¿FUNCIONES O ECUACIONES? DIFICULTADES CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES

Jesús López Cahun, Landy Sosa Moguel

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

jesus_2002mx@hotmail.com, smoguel@uady.mx

Resumen. *Esta investigación pretende dar muestra de una clasificación y explicación de aquellos factores que propician las dificultades que enfrentan los alumnos para discernir entre una función y una ecuación. Para lograr esta clasificación realizamos un análisis para identificar los errores conceptuales y procedimentales asociados a dicha dificultad, considerando la epistemología del concepto y su tratamiento didáctico como marcos de referencia. Todo esto bajo una secuencia basada en los principios teóricos de la ingeniería didáctica, en su primera etapa.*

Palabras Clave: Funciones, ecuaciones, dificultades, errores

Introducción

En diversas investigaciones, (Artigue, 1995; Ochoviet, Olave y Testa, 2005) se reportan algunas dificultades y errores que presentan los alumnos durante el estudio de funciones. Una de las dificultades a las cuales se enfrentan los alumnos, en primera instancia, es la diversidad de formas en la que es presentado tal concepto, por ejemplo, el empleo de diagramas sagitales, conjuntos, gráficos, etc.; la dificultad se presenta en el hecho de que estas representaciones no siempre están dirigidas hacia una relación de correspondencia entre dos variables. Por ello, consideramos pertinente indagar sobre los aspectos, situaciones o circunstancias que dan pie a esta serie de dificultades y errores.

Consideramos que una dificultad más a la que se enfrentan los alumnos es que el tratamiento que suele darse en el aula al concepto va, por decirlo de alguna manera, un poco rápido, no se permite a los estudiantes “conocer” el concepto; nos hemos limitado a caracterizarlo y dar algunas de sus representaciones, sin considerar todo el proceso evolutivo que ha sufrido.

Es así, que el concepto función suele ser enseñado a través de tres partes bien definidas, en primer lugar, se presenta lo que es una función como una relación entre conjuntos, denotándola con una “flecha”, después se le asigna una expresión algebraica y luego se representan funciones en un plano coordenado. Sin embargo, no es del todo clara la transición entre una forma de representación y otra, provocando algunas lagunas o concepciones erróneas en los estudiantes.

De esta manera, la forma en que se presenta y trata el concepto en la escuela da pie a una serie de interrogantes en los alumnos, como por ejemplo ¿por qué una función tiene un gran parecido en la forma en que se expresa simbólicamente con las ecuaciones?, ¿por qué la función representa únicamente relaciones unívocas?, ¿por qué su representación gráfica es en planos coordenados?, ¿es lo mismo una ecuación que una función? etc.

Es así, que el presente trabajo fue desarrollado con el propósito de identificar, clasificar y explicar los errores conceptuales y procedimentales entorno a la dificultad para distinguir una función de una ecuación, centrándonos en las consecuencias de carácter cognitivo y tomando como marco de referencia los aspectos epistemológicos y didácticos relacionados con el aprendizaje de funciones.

Puesto que la presente investigación estuvo enfocada a la actividad cognitiva de los alumnos, consideramos como marco de referencia la teoría de los campos conceptuales, para estudiar las filiaciones y rupturas entre ecuaciones y funciones, en cuanto a conocimientos y contenido conceptual se refiere.

Finalmente, apuntamos que el presente trabajo es parte de un proyecto más amplio en el cual se realizó un análisis de las dificultades y errores, conceptuales y procedimentales, cometidos por estudiantes al enfrentarse al concepto función.

Método seguido

Para llevar a cabo el proyecto nos apoyamos en la ingeniería didáctica como metodología de investigación en su primera etapa, la cual se basa en un determinado número de análisis preliminares, como son:

- El análisis epistemológico de los contenidos empleados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución

De igual manera, la ingeniería didáctica nos permitió unir los resultados obtenidos en cada uno de los aspectos que se abordaron, es decir, articular, en cierta medida, cada uno de los resultados obtenidos referentes a los factores epistemológicos, cognitivos y didácticos que influyen en las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de funciones.

