

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO HERRAMIENTA DE MODELACIÓN EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos

EQUIPO DIDÁCTICA, INFORMÁTICA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (DIAM)

ruthrdz2002@yahoo.fr

Resumen. Los programas de estudio puestos en práctica desde el 2002 para Matemáticas y Física en el último año de bachillerato en Francia resaltan el aspecto utilitario de las Matemáticas como herramienta de modelación para otras ciencias. Con base en la Teoría Antropológica de Chevallard, un análisis de programas y manuales nos ha permitido caracterizar el “proceso de modelación a enseñar” en este nivel escolar así como su transposición hacia un proceso más “escolar”. La puesta en práctica de una situación experimental que propone actividades no habituales para los alumnos nos ha permitido identificar la influencia de las praxeologías existentes en esas clases sobre sus procedimientos. Esta situación también ha puesto en evidencia el papel del “modelo pseudo-concreto” y del “modelo físico” construido por los estudiantes sobre sus procesos de modelación.

Palabras Clave: ecuación diferencial, modelación, transposición.

Introducción

En los últimos tiempos, la sociedad ha privilegiado la utilización de las Matemáticas como disciplina al servicio de otras ciencias. En particular, los programas de estudio puestos en práctica desde el 2002 en Francia para la clase de Matemáticas en preparatoria, resaltan el aspecto utilitario de las Matemáticas como herramienta de modelación en otras disciplinas científicas (Rodríguez, 2003 y 2007). Coulange (1998) distingue dos tendencias importantes existentes alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la modelación: de un lado, enseñar “a través de la” modelación y enseñar “la” modelación; en otras palabras, la modelación puede ser estudiada como herramienta pero también como objeto de

enseñanza. Nosotros situamos nuestro trabajo en la segunda perspectiva, y para el estudio de este objeto “modelación” es necesaria una revisión de trabajos realizados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la modelación en Matemática Educativa.

La aparición de la modelación como objeto de estudio en foros internacionales, como el Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME) y el Congreso Internacional de la Enseñanza de la Modelación y Aplicaciones (ICTMA)¹, desde inicios de la década de los 90’s hasta nuestros días, es una muestra de la importancia y el interés que ha tomado el tema en la comunidad de Matemática Educativa. Por otro lado, es importante resaltar la evolución que ha tenido la descripción del “proceso de modelación” desde los primeros trabajos. En el presente escrito presentaremos la descripción del proceso de modelación que tomaremos como base en nuestro trabajo pero es muy importante mostrar que éste ha sido fuertemente inspirado por otros trabajos anteriormente desarrollados (Blum y Niss, 1991; Coulange, 1998; Henry, 2001).

La descripción del “proceso de modelación” considerado de referencia (figura I) será conformado por ocho etapas las cuales ilustramos a continuación con el siguiente esquema:

¹ Congreso realizado cada dos años desde 1983. Las actas permiten observar una serie de ejemplos de estudios y de contribuciones a este tema en todos los niveles escolares.

