ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS DE LA RELACIÓN $f - f'$ EN UN CONTEXTO PERIÓDICO

A. Alejandra Ordóñez y Gabriela Buendía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

anlejandra@hotmail.com, buendiag@hotmail.com

Resumen. *En esta investigación, se aborda la problemática en el que la relación entre una función y sus derivadas se presenta tan poco significativa en el marco de las funciones periódicas. Con base en la socioepistemología, nuestro objetivo de investigación es indagar cómo puede resignificarse la relación $f - f'$, desde una perspectiva de las prácticas sociales, en un escenario periódico al transitar entre los contextos analítico, gráfico y físico. Para lograr dicho objetivo de investigación hemos estudiado situaciones en contextos como la ingeniería, la química, la biología o en el quehacer de un matemático donde se involucran los usos de la función y sus derivadas sucesivas en escenarios periódicos. Encontramos que a partir de ciertas prácticas intencionales, como graficar, modelar, predecir o formalizar, los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significado en el quehacer científico no exclusivo de la matemática.*

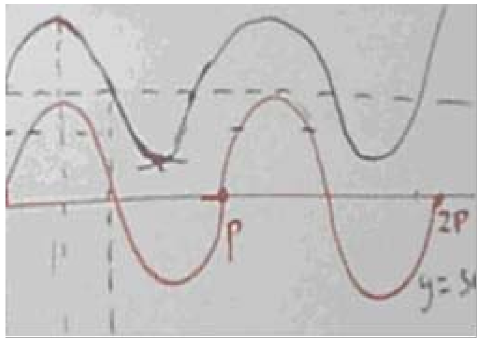
Palabras Clave: Lo periódico, prácticas sociales, predicción, escenarios periódicos.

Introducción

Numerosas investigaciones realizadas en el marco de la matemática educativa denuncian la ausencia de marcos de referencia en la matemática escolar que ayuden a darle significado además de aquéllos marcos que toman aspectos analíticos asociados tradicionalmente al conocimiento matemático (Buendía, 2004a; Campos, 2003). Particularmente en estudios sobre la derivada y su primitiva se ha mostrado que la relación $f - f'$ es poco significativa y se ha encontrado en las construcciones de los estudiantes ciertos argumentos que el estudiante toma por teoremas. En apariencia son verdaderos pero se encuentran ciertas falacias en ellos y no pueden ser demostrados por los mismos estudiantes. A estos teoremas se les ha llamado teoremas factuales en particular creemos que la relación $f - f'$ esta fundamentada en muchos de estos teoremas. Por ejemplo, González (1999) en su investigación desarrolla una secuencia con profesores (de los niveles secundaria, medio superior y superior) inscritos en el programa de especialidad y maestría en didáctica de las matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y en la puesta en escena de su secuencia encuentra que es común suponer que si $f'(a) > 0$ entonces también se cumple $f''(a) > 0$. En el mismo sentido, hemos preguntado a profesores de nivel medio superior y superior acerca de la veracidad o falsedad de la siguiente doble implicación *f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica.* Una respuesta muy común ha sido "Sí, porque si tomamos $f(x) = senx$ la cumple. Ese es al menos mi conocimiento sobre ello".

González (1999) señala que el concepto de derivada se construye sólo si transita entre las variaciones sucesivas, no únicamente la primera derivada como pendiente ni tampoco como velocidad o como razón de cambio, sino en dirección de variaciones y lo que caracteriza tales variaciones, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas. La problemática de establecer un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas parece extenderse hacia lo periódico, debido a que la investigación en Socioepistemología ha aportado evidencia acerca de que el aspecto periódico de las funciones incluye también aspectos culturales, históricos e institucionales que tienen que ver con la periodicidad (Buendía, 2004). Sin embargo en el discurso matemático escolar, la noción de periodicidad es presentada como una propiedad que califica a una función y no a un comportamiento. Tal vez por ello, el referente obligado para hablar de lo periódico sean las funciones trigonométricas más simples y, en consecuencia, la implicación mencionada (*f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica*) se trivializa al considerar únicamente estas funciones. Así, la propiedad periódica pareciera ser algo heredable de la función hacia su derivada y viceversa.

Otro ejemplo de la problemática, periodicidad en la relación $f - f'$, lo podemos ver en la siguiente ilustración.