La investigación se concretó en tres etapas fundamentales, a saber: r*evisión documental, exploración y diseño de instrumentos y análisis e interpretación de resultados.*

La primera etapa consistió en el análisis de los errores reportados en diversas investigaciones así como una primera clasificación de las posibles dificultades a las cuales se enfrentan los alumnos para el estudio del concepto función; centrándonos principalmente, en los errores y dificultades de carácter cognitivo, sin dejar de lado las epistemológicas y las didácticas, con la finalidad de tomar a estas últimas como marco de referencia para la primera. De igual manera, durante esta etapa, se realizo un análisis epistemológico con el fin de tener un marco de referencia para la elaboración de los reactivos del primero de dos instrumentos de medición.

Los instrumentos antes mencionados fueron aplicados a 20 alumnos del nivel medio superior que cursaban la asignatura denominada matemáticas IV (precálculo) impartida en el cuarto semestres en el Colegio de Bachilleres de Yucatán (COBAY). La elección de esta institución fue debido a que forma parte de un proyecto en el se estudia el discurso matemático escolar y el presente trabajo forma parte de ese mismo proyecto.

La segunda etapa consistió en la elaboración de dos instrumentos consistentes en una serie de reactivos a modo de cuestionario, estos instrumentos se aplicaron en dos tiempos, en un primer tiempo se aplicó uno de los instrumentos con la finalidad de obtener un panorama general de las concepciones y errores referentes al concepto función, presentes en los estudiantes. El segundo tiempo consistió en la aplicación de un segundo instrumento que pretendía identificar los errores conceptuales y procedimentales, asociados al concepto función, considerando aquellos que podrían darnos algún referente sobre la existencia de la confusión entre los conceptos función y ecuación.

Para la elaboración del segundo instrumento se tomaron algunas de las dificultades y errores halladas en el primero, podemos mencionar por ejemplo, el hecho de que los alumnos identificaban a una función como una ecuación con grafica, considerar que una gráfica segmentada no podría representar una función, falta de discernimiento entre ecuación y función, entre otras.

La tercera etapa consistió en analizar e interpretar los resultados obtenidos con el propósito de identificar y explicar, los errores relacionados con las posibles causas de la confusión, por parte de los estudiantes, entre funciones y ecuaciones.

Resultados y discusión

Como resultado de la aplicación y análisis de los instrumentos se obtuvieron los siguientes errores cometidos por los alumnos al tratar con el concepto función:

Se logró apreciar que los alumnos identifican a una función como una ecuación. Esto pudo identificarse en las respuestas dadas por estudiantes al pedirles que aportaran una definición del concepto función:

> *"Es una ecuación que se puede expresar en una gráfica. Como $f(x)=2$, su grado es cero y es una lineal (la más fácil) o $f(x)=(x^2+2)-3=0$"*

Se puede apreciar como definen a las funciones como una ecuación con gráfica y de igual manera se puede mirar que estos conceptos parecen ser asociados por medio de su representación en el plano cartesiano.

Parece ser que las similitudes que ambos conceptos poseen (en ambas podemos encontrar literales, ambas pueden ser graficadas en un plano coordenado, en ambas es posible aplicar algebra, etc.) han influido para que los esquemas, de funciones y ecuaciones, que los alumnos poseen tengan varios puntos comunes, lo que explicaría el porqué para los alumnos es difícil o no del todo fácil, saber cuando un cierto problema dado debe ser tratado con funciones o con ecuaciones. Aun más preocupante, es el hecho de estas similitudes pueden estar influyendo para que ambos conceptos sean considerados como uno solo.

Un segundo error hallado, fue que los alumnos identifican una expresión algebraica como una función por el simple hecho de parecerse a la forma usual de representar esta última, prueba de ello la tuvimos al enfrentar al alumno ante un listado de expresiones algebraicas y pedirle que identifique, escribiendo Falso o Verdadero, cuál o cuáles de todas eran funciones, y la razón de su elección. Una de las respuestas dadas por los alumnos fue la siguiente:

Ante la expresión $3x^4 + 2x = -3$:

"Falso. Porque no tiene nada que lo identifique como una función, como $f(x)$*"*

Ante la expresión $C(m) = 2m + 1$:

"Verdadero. Porque $C(m)$ *representa una función"*

Como tercer error, podemos apuntar el hecho de que los estudiantes no identificaban una función como tal si la representación grafica de la misma no parecía ser contigua, es decir, realizarla en un solo trazo sin levantar el lápiz (Ochoviet, et. al, 2005). Esto fue observable cuando al presentarles la representación grafica de la función $f(x) = x$, con x en los reales y con x en los enteros, los alumnos afirmaban que la grafica que podía estar representando a una función era la primera, donde x toma valores reales.