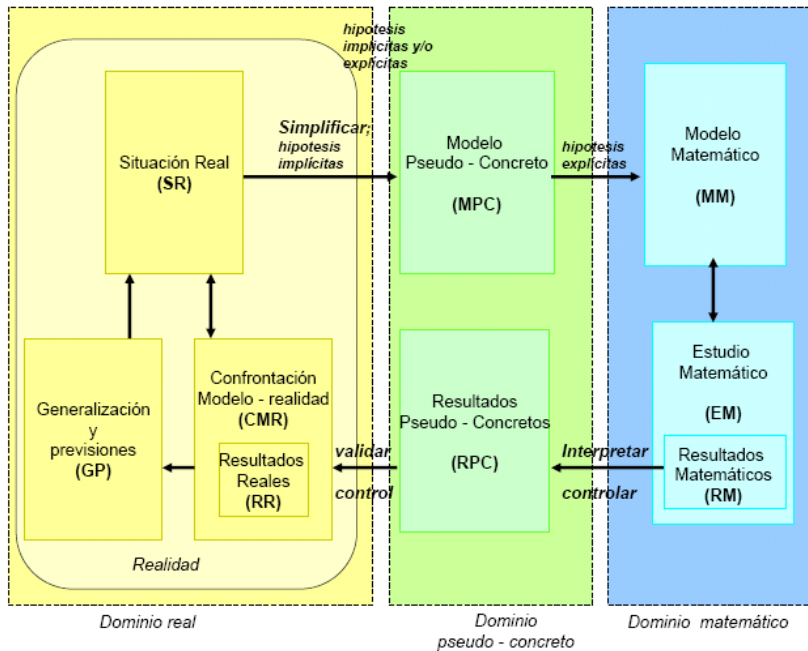


Figura 1

El “modelo pseudo-concreto” de acuerdo a Henry (2001) corresponde a una primera simplificación de la situación original, algunas hipótesis son realizadas por el sujeto de manera explícita, aunque generalmente de manera implícita. La introducción de algunas variables para representar magnitudes que intervienen en el fenómeno a modelar puede tener lugar en ese momento.

Los objetivos del presente trabajo son:

- 1.- Estudiar como “vive” el objeto “proceso de modelación” en el sistema escolar francés
- 2.- Respecto a los alumnos, identificar sus dificultades cuando intentan resolver un problema particular

Para situar nuestro trabajo hemos decidido situar nuestro estudio en el último año de preparatoria en Francia.

Metodología

Para poder estudiar la manera en que “vive” la modelación en el último año de preparatoria, haremos uso de la Teoría de Transposición Didáctica de Chevallard (1991) para estudiar de un lado los programas oficiales de la clase de Matemáticas y por otro lado, cómo esos programas son llevados a la práctica en los manuales. Las preguntas a precisar son:

P1: ¿Qué tipo de transposición (si existe) del “proceso de modelación” tiene lugar en este grado escolar?

P2: ¿Cuáles etapas del “proceso de modelación” de referencia son finalmente abordadas en clase?

De la Teoría Antropológica de Chevallard (1999) tomaremos la noción de praxeología desarrollada entre otros por Artaud y Sahraoui-Kaidi (2004) como una herramienta para realizar nuestro análisis de manuales. En particular, nos interesa precisar el tipo de tareas pedidas a los alumnos así como el tipo de técnicas a utilizar por ellos cuando modelan una situación en particular.

Para responder a nuestra primera pregunta (P1) se realizó una revisión de documentos pedagógicos como programas oficiales y manuales del curso y además se realizaron observaciones en el curso, entrevistas con profesores y del tipo de evaluación propuesta (el tipo de preguntas y problemas).

Un primer análisis del programa oficial de la clase de Matemáticas nos ha permitido elegir a la noción de ecuación diferencial como nuestra herramienta de modelación ya que esta noción es presentada como una herramienta poderosa que permite modelar diversas situaciones de otras disciplinas como la Biología, Química y Física.

El análisis praxeológico de tres manuales de Matemáticas nos ha permitido identificar los tipos de tarea a realizar por los alumnos:

Tipo de tarea	Transición entre las etapas	Descripción
T_{ME}	Modelo Pseudo-Concreto \rightarrow Modelo Matemático	Establecer una ecuación diferencial que modela una situación descrita en términos “pseudo-concretos” (enunciado del ejercicio).
T_{SG}	Modelo Matemático \rightarrow Estudio Matemático	Encontrar la solución general de la ecuación diferencial (gracias a la aplicación de un teorema).
T_{SP}	Modelo Matemático \rightarrow Estudio Matemático	Encontrar la solución particular gracias a una condición inicial (dada en términos matemáticos en el enunciado).
T_{RQ}	Dominio Pseudo-Concreto \leftrightarrow Dominio Matemático	Responder a una pregunta (formulada en términos pseudo-concretos) en base a los resultados matemáticos obtenidos.

En realidad el establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la situación descrita por el enunciado es un tipo de tarea muy raramente pedida a realizar por los alumnos en clase de Matemáticas ya que en ocasiones esta tarea se reduce a “justificar que el modelo es de la forma” donde la ecuación diferencial está propuesta por el enunciado.