Puedo identificar una p tal que la función sea igual y, por lo tanto, ambas son periódicas

A un estudiante de maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas, se le dio la gráfica de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = x + senx$ y se le pidió verificar sobre ellas la propiedad periódica dada por $f(x) = f(x + p)$. Él concluyó en ambos casos que las funciones eran periódicas ya que pudo identificar una p tal que la función fuera igual. Posteriormente, se le pidió obtener la gráfica de la función derivada y nuevamente, analizar el cumplimiento o no de la propiedad periódica. En ambos casos, con criterios gráficos, halló la gráfica de la derivada, encontró p y concluyó que ambas eran periódicas. Pareciera ser que al referirse al comportamiento periódico de una función con esta característica (repetición uniforme en el dominio, patrón de crecimiento en el eje y), en realidad se está calificando la periodicidad de la derivada: el patrón de crecimiento en el eje y se anula al derivar.

En esta investigación abordamos el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas proponiendo que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyan continuamente (Cordero, 2003). Así el objetivo de investigación consiste en dar cuenta que una epistemología de prácticas y no de objetos es la que nos favorecerá para estudiar desde una perspectiva de las prácticas sociales, cómo puede resignificarse la relación $f - f'$ en un escenario periódico al transitar entre los contextos analítico, gráfico y físico. Con lo anterior proponemos nuestra hipótesis de investigación acerca de que la relación $f - f'$ en un escenario periódico puede resignificarse en el ejercicio de prácticas sociales como la predicción, la graficación, y la formalización.

Metodología

Para presentar evidencia de la hipótesis de esta investigación presentamos una serie de distintas situaciones que den cuenta del uso de lo periódico en la relación función-derivadas donde se identifica argumentos basados en procedimientos y herramientas que llevan a crear usos significativos de lo periódico en esta relación,

La presentación que se hará de las situaciones será mediante un concentrado de información a manera de tabla caracterizada por tres aspectos, ¿quién?, ¿qué hace? Y evidencia:

• ¿Quién?. Determina a la persona que realiza determina actividad en la cual esta haciendo uso de la relación $f - f'$ en determinado contexto. Y si es el caso el nombre de la fuente donde se extrajo la información.

• ¿Qué hace?. Se describe la tarea para analizar los significados y procedimientos del uso de la relación función-derivadas.

• Evidencia. Se muestra el extracto de la tarea alusiva del uso de la derivada, para evidenciar la forma en que se da tal uso.

Después ubicaremos la situación en su contexto sociocultural y discutiremos cómo se da el uso de la función y sus derivadas vistas como variaciones en fenómenos de cambio y no fundamentado en el concepto de límite, además de analizar qué herramientas se ponen en juego alrededor de dicha relación en diferentes escenarios que tengan que ver con situaciones periódicas.

Resultados

A continuación abordaremos las situaciones mencionadas siguiendo los aspectos indicados en el apartado anterior.

Situación 1

¿Quién?	**¿Qué hace?**	**Evidencia**
Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)	Trabaja en poner de manifiesto la existencia de soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales	En un "determinado"momento, un sistema se halla en un estado concreto y en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: **el movimiento es periódico.**

Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia. En 1889, y como parte de los festejos conmemorativos por su sexagésimo cumpleaños, el rey de Suecia Óscar II instituyó una competencia matemática cuyo objetivo era determinar la estabilidad del Sistema Solar, como una variación del problema de los tres cuerpos. El problema de los tres cuerpos consiste en determinar en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a su atracción mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas. Este no surge como un problema teórico, pues el sistema Tierra-Luna-Sol es un caso muy próximo del problema. Con este problema Poincaré trabaja en encontrar soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales que describen el problema. Poicaré (citado en Aluja, 2005) describe un movimiento por sus características y por ello creemos que da importancia a la posición y su variación para decidir cuándo un movimiento es periódico ya que importa saber por dónde pasa y cómo pasa. Es decir, la periodicidad del movimiento para él queda determinada si pasa por el mismo punto, a la misma velocidad y en la misma dirección en un determinado tiempo. Con ello pone énfasis en "el dónde pasa, y el cómo pasa". Los físicos usan esta idea en un marco predictivo para saber si un satélite artificial posee una órbita periódica, y así en lugar de observar todos los estados, basta con mirar unos pocos y saber que es lo que sucede con el satélite. Lo periódico y sus variaciones son pues una herramienta de predicción.

