

LIMITACIONES PARA EL APRENDIZAJE DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN EL PRIMER SEMESTRE DE INGENIERÍA EN INSTITUTOS TECNOLÓGICOS

Omar Pablo Torres Vargas y Ana María Ojeda Salazar

DME, CINVESTAV IPN

optv_21@hotmail.com, amojeda@cinvestav.mx

Resumen. *El presente documento tiene como campo de interés las limitaciones que, por parte de los alumnos del primer semestre de ingeniería, tengan para aprender probabilidad y estadística. La etapa inicial de la investigación se centra en la propuesta de los institutos tecnológicos y si ésta satisface las necesidades que al futuro ingeniero se le exijan en el campo profesional. Serán objeto de análisis tanto el programa de estudio y medios que recomienda el sistema de institutos tecnológicos así como su correspondencia con las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975). Por otro lado, la simultaneidad de la introducción de probabilidad y de estadística y del cálculo diferencial e integral plantea la interrogante del uso correcto del último para el estudio de las primeras o si éste se debe posponer. Los recursos semióticos gráficos propuestos o utilizados también son de interés en esta etapa inicial de la investigación.*

Palabras Clave: Ingeniería, aprendizaje, estocásticos, cálculo.

Introducción

El campo profesional del ingeniero de más en más exige conocimientos de probabilidad y de estadística para afrontar problemas prácticos, lo cual demanda del alumno universitario una formación en esas disciplinas para un desarrollo satisfactorio en su futuro desempeño profesional y/o académico. En consecuencia, este estudio, en su etapa inicial, se plantea la interrogante de si esa necesidad se satisface con la propuesta de los institutos tecnológicos de la asignatura “Probabilidad y Estadística” del primer semestre de ingeniería. De la experiencia del presente autor,

quien estudió la carrera de ingeniería electrónica en un Instituto Tecnológico, es común que el orden de sus temas se cambie y se omitan partes.

La experiencia de los psicólogos, educadores y estadísticos a la par, es que una gran proporción de estudiantes, aún en la universidad, no entienden muchos de los conceptos estadísticos básicos que han estudiado. Insuficiencias en las habilidades matemáticas y en razonamiento abstracto que son prerequisites, son parte del problema (Ahlgren y Garfield, 1988).

El contenido típico de un curso introductorio de estadística a nivel universitario incluye: Estadística descriptiva, Teoría de la probabilidad e Inferencia estadística (Borovcnik, 1985). Pero es necesaria una formación continua en estocásticos, desde la educación preescolar hasta la universitaria, que considere sus ideas fundamentales como guía, de manera que el maestro de grados superiores pueda presuponer un dominio intuitivo favorable al tratar temas de estocásticos así como bases para su conocimiento analítico (Heitele, 1975).

Esta investigación prevé tres fases a desarrollar en dos años. La primera, actualmente en curso y tema de lo aquí presentado, corresponde al examen de lo propuesto en el programa de estudio y libros de texto recomendados en él para estocásticos en los institutos tecnológicos. La segunda fase se enfocará en la enseñanza de estocásticos, y la tercera examinará en los estudiantes los resultados de la enseñanza. Las particularidades de la consecución de estas dos últimas habrán todavía que definirse.

Métodos

La primera etapa de la investigación corresponde a una investigación documental, en tanto concierne a las condiciones a las que se somete institucionalmente la formación en probabilidad y en estadística en la carrera de ingeniería electrónica. Para ello, como se viene de señalar, se han considerado su programa de estudio y libros de texto propuestos por los institutos tecnológicos.

Puesto que la asignatura “Probabilidad y Estadística” consta de un solo curso durante el primer semestre de la carrera y es la única referente a estocásticos a lo largo de ésta, la investigación se centra en los temas planteados para este periodo.

La propuesta institucional se ha revisado en cuanto a la correspondencia de programa de estudios y medios que recomienda para su enseñanza y se les ha analizado respecto a las ideas fundamentales de estocásticos señaladas por Heitele (1975).

En el examen de tal programa, se distinguen estocásticos de otros conceptos matemáticos implicados en su estudio para identificar posibles impertinencias por introducciones simultáneas o tardías de los segundos respecto a los primeros, pues es en el nivel universitario donde se enseñan estocásticos por primera vez como disciplina científica (Ahlgren y Garfield, 1988).