Debido a la importancia que tiene la escritura del modelo en el “proceso de modelación”, los resultados del análisis de los manuales de la clase de Matemáticas nos han conducido a considerar extender el dominio de nuestro trabajo al curso de Física, ya que se observó un uso importante de la noción “ecuación diferencial” como herramienta para modelar diversos fenómenos en esta materia, por ejemplo durante el estudio de la Radioactividad, Mecánica (caída libre) y Circuitos eléctricos (RC, RL y RLC). Es justamente en este último tema que decidimos desarrollar nuestra investigación realizando un análisis usando la metodología anteriormente descrita para la clase de Física. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

<i>Tipo de tarea</i>	<i>Transición entre las etapas</i>	<i>Descripción</i>
T_{CIR}	Modelo Pseudo-Concreto → Modelo Físico	Representar la configuración de un circuito eléctrico.
T_{ME}	Modelo Físico → Modelo Matemático	Establecer una ecuación diferencial, que modela la evolución de la tensión en las bornas de un capacitor (U_C) presente en el circuito eléctrico
T_{RED}	Modelo Matemático → Estudio Matemático	Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial (verificando que una función dada en el texto del ejercicio es solución).
T_I	Dominio Pseudo-Concreto ↔ Dominio Físico ↔ Dominio Matemático	Encontrar la función de la intensidad $i(t)$ en el circuito a partir de la función $U_C(t)$.

Los resultados del análisis de los tres manuales de física nos permiten constatar que el esquema de proceso de modelación de referencia debe modificarse (figura II) para incluir otro dominio diferente, el dominio de la Física así como dos nuevas etapas dentro del proceso: el Modelo Físico y Resultados Físicos.

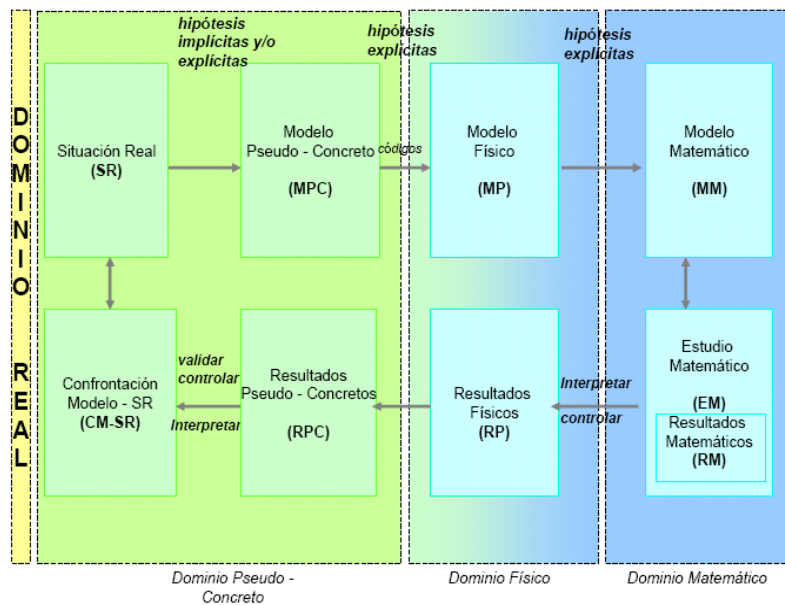


Figura II

En nuestro caso en particular este modelo físico corresponde a la configuración de un circuito eléctrico Resistencia–Capacitor (RC).

Observamos que en esta clase la modelación parece ser llevada a la enseñanza de manera más amplia que en Matemáticas pero aún así se observan tres carencias importantes:

*El tipo de tarea T_{CIR} (representar un circuito) aparece en los manuales pero es un tipo de tareas que podríamos calificar más bien de no habitual (tasa de aparición baja).

*Respecto al establecimiento del modelo matemático aparece como una tarea habitualmente pedida a los alumnos pero con una guía gracias a incisos en cada ejercicio.