Situación 2

¿Quién?	**¿Qué hace?**	**Evidencia**
Pedro Fernández Cortés *PÉNDULO Y M. A. S.*	Analiza que el movimiento de un péndulo corresponde a un movimiento vibratorio armónico simple	Un movimiento se dice periódico cuando a intervalos iguales de tiempo, todas las variables del movimiento (velocidad, aceleración, etc.), toman el mismo valor. El movimiento de un péndulo es periódico, pues sus variables se repiten de forma constante tras un cierto tiempo. A este tiempo, le llamamos PERÍODO del péndulo

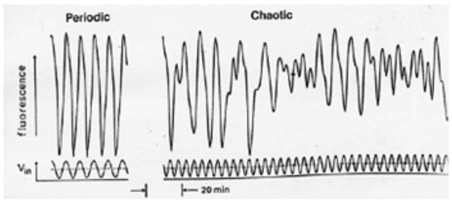
Pedro Fernández Cortés (s.f.), autor de diversas páginas de Internet enfocadas a la ciencia, en su artículo péndulo y M.A.S. (Movimiento Armónico Simple) se enfoca en estudiar el movimiento de un péndulo para concluir que pertenece a un movimiento vibratorio armónico simple. Comienza viendo algunos conceptos elementales en donde define un movimiento periódico como aquél que a intervalos iguales de tiempo, las variables del movimiento como la velocidad, aceleración, etc. toma el mismo valor. Observamos que para definir un movimiento periódico no basta con que el desplazamiento se repita a intervalos iguales; sino también se debe considerar cómo se comporta la velocidad, aceleración y demás variaciones; es decir que las variaciones del desplazamiento también deben ser periódicas respecto al tiempo. Con ello creemos que para el autor la periodicidad de las variaciones son las que determinan la periodicidad del movimiento. Por otra parte, cuando él afirma que el movimiento de un péndulo es periódico, debido a que sus variables se repiten de forma constante, se refiere no a que permanezca constantes en el tiempo, si no que va tomando los mismos valores después de un intervalo de tiempo, y es la magnitud del intervalo la que pertenece constante.

Situación 3

¿Quién?	¿Qué hace?	Evidencia
Néstor V. Torres Caos en sistemas biológicos II.	Desarrolla una serie de ejemplos en los que sistemas biológicos de distinta naturaleza presentan dinámica caótica.	En extractos libres de células la ruta glicolítica de levaduras mostraba dinámica caótica cuando eran expuestos a un suministro periódico de glucosa.

Néstor V. Torres Darias, profesor Titular de Bioquímica y Biología Molecular de la Universidad de La Laguna, (2005) especialista en modelización matemática y optimización de procesos metabólicos (campo de la ingeniería metabólica). En su artículo *Caos en sistemas biológicos II* desarrolla ejemplos en sistemas biológicos que presentan dinámica caótica y hace ver la importancia que tienen los comportamientos periódicos. Entre los ejemplos que analiza, menciona que la glicólisis[13] presenta en determinadas condiciones un comportamiento oscilatorio. Y en extractos libres de células la ruta glicolítica de levaduras muestra dinámica caótica cuando son expuestos a un suministro periódico de glucosa. Para explicar el fenómeno hace uso de las gráficas y el modelo matemático que describe la cinética del proceso.

[13] La glucólisis o glicólisis es la secuencia de reacciones que convierte la glucosa en piruvato con la producción concomitante de ATP (trifosfato de adenosina)

Registro experimental de dinámica caótica en glicólisis	Modelo matemático que describe la cinética de este proceso
	$\frac{d[F6P]}{dt} = V_0 + A\ sen(\omega_c t) - V_{PKF}$ $\frac{d[PEP]}{dt} = V_0 + A\ sen(\omega_c t) - V_{PK}$ $\frac{d[ADP]}{dt} = V_{PFK} - V_{PK}$ $\frac{d[ATP]}{dt} = V_{PK} - V_{PFK}$

se muestra la oscilación aperiódica obtenida en el registro por fluorescencia de los niveles de NADH (dinucleótido de c y adenina) en el medio de reacción (curva superior), al variar sinusoidalmente la velocidad de entrada de sustrato (curva inferior). Según sea la frecuencia de la función sinusoidal de entrada de glucosa, el flujo a través de la ruta puede pasar de periódico a caótico.

En estas ecuaciones, las reacciones cinéticas se expresan en términos de las velocidades de reacción de las dos enzimas (la fosfofructokinasa (PFK) y la piruvato kinasa (PK)) La perturbación periódica introducida tiene forma sinusoidal (velocidades de inyección de F6P fructuosa-6-fosfato y PEP fosfoenolpiruvato). En esta parte el autor hace ver la importancia que tienen los comportamientos periódicos en el suministro de glucosa así como también la variación de la velocidad de sustrato debido a que al cambiar la frecuencia de la función sinusoidal de entrada de glucosa el flujo a través de la ruta puede pasar de periódico a caótico, esto es por que la frecuencia es quien determina los cambios en la velocidad. Con ello vemos que es el uso de las variaciones de la función de entrada de glucosa las que ayudan a describir el fenómeno de la glicólisis y con ello observamos cómo a partir de ciertas prácticas intencionales los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significación en el quehacer científico no exclusivo de la matemática.