Los recursos semióticos gráficos propuestos o utilizados en el programa de estudio y en libros de texto también son de interés, en tanto están en estrecha relación con procesos cognitivos que los estudiantes habrán de manifestar mediante esos recursos como resultado de su comprensión de los temas enseñados (Fischbein, 1975, por ejemplo).

Los términos utilizados para hacer referencia a los estocásticos son motivo de inventario debido a que a algunos de ellos se les dota de sentido distinto si se les aplica a situaciones deterministas (por ejemplo, “variable” en *variable aleatoria*, o “media”).

En consecuencia, el análisis de esta primera fase se efectúa en matrices y los criterios corresponden a lo planteado en la *célula de análisis* de la enseñanza (Ojeda, 2006).

Resultados

En el caso de ingeniería electrónica en el Instituto Tecnológico de Morelia, el programa de estudios no se apega del todo a la descripción de Borovcnik, ya que

comienza con conceptos básicos y distribuciones de probabilidad; es hasta la tercera parte del curso donde se estudia estadística descriptiva, lo cual presenta una incongruencia entre el programa y el libro de texto que recomienda (Spiegel, 1975; Walpole, 1992). Por otro lado, la simultaneidad de la introducción de probabilidad y de estadística y del cálculo diferencial e integral plantea la interrogante del uso correcto del último para el estudio de las primeras, o si éste se debe posponer.

Tabla 1. Identificación de ideas fundamentales implicadas en el programa de estudios

Programa de estudios	Identificación de ideas fundamentales Implicadas
1. Conceptos básicos de probabilidad	Medida de probabilidad Adición de probabilidad Espacio muestra Regla del producto de independencia Combinatoria
2. Distribuciones de probabilidad	Equidistribución y simetría Modelo de urna y simulación Variable estocástica La idea de muestra
3. Estadística descriptiva	Medida de probabilidad Espacio muestra Equidistribución y simetría Combinatoria Espacio muestra La idea de muestra
4. Inferencia estadística	Espacio muestra Combinatoria Variable estocástica

	La idea de muestra
5. Análisis de regresión y correlación	Medida de probabilidad Espacio muestra Equidistribución y simetría Variable estocástica La idea de muestra
6. Análisis de varianza	Medida de probabilidad Espacio muestra Regla del producto de independencia Equidistribución y simetría Combinatoria Modelo de urna y simulación Variable estocástica La idea de muestra

Comúnmente se enseñan estocásticos como disciplina científica por primera vez en el nivel universitario y el curso introductorio se divide en tres áreas: estadística descriptiva, teoría de la probabilidad e inferencia estadística.

Contenido típico de un curso introductorio de Estadística (nivel universitario):

Estadística Descriptiva: Medidas de tendencia central (media, mediana, moda); Medidas de variabilidad (rango, variancia, desviación estándar); Medidas de posición (percentiles, puntuaciones z); Distribuciones de frecuencia y gráficas.

Teoría de la probabilidad: Reglas (adición y multiplicación); Eventos independientes y mutuamente excluyentes; Variables aleatorias; Distribución de probabilidad; La distribución binomial; La distribución normal; Muestreo; Teorema del límite central.

Inferencia Estadística: Estimación de parámetros (media, variancia, proporción, coeficientes de correlación); Prueba de hipótesis. (Garfield, 1988).

El programa que propone el Instituto Tecnológico de Morelia está dividido en seis partes, las cuales son:

1. Conceptos básicos de probabilidad: Definiciones; Axiomas fundamentales de probabilidad.
2. Distribuciones de probabilidad: Distribuciones de probabilidad discretas; Distribuciones de probabilidad continuas; Distribuciones de probabilidad especiales.
3. Estadística descriptiva: Concepto de estadística descriptiva; Distribuciones de frecuencia; Medidas de tendencia central y dispersión; Distribución Weibull.
4. Inferencia estadística: Definiciones; Contraste de hipótesis.
5. Análisis de regresión y correlación: Regresión lineal simple, curvilínea y múltiple; Correlación.
6. Análisis de varianza: Modelos de clasificación en una dirección; El análisis de varianza en la clasificación de un solo sentido; Análisis del modelo de efectos fijos; Comparación entre las medias de los tratamientos; El modelo de efectos aleatorios; Verificación de la adecuación del modelo; Introducción de los diseños factoriales; Definiciones y ventajas de los factoriales; Diseño factorial de dos factores; Modelos aleatorios y mixtos; El diseño factorial general.