*De manera equivalente a la clase de Matemáticas, observamos una ausencia en los ejercicios de la transición Resultados Pseudo-Concretos a la Confrontación Modelo-Situación Real, transición importante en la modelación de acuerdo a ciertos autores (cf. Henry, 2001) y por lo tanto interesante a ser mostrada a los alumnos de un punto de vista didáctico.

Al finalizar el análisis de manuales de Matemáticas y Física para estudiar el “proceso de modelación) se observa que existe una distancia importante entre lo propuesto por los programas y lo llevado a la práctica en el aula para ambas clases.

Para retomar el segundo objetivo del trabajo y estudiar las dificultades de los alumnos cuando realizan una tarea de modelación decidimos crear una situación experimental que representa una actividad de modelación más cercana a nuestra definición (figura II) del proceso de modelación y con base en los resultados encontrados, decidimos considerar tres características para el diseño de nuestra actividad:

- 1) Confrontar a los alumnos a la transición entre la Situación Real + Modelo Pseudo-Concreto hacia la construcción del Modelo Físico.
- 2) Ausencia de guía para el alumno respecto a la escritura del Modelo Matemático (transición del Modelo Físico al Modelo Matemático).
- 3) Confrontar a los alumnos a la transición Resultados Pseudo-Concretos hacia la Confrontación del Modelo con la Situación Real.

La situación experimental consiste en estudiar el funcionamiento de un aparato eléctrico: el desfibrilador cardíaco y a través de un enunciado acompañado de cinco incisos se guía al alumno para responder a la pregunta siguiente: ¿cuál es la oportunidad de un hombre, que presenta un problema cardíaco en plena calle, de salvar su vida con ayuda de un desfibrilador?

Una primera parte del enunciado corresponde a la etapa de la Situación Real ya que es una descripción muy general con ciertos datos no útiles para la modelación a venir. Otra parte del texto corresponde a un Modelo Pseudo-Concreto ya que se usa más terminología de la Física, aparecen ya ciertos datos importantes así como algunas pistas en el texto para la modelación que el alumno proponga. Una imagen incluida podría eventualmente inducir un tipo de respuesta en los alumnos. Sin embargo hasta este momento no se incluyen ningún tipo de variables en el texto. El primer inciso (A) permite la transición del enunciado al Modelo Físico ya que se pide explícitamente “Dibujar la configuración del circuito”. El inciso (B) permite pasar del Modelo Físico al Modelo Matemático gracias al establecimiento de la ecuación diferencial que modela la tensión en las bornas del capacitor (U_C). El inciso (C) corresponde a un tipo de tarea habitualmente observado que es la resolución de la ecuación diferencial. El inciso (D) propone el establecimiento de la función $i(t)$ a partir de la función $U_C(t)$. Finalmente, el inciso (E) es el que permite la confrontación de resultados pseudo-concretos (del modelo) con datos de la situación real gracias a la información mostrada a través de una tabla de datos que permiten al alumno ver las respuestas del cuerpo humano a la intensidad de corriente eléctrica. En la siguiente sección mostraremos y discutiremos algunos resultados observados al llevar a cabo nuestra experimentación.

Resultados y Discusión

La actividad experimental descrita en la sección anterior fue propuesta a 25 alumnos del último año de preparatoria después de la enseñanza del tema “Circuitos Eléctricos”. Los

alumnos trabajaron por parejas (y un equipo de tres personas) aunque se tuvo la limitación de tiempo ya que los alumnos tuvieron solamente una hora para realizar la actividad.

Comentaremos aquí algunas producciones de binomios que resultan particularmente interesantes y posteriormente se comentarán las dificultades de los alumnos en términos de transiciones entre las etapas del proceso de modelación y en términos de praxeologías (tipo de tareas y técnicas) identificadas gracias al análisis de manuales.

