendo productores: Cauchy-Riemann, Newton-Leibniz y Wallis, la primera definición aparece sustentada en la noción de aproximación, la segunda en la noción de acumulación y la tercera en la noción de promediación.

De los puntos de vista antes descritos es justificable el desarrollar a la integral bajo la noción de promedio y sus distintos significados intrínsecos en el nivel medio superior. La literatura anterior nos da pie para decir que con los cursos tradicionales de cálculo integral en el bachillerato, los alumnos no logran comprender las ideas básicas de la integral definida, esta premisa la hemos considerado como el **problema de investigación**.

[43] Es toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática.

El **objetivo general** es elaborar una propuesta didáctica para introducir la integral definida en el bachillerato, que posibilite la comprensión de dicho concepto, tomando en cuenta las ideas del Cálculo Promedial[44], es decir, reducir el problema del cálculo del área de una región irregular al de una región rectangular, por tanto se centra la atención en el cálculo de la *altura promedio*, tomando en cuenta funciones continuas en un intervalo dado.

Objetivo particular

- Dar evidencia a partir de datos empíricos de cómo, los estudiantes, adquieren y utilizan las ideas básicas del Cálculo Promedial.

Pregunta de investigación

- ¿Qué elementos histórico-epistemológicos y didácticos son básicos para propiciar la ganancia cognitiva en los estudiantes para que desarrollen las ideas básicas del cálculo integral?

Planteamos como **hipótesis de la investigación** que existen dos procedimientos para introducir la integral definida en el nivel medio superior, los cuales son, la integral definida como operación inversa de la derivación, es decir admitiendo la existencia de esta para funciones continuas a través de la derivada, y como el límite de sumas de Riemann, lo que

[44] Rondero (2001) La presencia de la noción de promediacion, es producto de ejercer una vigilancia epistemológica sobre los saberes matemáticos lo que propicia un valor conceptual agregado llamado CALCULO PROMEDIAL. El adjetivo promedial se debe al hecho de que el centro de atención está puesto en el promedio, como puede ser la media aritmética, media armónica, media geométrica, media potenciada, entre otras. El cálculo promedial se sustenta además en otros elementos de los que se han hecho un rescate epistemológico, como son: el exceso y el defecto, lo promedial y lo instantáneo, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, el todo y las partes.

propicia que no se tome en cuenta para efectos de enseñanza-aprendizaje a la integral como el producto de la altura promedio por la base de cierta región que se va a determinar su área.

Metodología

Como Metodología de investigación abordamos a la Ingeniería didáctica descrita en Artigue (1995). Para esto desarrollamos la fase de Análisis preliminar, la fase de Análisis a *priori* y diseño de la secuencia y la Experimentación y describimos en el apartado Discusión el análisis a *posteriori* y validación, para la **dimensión epistemológica** Rondero (2001) encuentra que Wallis demuestra que el área de la figura de una curva representada por la relación $y = x^n$ en $[0,1]$, se encuentra fácilmente por los principios ya establecidos en su *Arithmética Infinitorum*, es decir que el área de tal figura guarda una proporción $1 : n+1$, con el rectángulo circunscrito.

En la **dimensión didáctica** se demuestra a través del análisis de planes, programas de estudio y libros de texto que la integral se presente a través de la operación inversa en el caso de el libro de texto para las preparatorias de la universidad Autónoma de Guerrero y en el caso de los Colegios de Bachilleres y de los DGTIS a través de el procedimiento de sumas de Riemann.

En la **dimensión cognitiva** se aplicó una prueba piloto para alumnos de un curso propedéutico para ingresar a la licenciatura en matemáticas, con la finalidad de observar las dificultades, errores y concepciones acerca de la integral mediante esta visión, en los cuales tuvieron dificultades en el aspecto algebraico (factorización, simplificación de cociente de fracciones, despejar incógnitas), y no observaron que se puede introducir un rectángulo de área equivalente en una región irregular.

En la fase de **análisis a *priori* y diseño de la secuencia** describimos las hipótesis de trabajo, es decir, que esperamos del rediseño de la prueba piloto, por tanto las hipótesis que tomamos en cuenta, fueron que se estabilizarían las ideas de los alumnos si definimos el problema que se va a resolver, y que sus errores disminuyen si tomamos en cuenta a los alumnos del primer semestre de la unidad académica de matemáticas por el hecho de tener la experiencia de trabajo que se realiza en la licenciatura, por lo tanto si se pretende aplicar estas actividades en el nivel medio se debe tener una fase previa para reducir estos errores algebraicos identificados en la dimensión cognitiva como parte de la aplicación de la prueba piloto, además la metodología de resolver las actividades en equipos de dos y por lo establecido en el primer bloque al introducir en las actividades el problema a resolver, propiciará que las respuestas para el cálculo de la altura exacta serán mas convincentes a las que dieron los alumnos de la prueba piloto, que resolvieron las actividades de manera individual.