Es así, que del análisis realizado a los errores y dificultades identificadas, a continuación reportamos los resultados de la investigación referentes a las dificultades de aprendizaje que enfrentan los alumnos, relacionadas al manejo, conceptualización y distinción entre funciones y ecuaciones:

- La falta de distinción entre variables e incógnitas no permite a los alumnos identificar cuando un problema debe ser abordado con ecuaciones o con funciones.
- El tratado algebraico que suele darse a ambos conceptos deja de lado el hecho de que la función representa la forma en que se relacionan los elementos de dos conjuntos
- De igual manera se considera que los ejercicios de funciones suelen limitarse a encontrar el resultado de una suma, resta, composición, etc. este tratamiento es muy similar al de las ecuaciones.
- Los alumnos consideran que el resultado obtenido después de *operar con funciones*, (suma, resta, multiplicación, composición, etc.) es una función nueva cuyas características no tiene relación alguna con las características propias de aquellas funciones que le dieron origen.
- Los algoritmos presentes en las funciones (cálculo de raíces, cálculo de la función inversa, cálculo del dominio, etc.) provocan que el alumno se enfoque más hacia ellos

que al análisis de los resultados obtenidos y su significado en términos del problema planteado.

- *Las diversas formas de representación del concepto función,* es decir, las principales representaciones de este concepto son el algebraico y el grafico, los mismos que emplea la ecuación.
- *La* falta de tratamiento de situaciones con carácter variacional, es decir, situaciones que involucren una relación de correspondencia entre dos variables.

Por otra parte, podemos apuntar que existe la idea de que Precálculo es una materia de carácter integrador entre el álgebra y la geometría analítica, debido a que en esta asignatura es posible encontrar gráficos y expresiones algebraicas, muy similares a los que encontramos en álgebra y geometría analítica. De modo que, al mirar que los gráficos, "propios" de geometría analítica, son asociados a expresiones algebraicas y denotados bajo el nombre de funciones, es que puede surgir, a nivel cognitivo (en los alumnos) una especie de generalización, considerando como funciones a gráficos que no pueden ser denotados como tales.

Siguiendo lo anterior y despues de un segundo análisis pudimos concluir que los alumnos presentan grandes dificultades para identificar si ante un problema dado, este debe ser resuelto por medio de funciones o por medio de ecuaciones, y aun más, logramos identificar aquellos errores que son consecuencia de lo anterior, estos se resumen en el siguiente listado:

- Definir funciones como ecuaciones.
- $f(x)$ es un claro indicador de la presencia de una función.
- Identificar gráficos de geometría analítica como funciones, cuando no lo son.
- Considerar que una función es siempre biyectiva.
- Graficar y operar funciones y ecuaciones indiscriminadamente.

Conclusiones

La dificultad que tratamos es la confusión entre ecuación y función, la cual se manifestó en ambos instrumentos aplicados a los alumnos. Podemos asociarla a la perspectiva cognitiva, pero para poder obtener una explicación más amplia y clara de la situación que se está dando, se requieren como referentes las perspectivas epistemológica y didáctica, esto debido a que el funcionamiento global de un sistema didáctico no puede explicarse por el estudio separado de cada uno de sus componentes (Ruiz, 2000). De igual manera, los errores hallados tienen una implicación cognitiva, ya que nacen de las estructuras mentales y conocimientos previos del sujeto, los cuales representan un obstáculo para el aprendizaje de nuevas nociones.

Uno de los factores que puede ser el causante de la confusión entre los conceptos antes mencionados es el hecho de que los alumnos definen a la función como una ecuación que representa una gráfica. Esta definición dada por los alumnos puede entenderse bajo los aspectos cognitivo, epistemológico y didáctico; a nivel cognitivo, podemos decir que los alumnos al notar que las gráficas vistas en cursos anteriores (en los cuales se manipulaban ecuaciones) son muy similares a las que se abordan al estudiar funciones, generan una especie de unión entre estos dos conceptos, por medio de la representación gráfica, por lo que definir a las funciones como ecuaciones de gráficas no parecería raro, claro, bajo este razonamiento.