Situación 4

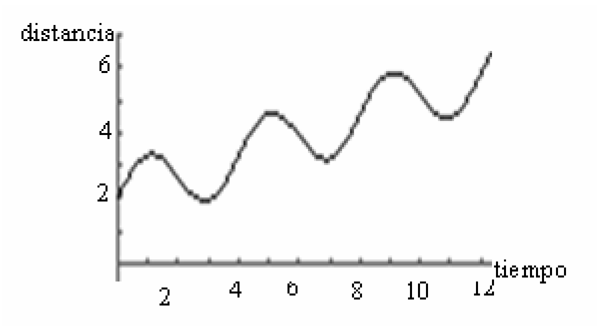
¿Quién?	¿Qué hace?	Evidencia
Guillermo Mosqueira P. S. Adrián Fuentes V. Claudia Martínez P	Proponen un experimento para visualizar una reacción oscilante.	Una reacción oscilante se caracteriza por presentar oscilaciones en concentración de alguna de las sustancias químicas que participan en ella, es decir, la concentración aumenta y disminuye de manera rítmica.

Mosqueira, et. al (2004) proponen un experimento para visualizar una reacción oscilante (**La reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ) e indicadores redox**) dirigida a estudiantes de secundaria. Para describir este tipo de reacción química se apoyan en conceptos que se imparten en sus cursos de química, tales como: oxidación, reducción, acidez e indicadores. Definen una reacción química oscilante de la siguiente manera: Una reacción oscilante se caracteriza por presentar oscilaciones en concentración de alguna de las sustancias químicas que participan en ella, es decir, la concentración aumenta y disminuye de manera rítmica. Los periodos de sus oscilaciones se mantienen constantes mientras las condiciones externas así se mantengan, por lo que pueden funcionar como verdaderos relojes químicos. Aquí presentan una reacción oscilante, describiendo que "la concentración aumenta y disminuye de manera rítmica". Hace notar que en esta manera "rítmica" no sólo el cambio de concentración es periódico sino también la variación de ésta, considerada de manera implícita.

Situación 5

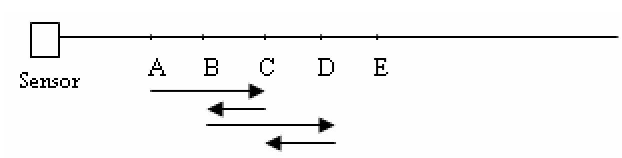
¿Quién?	¿Qué hace?	Evidencia
Rebeca Estudiante de Maestría en Matemática Educativa	Resuelve la situación de: **PERIODICIDAD Y PREDICCION** (Buendía 2004)	Es un cuerpo que se encuentra en un punto *A*, de aquí recorre una distancia pasando por *B* hasta llegar a un punto *C*, regresa al punto *B*, desde *B* se dirige pasando por *C* hasta llegar a un punto *D*, regresa al punto *C*, ...etc. esto con una velocidad casi constante.

Rebeca, estudiante de Maestría resuelve la situación de **PERIODICIDAD Y PREDICCION** presentada en Buendía (2004). En la secuencia de describir el movimiento que representan ciertas gráficas, respecto a la gráfica *b* que corresponde a



Ella dice:

Acerca de la gráfica b, es un cuerpo que se encuentra en un punto *A*, de aquí recorre una distancia pasando por *B* hasta llegar a un punto *C*, regresa al punto *B*, desde *B* se dirige pasando por *C* hasta llegar a un punto *D*, regresa al punto *C*, ...etc. esto con una velocidad casi constante.



En la descripción del desplazamiento hace uso no sólo del desplazamiento del movimiento sino también de la velocidad; así vemos la necesidad del uso de la relación función derivada para caracterizar el movimiento. Creemos que el caracterizar una velocidad "casi constante" es provocada por el comportamiento de los intervalos de tiempo entre dos puntos del regreso del cuerpo, debido a que estos permanecen constantes y hacen que la velocidad del movimiento sea periódica.