Aun cuando las partes del curso son las citadas, el libro de texto nombra los temas de modo diferente puesto que éste tiene como contenido:

1. Probabilidad: Espacio muestra; Eventos; Conteo de puntos muestrales; Probabilidad de un evento; Reglas aditivas; Probabilidad condicional; Reglas multiplicativas; Regla de Bayes.
2. Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad: Concepto de variable aleatoria; Distribuciones discretas de probabilidad; Distribuciones continuas de probabilidad; Distribuciones empíricas; Distribuciones de probabilidad conjunta.
3. Esperanza Matemática: Medida de una variable aleatoria; Variancia y covariancia; Medias y variancias de combinaciones lineales de variables aleatorias; Teorema de Chevyshev.
4. Algunas distribuciones discretas de probabilidad: Introducción; Distribución discreta uniforme; Distribuciones binomial y multinomial; Distribución hipergeométrica; Distribuciones binomial negativa y geométrica; La distribución de Poisson y el proceso de Poisson.
5. Algunas distribuciones continuas de probabilidad: Distribución normal; áreas bajo la curva normal; Aplicaciones de la distribución normal; Aproximación de la distribución normal a la binomial; Distribuciones gamma y exponencial; Aplicaciones de las distribuciones exponencial y gamma; Distribución ji cuadrada; Distribución Weibull.
6. Funciones de variables aleatorias: Introducción; Transformaciones de variables; Momentos y funciones generadoras de momentos; Muestreo aleatorio; Algunas estadísticas importantes; Despliegue de datos; Distribuciones muestrales; Distribuciones muestrales de medias; Distribución muestral de $(n-1)S^2/\sigma^2$; Distribución t ; Distribución F .
7. Estimación: Introducción; Inferencia estadística; Métodos clásicos de estimación; Estimación de la media; Error estándar de una estimación puntual; Límites de tolerancia; Estimación de la diferencia entre dos medias; Estimación de una proporción; Estimación de la diferencia entre dos proporciones; Estimación de la

variancia; Estimación de la razón de dos variancias; Métodos bayesianos de estimación; Teoría de la decisión; Estimación de máxima verosimilitud.

8. Pruebas de hipótesis: Hipótesis estadística; Prueba de una hipótesis estadística; Pruebas de una cola y de dos colas; El uso de valores P en la toma de decisiones; Pruebas relacionadas con una sola media (variancia conocida); Relación con la estimación del intervalo de confianza; Pruebas sobre una sola media (variancia desconocida); Pruebas sobre dos medias; Selección del tamaño de la muestra para la prueba de medias; Métodos gráficos para comprobar medias; Pruebas relacionadas con proporciones; Prueba de la diferencia entre dos proporciones; Pruebas relacionadas con variancias; Pruebas de bondad de ajuste; Pruebas de independencia; Prueba de homogeneidad; Prueba para varias proporciones.

9. Regresión lineal y correlación: Regresión lineal; Regresión lineal simple; Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados; Inferencias acerca de los coeficientes de regresión; Predicción; Selección de un modelo de regresión; Procedimiento del análisis de variancia; Prueba de linealidad de la regresión; Gráficas y transformaciones de datos; Correlación.

En el contenido del libro de texto propuesto (Walpole y Myers, 1992), los elementos de probabilidad están dados desde el inicio y hasta el capítulo 6. A partir de este mismo capítulo comienza lo referente a Estadística con la sección de Muestreo aleatorio.

La importancia declarada de introducir conceptos estadísticos en el currículum escolar, junto con nuestro conocimiento limitado acerca de desarrollo cognitivo, aprendizaje de matemáticas en general y concepciones erróneas en probabilidad y estadística, indica que es imperativo un asalto coherente e intensivo sobre la dificultad del aprendizaje de conceptos básicos en estocásticos.