Respecto a la respuesta dada para el inciso A observamos que una dificultad de los alumnos es proponer una configuración de un circuito eléctrico donde todos los elementos del mismo corresponden a elementos de la Física (figura III). Esta configuración ha sido calificada por nosotros como “circuito híbrido”. Además, observamos una dificultad para incluir una resistencia en el circuito para representar al tórax del paciente (figura IV) aunque la palabra “resistencia” aparece en el texto de la actividad aunque no en el sentido de la Física.

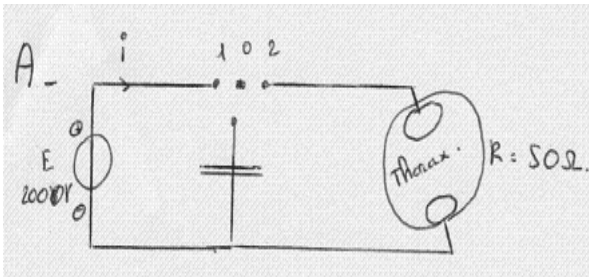


Figura III

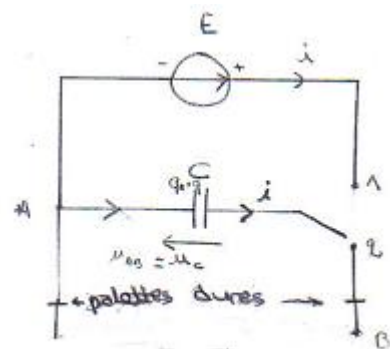


Figura IV

Otros alumnos proponen configuraciones que son totalmente lejanas al dominio de la Física, es decir sus elementos corresponden a objetos “reales” como el desfibrilador y los electrodos (figura V) como por ejemplo la producción siguiente:

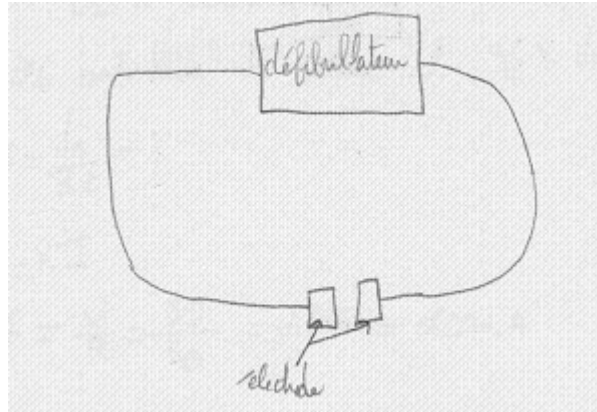


Figura V

Esta dificultad corresponde a la transición del texto de la actividad (Situación Real+Modelo Pseudo-Concreto) hacia el establecimiento del Modelo Físico. No se encontró una técnica asociada a este tipo de tareas en los manuales, de ahí quizá la dificultad de los alumnos para realizarla.

Respecto al inciso B, se observan dificultades de los alumnos para proponer una ecuación diferencial que modela la tensión U_c en el circuito aunque existe una técnica explícitamente enseñada en clase para ello. Ciertos alumnos olvidan relaciones o leyes de la Física para establecer la ecuación o cómo establecer relaciones entre relaciones, en ocasiones utilizan relaciones incorrectas. Algunas parejas de alumnos proponen una ecuación diferencial pero para la carga q del capacitor ($RC \frac{dq}{dt} + q = 0$) aunque esto no corresponde a ninguna técnica enseñada en clase de Física. Finalmente se observa el establecimiento de la ecuación diferencial que modela la evolución de la tensión U_c pero para el caso de la carga del capacitor apareciendo entonces la tensión en las bornas del generador ($RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$, representado aquí por E) cuando para la modelación requerida por la actividad nos interesa el estudio de la descarga del capacitor sobre la resistencia. Podemos comprobar con esto la ausencia de la relación para los alumnos entre el fenómeno físico a estudiar y su matematización.