A nivel epistemológico, después de un análisis de los momentos clave de la evolución del concepto función, como los expuesto en (Sastre, 2005), podemos asociar esta dificultad al hecho de que a finales del siglo XVI las funciones eran equivalentes a expresiones analíticas, por lo que la Aritmética y el Álgebra estaban subordinadas a la Geometría, sin embargo, pese a la posterior ruptura entre el Álgebra y la Geometría, surgió un concepto, función, que parecía crear un puente entre ellas.

Por otra parte la forma tan peculiar de definir función $f(x)=\ldots\ldots$ nos da pie para mencionar un error hallado que parece tener una explicación similar a la dada líneas arriba, el error al que nos referimos es que los alumnos identifican como función a una expresión algebraica por el simple hecho de poseer una notación específica, este error puede explicarse desde una perspectiva didáctica ya que, comúnmente, los profesores mantiene un formato estándar cuando se refieren a funciones, lo que crea la ilusión de que para poder catalogar una expresión como función solo tengo que identificar si posee el formato indicado. Obsérvese que este último error puede ser una consecuencia del arriba señalado (definir función como ecuación), pues bajo la necesidad de identificar cuando se habla de uno y de otro lo más razonable es optar por la búsqueda de diferencias, siendo $f(x), g(x), h(x),$ etc. las que más sobresalen.

Otro de los errores reportados es que los alumnos identificaban a gráficos, propios de la geometría, como funciones; este error puede considerarse bajo la perspectiva epistemológica como mencionamos anteriormente.

También reportamos que los alumnos no consideraban como funciones a aquellas que tiene la característica de tener un domino discreto, esto lo podemos atribuir a dificultades de corte didáctico, pues los gráficos con los que han tenido un mayor contacto en su actividad escolar son los de trazo continuo (Ochoviet, et. al, 2005).

Un error que hizo explícita las deficiencias sobre la conceptualización de función, fue que los estudiantes plasmaron una falta de conocimiento en cuanto al carácter unívoco de las funciones. Este error puede explicarse bajo una perspectiva cognitiva, considerando que el caso de la función inversa es un tema que se estudia mucho después de haber “definido” función; la problemática sería que si el alumno no logró construir adecuadamente este concepto (función) podría percibir que la inversa elimina o suprime el carácter unívoco propio de las funciones.

Ahora, de manera general, podemos decir que la confusión entre ecuación y función es el resultado de la interacción cognitiva de los errores reportados y algunos otros que por ahora no se conocen, sin embargo, a este conjunto de errores podemos sumarle las propias dificultades cognitivas, epistemológicas y didácticas de la falta de discernimiento entre ecuaciones y funciones.

Es así, que a nivel *cognitivo* esta dificultad puede ser asociado al hecho de que los alumnos generan *esquemas* que responden a situaciones muy similares, entonces es posible que los alumnos asocien ambos conceptos a la resolución de problemas que, aunque provienen de naturaleza distinta, la similitud del problema que plantean, crea la ilusión de poder ser resuelto a través de funciones o ecuaciones.

De igual forma, con relación a la parte epistemológica, puede atribuirse al hecho de que actualmente la enseñanza del concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis histórica del concepto, es decir, la forma última en que fue concebida precede, en la enseñanza, a su consideración como herramienta de la actividad matemática o extramatemática (Ruiz, 2000).

A nivel didáctico, podemos apuntar el hecho de que durante la enseñanza de funciones los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas ligados al origen y la evolución epistemológica del concepto, induciendo a mirar al concepto como algo estático, eliminado aspectos de variabilidad y movimiento relacionados con éste, propuestas por Newton, Leibniz y Euler. Además, podemos señalar que durante la enseñanza de los conceptos ecuación y función no suele explicitarse lo que quiere decir la presencia de x en cada una de las expresiones o fórmulas con las que se representan, es decir, no se pone el debido énfasis en la diferencia que existe entre variables e incógnitas.

Bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gomez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial iberoamérica. México.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar; Epsilon, THALES, 58 Vol. 20(1).

Ochoviet, C., Olave, M., Testa, Y. (2005). Concepciones de los estudiantes acerca de la gráfica de una función lineal de dominio discreto. En G. Martínez (Ed.), Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 19, 485-490.

Ruiz, L., Rodríguez, J. (2000). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función en enseñanza secundaria. En Cantoral, Ricardo (Eds.). *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 265 - 290). Sevilla, España, España.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S., Villacampa, Y. (2005). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. En G. Martínez (Ed.), Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 19, 22-27.