Al revisar la investigación sobre instrucción en matemáticas y ciencias, Resnick (1983) estimuló la colaboración entre psicólogos cognitivos y especialistas en la disciplina para mejorar la instrucción preuniversitaria en matemáticas y ciencias. Recomendó que la mejora empezara al principio, que enfatizara el razonamiento cualitativo, que se construyera sobre lo que los alumnos ya saben y que confrontara la intuición ingenua directamente. Además de esto, nos parece esencial emprender estudios longitudinales de cómo los estudiantes individualmente se desarrollan en la sofisticación estocástica (Ahlgren y Garfield, 1988).

La probabilidad se define como una función, donde el dominio es el espacio muestra y el codominio es el intervalo cerrado y real $[0,1]$. Esta relación, para el caso de espacios muestra continuos, es comprensible por medio del cálculo diferencial, donde se introduce el concepto de función y, dado que las asignaturas “Cálculo Diferencial e Integral” y “Probabilidad y Estadística” se cursan en un mismo semestre, se plantea un problema de adquisición de los conceptos de estocásticos por parte de algunos alumnos (ver Tabla 2); pero, en contraparte, se plantea también la oportunidad de una reafirmación de los conocimientos sobre los temas tratados en ambas asignaturas para los alumnos de este nivel. Cabe señalar el hecho de que las asignaturas en cuestión se cursen de manera independiente y de que, aparentemente, sus temas se presenten sin relación alguna.

Tabla 2. Distribución paralela de los temas del curso de estocásticos y cálculo diferencial

Programa de probabilidad y estadística	Programa de cálculo diferencial
1. Conceptos básicos de probabilidad	1. Números reales
Definiciones	Clasificación de los números reales
Axiomas fundamentales de probabilidad	Propiedades
	Interpretación geométrica de los números reales
	Desigualdades lineales y cuadráticas y sus propiedades
	Valor absoluto y sus propiedades

2. Distribuciones de probabilidad	2. Funciones
Distribuciones de probabilidad discretas	Definición de función
Distribuciones de probabilidad continuas	Representación de funciones
Distribuciones de probabilidad especiales	Clasificación de las funciones por su naturaleza
	Función uno a uno
	Función inversa
	Funciones logarítmicas
	Clasificación de funciones por sus propiedades
	Operaciones con funciones y composición de funciones
	Traslación de funciones
3. Estadística descriptiva	3. Límites y continuidad
Concepto de estadística descriptiva	Definición de límite
Distribuciones de frecuencia	Propiedades y cálculo de límites
Medidas de tendencia central y dispersión	Límites laterales
Distribución Weibull	Asíntotas
	Límites especiales
	Definición de continuidad
	Propiedades de la continuidad
4. Inferencia estadística	4. Derivadas
Definiciones	Definición de la derivada
Contraste de hipótesis	Interpretación geométrica y física de la derivada
	Reglas de derivación
	Derivada de las funciones exponenciales
	Derivada de las funciones trigonométricas
	Derivada de las funciones compuestas
	Derivada de la función inversa
	Derivada de las funciones logarítmicas

	<p>Derivada de las funciones trigonométricas inversas</p> <p>Derivada de las funciones implícitas</p> <p>Derivadas sucesivas</p> <p>Funciones hiperbólicas y sus derivadas</p> <p>Teorema del valor medio y teorema de Rolle</p>
5. Análisis de regresión y correlación	5. Aplicaciones de la derivada
<p>Regresión lineal simple, curvilínea y múltiple</p> <p>Correlación</p>	<p>Rectas tangente, normal e intersección de curvas</p> <p>Máximos y mínimos (criterio de la primera derivada)</p> <p>Máximos y mínimos (criterio de la segunda derivada)</p> <p>Funciones crecientes y decrecientes</p> <p>Concavidades y puntos de inflexión</p> <p>Estudio general de curvas</p> <p>Derivada como razón de cambio y aplicaciones</p> <p>Problemas de aplicación (optimización y cinemática)</p> <p>Regla de L'Hôpital</p>
6. Análisis de varianza	6. Sucesiones y series
<p>Modelos de clasificación en una dirección</p> <p>El análisis de varianza en la clasificación de un solo sentido</p> <p>Análisis del modelo de efectos físicos</p> <p>Comparación entre las medias de los tratamientos</p> <p>El modelo de efectos aleatorios</p> <p>Verificación de la adecuación del modelo</p> <p>Introducción de los diseños factoriales</p> <p>Definiciones y ventajas de los factoriales</p> <p>Diseño factorial de dos factores</p> <p>Modelos aleatorios y mixtos</p> <p>El diseño factorial general</p>	<p>Definición de sucesión</p> <p>Límite de una sucesión</p> <p>Sucesiones monótonas y acotadas</p> <p>Definición de serie infinita</p> <p>Serie aritmética y geométrica</p> <p>Propiedades de las series</p> <p>Convergencia de series</p> <p>Series de potencia</p> <p>Derivación de las series de potencia</p> <p>Representación de una función en series de potencia</p> <p>Serie de Taylor y serie de McLaurin</p>