Respecto al inciso C, que corresponde a resolver la ecuación diferencial (con la posibilidad de aplicar las dos técnicas diferentes: una relativa a la clase de Matemáticas y otra a la clase de Física), se observa una dificultad asociada con la sub-tarea de establecer una condición inicial. Es importante recordar que la condición inicial está la mayor parte del tiempo establecida en términos matemáticos al interior del enunciado en los ejercicios. Esta sub-tarea corresponde a un “ir y venir” entre el dominio Pseudo-Concreto y el dominio Físico o Matemático, de ahí su dificultad. Adicionalmente, ninguna técnica a este respecto ha sido observada en los manuales analizados.

Una última dificultad identificada es respecto al inciso D donde se pedía al alumno establecer una función de la intensidad $i(t)$ con base en la función $U_C(t)$. Aunque se observa una técnica en los manuales de Física, se observa en todos los alumnos una misma respuesta calificada de no aceptable (figura VI) mostrada a continuación:

$U = Ri$ d'où $i = \frac{U}{R}$ avec $U = 2000V$ et $R = 50\Omega$

$i = \frac{2000}{50} = 40A$

On sait que 4% peuvent traverser le cœur -
 $0,4 \times 40 = 1,6A = 1600mA$

Figura VI

Haciendo un uso incorrecto de la ley de Ohm ($U = Ri$) los alumnos finalmente establecen la respuesta “correcta” Sus procedimientos suponen la intensidad constante (cuando no lo es) rompiendo totalmente con las intenciones del programa de este año escolar que pretende mostrar el estudio de sistemas que evolucionan respecto al tiempo.

Conclusiones

Los resultados obtenidos gracias a nuestra experimentación evidencian la importancia de que la transición de una situación real al establecimiento del modelo físico quede a cargo de los alumnos. La riqueza de esta transición corresponde a la transición del “mundo de los objetos y de los eventos” (dominio real en nuestro trabajo) hacia el “mundo de teorías y modelos” (dominio físico o matemático) de acuerdo a los trabajos de Tiberghien et Vince (2004). Nuestros resultados concuerdan con las conclusiones realizadas por estos autores respecto a que esta transición debe estar a cargo de los alumnos si se pretende enseñar la modelación.

Por otro lado, nuestra experimentación nos permite constatar que el establecimiento del modelo pseudo-concreto por los alumnos parece ser un objetivo difícil a lograr en lo inmediato.

La experimentación muestra también la importancia de hacer conocer el proceso de modelación existente en Matemáticas y Física a los profesores de estas dos disciplinas, lo cual representa un punto interesante a desarrollar en cuanto a formación de profesores se refiere para permitir el aprendizaje y la enseñanza de la modelación a nivel preparatoria.

Reconocimientos

Agradezco el apoyo otorgado por CONACYT para la realización de mi tesis doctoral así como el apoyo recibido por el equipo DIAM en Grenoble para el desarrollo de la misma, en particular todo mi agradecimiento a Colette Laborde, directora de tesis. Aprovecho para reconocer el apoyo otorgado por la Catédra de Educación Matemática del Instituto Tecnológico de Monterrey (Campus Monterrey) para asistir a la XI Escuela de Invierno en Didáctica de las Matemáticas.

Bibliografía

Artaud, M. & Sahraoui-Kaidi, L. (2004). *La modélisation comme moyen d'enseigner les mathématiques à des non mathématiciens. Une problématisation didactique*. Trabajo presentado en el « Seminario sobre los métodos de enseñanza de las Matemáticas » en la Universidad de Tebessa, Tebessa, Algérie.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques d'enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Coulange, L. (1998). Les problèmes "concrets à mettre en équation" dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

Rodriguez, R. (2003). *Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S*. Tesis de Maestría, Maestría en Ambientes Informáticos para el Aprendizaje Humano y Didáctica, Universidad Joseph Fourier, Grenoble, France.

Rodriguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis doctoral, Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información, Universidad Joseph Fourier, Grenoble, France.

Tiberghien, A., & Vince, J. (2004). Études de l'activité des élèves de lycée en situation d'enseignement de la physique. In Pugibet, V. et Gettliffe-Grant, N. (Eds.), *Cahiers du Français Contemporain* (10). ENS Editions.