La secuencia de actividades las desarrollamos en tres bloques, para no ser exhaustivos definimos el objetivo del último bloque ya que es el decisivo para que se cumpla el objetivo general.

El tercer bloque tuvo como objetivo que el estudiante desarrolle la capacidad de calcular la altura promedio exacta para determinar el rectángulo de área equivalente para dos regiones irregulares determinadas por las gráficas de funciones en dos intervalos diferentes.

Fase de experimentación

Esta fase tuvo como escenario el aula escolar con estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, participaron cuatro estudiantes y trabajaron en equipos de dos. Aunque nuestra propuesta está centrada para el nivel medio superior, consideramos pertinente aplicar dichas actividades con estos alumnos, puesto que eran recién egresados del nivel medio superior.

La técnica para la implantación de la propuesta se basa primeramente en trabajar con equipos de dos para cada bloque, puesto que obtuvimos mejores resultados al aplicar el rediseño, en el primer bloque se le propone al alumno que medite el problema a resolver que viene definido en las dos primeras hojas y que trate de razonarlo y comentarlo con su compañero de equipo, cuando ya estén listos se le pide a un representante de cualquier equipo que pase a discutir a la pizarra con los restantes equipos este problema de forma que pueda quedar entendido, esto nos asegurará mejores resultados, para después seguir a resolver cada una de las actividades del primer bloque, al término de estas, se les pide que pase un representante por equipo a comentar su resultado por cada actividad y se les pide a los equipos restantes que participen si tuvieron una respuesta diferente, así el profesor tendrá la decisión de intervenir cuando sea prudente y de orillarlos a la respuesta correcta en caso necesario. Esto se repetirá para cada uno de los restantes bloques.

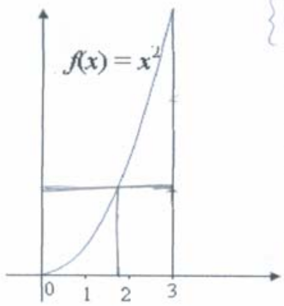
Resultados

Puesto que el objetivo general de la propuesta es que los alumnos calculen el área de una región irregular en base al rectángulo de área equivalente, lo cual se reduce al cálculo de la altura que determina dicho rectángulo, presentamos solo los resultados directos que los alumnos hicieron relativo al tercer bloque de la última actividad, puesto que ahí se observa como es que hacen los desarrollos algebraicos y de otros cálculos respectivos para la determinación de dicha altura. Se trabajó en equipos de dos, por lo tanto presentamos respectivamente sus respuestas.

Equipo 1

IV. Contesta lo siguiente

- Calcula el área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,3]$, introduciendo el rectángulo de área equivalente.



$$\left\{0,\ \frac{1\cdot 3}{n},\ \frac{2\cdot 3}{n},\ \frac{3\cdot 3}{n},\ \dots \frac{i\cdot 3}{n},\ \dots \frac{n\cdot 3}{n}\right\}$$

$$h_1 = \left(\frac{1\cdot 3}{n}\right)^2$$

$$h_2 = \left(\frac{2\cdot 3}{n}\right)^2$$

$$h_3 = \left(\frac{3\cdot 3}{n}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$h_n = \left(\frac{n\cdot 3}{n}\right)^2$$

$$P_n = \frac{\frac{(1\cdot 3)^2}{n^2} + \frac{(2\cdot 3)^2}{n^2} + \frac{(3\cdot 3)^2}{n^2} + \dots \frac{(n\cdot 3)^2}{n^2}}{n} = \frac{1^2\cdot 3^2}{n^3} + \frac{2^2\cdot 3^2}{n^3} + \frac{3^2\cdot 3^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2\cdot 3^2}{n^3}$$

$$P_n = \frac{3^2\left(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2\right)}{n^3} = \frac{3^2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)}{n^3} = \frac{9\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)}{n^3}$$

$$P_n = \frac{18n^3+27n^2+9n}{6n^3} = 3 + \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 3 + \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{9}{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n^2}$$

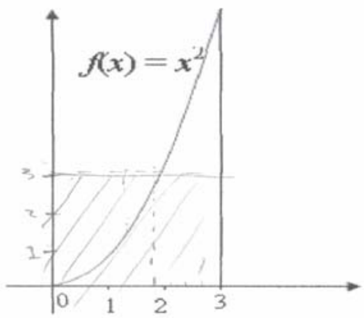
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = 3+0+0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} P_n = 3$$

$$A = 3\cdot 3 = 9$$

Equipo # 2

IV. Contesta lo siguiente

- **Calcula el área bajo la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,3]$, introduciendo el rectángulo de área equivalente.**



Si se divide $[0,3]$ en n veces entonces.