Discusión

La postergación, en el programa de estudios de los institutos tecnológicos, de estadística descriptiva luego de conceptos básicos y de distribuciones de probabilidad, supone el desaprovechamiento del enfoque frecuencial como una base intuitiva favorable a la introducción de conceptos probabilísticos (Hogarth, 2002). Esta cuestión merece de atención, además de las ya señaladas en el párrafo de resultados.

Referente a los recursos semióticos propuestos para el curso de “Probabilidad y Estadística”, se puede decir que, tanto en el texto como en los ejercicios, se utilizan signos numéricos, palabra escrita, diagramas de árbol, gráficas, así como hacer uso de los apéndices donde se muestran las tablas relacionadas con las diferentes curvas y que facilitan el cálculo de resultados en los ejercicios. Cabe señalar que los otros conceptos matemáticos requeridos en el tratamiento propuesto de estocásticos son los relacionados con la aritmética, notación de teoría de conjuntos, números reales, en específico los números naturales, porcentajes y las distintas operaciones con fracciones.

Conclusiones

Las insuficiencias en habilidades matemáticas y en razonamiento abstracto por parte de los estudiantes universitarios es clave del hecho de que no entienden muchos de los conceptos estadísticos básicos que se estudian en este nivel académico (Ahlgren y Garfield, 1988). Se deberá hacer corresponder las ideas señaladas por Heitele (1975) con el programa de estudios que propone el sistema de Institutos Tecnológicos. Es notorio un desfase de la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral respecto de estocásticos y se propone una mejor delimitación de los programas de ambas asignaturas de modo que se armonice la correspondencia en los temas de una con la

otra. Para estudiar la cuestión de nuestro interés, se ha requerido la sistematización de la *célula de análisis* como guía para este estudio dirigido (Ojeda, 2006). En esta primera fase de la investigación se pretende cubrir la propuesta institucional al revisar los libros de texto recomendados y los criterios de análisis que surgen de ésta: Ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos para organizar y tratar los datos, situaciones y contextos y términos empleados.

Reconocimientos

Agradecemos a:

El Instituto Tecnológico de Morelia, en particular al departamento de ciencias básicas, el apoyo con los programas de estudio actuales y su disposición a devenir escenario para la consecución de la presente investigación.

A Conacyt por el apoyo otorgado para el desarrollo de esta investigación (becario No. Reg. CVU: 228728) dentro del Programa de Maestría en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN.

Bibliografía y Referencias

- Ahlgren, A.; Garfield, J. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19, No. 1, págs. 44-63.
- Borovcnick, M.; Kapadia, R. (1991). *Chance Encounters: Probability in Education*. Kluwer Academic Publishers, págs. 135-167.
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking*. Reidel, Holanda.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, págs. 187-205, Reidel, Holanda.
- Hogarth, R. M. (2002). *Educación la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. Paidós, Barcelona.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Santillana; Cinvestav del IPN. México, págs. 195-214.

Spiegel Murray, R. (1975). *Probabilidad y Estadística*. Ed. McGraw-Hill.

Walpole, R.; Myers, R. (1992). *Probabilidad y estadística*. Cuarta Edición; Ed. McGraw-Hill.