Discusión

Hemos estudiado situaciones en donde encontramos aspectos socioepistemológicos que resignifican el conocimiento matemático referente a la relación función-derivadas en escenarios periódicos fortaleciendo de esta manera la socioepistemología de lo periódico. En ellas lo periódico aparece como una propiedad que califica a un comportamiento y no a una función; por ejemplo en la situación 1, lo periódico califica al comportamiento de un movimiento de manera global, es decir, al comportamiento de todas sus variables (velocidad, aceleración, etc.) Al igual que con Poicaré, un movimiento es periódico si todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes, y en la situación relacionadas con la situación de **PERIODICIDAD Y PREDICCION** la participante usa el comportamiento de la velocidad (primera variación) del objeto para calificar el comportamiento del movimiento. Con ello la distinción de las variaciones del movimiento son elementales para calificarlo periódico, por lo tanto ya no es suficiente ver "lo qué varía", si no que es necesario ver "cómo varía". También la distinción de "lo qué varía" y "cómo varía" se aprecia en la forma de describir el fenómeno de una reacción oscilante (la concentración aumenta y disminuye de manera rítmica), debido a que hace notar no sólo el cambio de concentración, sino cómo se da tal cambio, llegando de nuevo a que lo periódico está calificando a un comportamiento; en este caso al comportamiento de una reacción.

En un contexto de movimientos, éstos suelen ser descritos usando todas sus características o variables, es decir, su desplazamiento, velocidad, aceleración y Por lo tanto la derivada es vista como las variaciones sucesivas y no como proceso de iteración. Así el ver a la derivada como variaciones sucesivas de fenómenos de cambios en cierto contexto con significados propios, además de los algebraicos y geométricos asignados por el sistema didáctico, nos da la capacidad de ver todas las variaciones al mismo tiempo y distinguir el comportamiento de cada una, para informarnos de cómo va variando el objeto y no caer en que la proposición *f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica* es verdadera porque el foco de atención esta sólo en la función.

En la situación 3 se transita entre las gráficas las ecuaciones y lo que representan físicamente para explicar y analizar el fenómeno de la glicólisis. Así la predicción, la graficación y la formalización son prácticas sociales que ayudan a una resignificación de la relación $f - f'$ en un escenario periódico.

Conclusiones

En escenarios periódicos, donde se involucran los usos de la función y sus derivadas sucesivas, encontramos que a partir de ciertas prácticas intencionales, como graficar, modelar, predecir o formalizar, los comportamientos periódicos en las variaciones de las funciones adquieren significado en el quehacer científico no exclusivo de la matemática, sino en otros campos del conocimiento que consideran aspectos sociales, institucionales, culturales e históricos. De esta manera damos cuenta que un contexto puramente analítico no basta para estudiar la relación $f - f'$ en un escenario periódico, debido que a través de los usos de la relación es posible transitar de manera natural y articulada en los contextos analítico, gráfico y físico.

En el estudio del movimiento y cambio de fenómenos identificamos lo periódico como una manera de predecir. La predicción como práctica asociada al reconocimiento de lo periódico, permite anticipar comportamientos de la derivada como variaciones en ciertos contextos con significados más allá de los algebraicos y geométricos asignados en el discurso escolar y de esta manera esta práctica hace articular los contextos físico, gráfico y analítico. La modelación, como práctica favoreció la relación de la actividad humana con la actividad matemática, debido a que los modelos son usados como herramientas para argumentar dando cuenta que la matemática, en nuestro caso la relación función-derivadas se nutre de otros campos del conocimiento, donde dicha relación es usada como herramienta para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos biológicos, químicos, físicos, etc.). La derivada no es vista como un proceso de derivación sucesiva sino que tiene significados contextuales que surgen como respuestas para ciertas necesidades. Las situaciones que involucran fenómenos periódicos suelen ser descritas usando todas sus características, es decir, analizar el comportamiento periódico de un fenómeno implica reconocer el fenómeno con todas sus variables y variaciones. En particular los movimientos periódicos son caracterizados mediante su desplazamiento, velocidad, aceleración y en algunos casos se considera también la variación de la aceleración, es decir, la tercera derivada y por lo tanto la derivada es reconocida como las variaciones sucesivas y no como proceso de iteración.

Bibliografía

Aluja, J. (2005). La matemática borrosa en economía y gestión de empresas I**.** *Matematicalia revista digital de divulgación matemática.* 1(3). Recuperado el 30 de abril de 2007 en http://www.matematicalia.net/

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Campos, C. (2003). *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas*. Una aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.

Fernández P. (s.f.) Péndulo y M. A. S. Recuperado el 13 de mayo de 2006 en http://usuarios.lycos.es/pefeco/pendulo6/pend6.htm

Gonzáles, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Mosqueira G., Fuentes A., Martínez C. (2004). Una reacción química oscilante para alumnos de secundaria. Recuperado el 09 de mayo de 2007 en

http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/junio/2nosotros97.htm

Torres N. (2005) Caos en sistemas biológicos II. *Matematicalia revista digital de divulgación matemática* 1(4). Recuperado el 02 de mayo de 2007 en http://www.matematicalia.net/