$x = \left\{\frac{i}{n/3}\right\}_{i=0}^{n} = \left\{\frac{1}{n/3}, \frac{2}{n/3}, \frac{3}{n/3}, \ldots, \frac{n}{n/3}\right\}$

Como $f(x)=x^2$

Alturas $= \left(\frac{1}{n/3}\right)^2, \left(\frac{2}{n/3}\right)^2, \left(\frac{3}{n/3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n}{n/3}\right)^2$

Suma de Alturas $= \left(\frac{1}{n/3}\right)^2 + \left(\frac{2}{n/3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n/3}\right)^2$

$= \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2}{9}} \rightarrow \dfrac{9n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

Promedio de Alturas $=$

$\dfrac{\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6n^2}}{n} \Rightarrow \dfrac{9n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{3n(n+1)(2n+1)}{2n^3}$

$3n^2+3n$

$6n^3+3n^2+6n^2+3n$

$\left[\dfrac{6n^3+9n^2+3n}{2n^3}\right]$

$\dfrac{\frac{6n^3}{n^3}+\frac{9n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3}} = \dfrac{6+\frac{9}{n}+\frac{3}{n^2}}{2} \xleftarrow{\lim_{n\to\infty}} = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ altura $= 3$

Area $=$ Base $\cdot$ Altura

$= 3 \cdot 3$

$= 9\,u^2$

Discusión

Los resultados más concretos que están relacionados con el objetivo general vienen expuestos en el Tercer bloque, puesto que el objetivo de las actividades es determinar el área bajo la gráfica de la función en un intervalo dado, en base al rectángulo de área equivalente, en las últimas dos actividades se observa como es que se logró el objetivo, ambos equipos dividieron ambos intervalos y calcularon el promedio de dichas alturas, se evidenció una diferencia por ambos equipos en cuanto a la factorizaron que hicieron en el numerador de la suma explicita del promedio, así les resultó la misma fórmula en ambos casos y calcularon el límite, y después como se analizó en el primer bloque que el problema del cálculo del área de la región irregular se reduce a calcular el área del rectángulo, sólo multiplicaron la base que es fija por la altura promedio en base al límite.

Comentamos en la introducción que no había evidencia empírica que muestre cual de alguna de las distintas visiones de la integral este mejor adaptada para efectos de enseñanza-aprendizaje, también como problema la forma tradicional de llevar al aula la integral, los alumnos no logran comprender las ideas básicas del cálculo integral. En base a los resultados obtenidos de nuestra propuesta los alumnos logran comprender las ideas básicas del cálculo promedial, siguiendo las observaciones ya planteadas, y mostramos la evidencia empírica de cómo esta forma de a bordar la integral tiene buenos efectos de adaptación por los alumnos, sólo bastará hacer una contrastación para saber cual visión esta mejor adaptada y como estas ideas no están alejadas de ellos.

Conclusiones

Puesto que habíamos identificado una problemática en cálculo y más directamente en cálculo integral, planteamos como problema que con los cursos tradicionales de calculo integral en el bachillerato, los alumnos no logran comprender las ideas básicas de la integral definida, es así que identificamos una forma alternativa de presentar a la integral definida en base al análisis epistemológico, realizado por Rondero (2001), y demostramos la hipótesis de que se deja de lado esta conceptualización de la integral, en base al análisis de libros de texto, planes y programas de estudio del nivel medio superior (Guerrero), se propuso y aplicó una prueba piloto para alumnos que egresaron del nivel medio y que se encontraban en un curso propedéutico, en base a esta conceptualización de la integral para observar las dificultades, concepciones y errores con el objetivo de rediseñar la propuesta, estos resultados nos dieron la pauta para considerar a la Ingeniería Didáctica como metodología para elaborar la propuesta que debería llevarse al aula, por tanto para modificar la prueba piloto propusimos el análisis a priori y diseñamos la secuencia de las actividades, al experimentar con alumnos de primer semestre de la licenciatura en matemáticas, se obtuvieron resultados favorables y que indica que los alumnos comprendieron las ideas básicas del cálculo promedial, esto es: primeramente calcularon el promedio de alturas, en una fase discreta (al dividir en subintervalos de igual longitud con 10 y 20 subintervalos y calcularon el promedio de las alturas que provienen de la subdivisión de este intervalo) y en una fase continua (al realizar una partición en **n** subintervalos de igual longitud encuentran una fórmula en base a una sugerencia para ciertas sumas y calculan el límite), vemos en las respuestas de los dos equipos de la última actividad, la idea de que al ya tener calculada la altura multiplican por la base y determinan el área del rectángulo, geométricamente introducen la región rectangular en la región irregular indicando la altura que determina dicho rectángulo.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cantoral, R. (2000). *Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado*. Documento interno del Cinvestav, (pp. 1-4).

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Ed.). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (pp. 113-134). Cambridge University Press.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica*. *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*, Tesis de doctorado, Instituto Superior Pedagógico “Enrique José Varona”.

Orton, A. (1983). Student´s understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14(1),* 1 – 18.

Rondero, C. (2001). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, ponderatio y æquilibrium, en la constitución del saber físico matemático.* Tesis de doctorado, Cinvestav, México.