Cañadas, M. C. y Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 147-154). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE CARÁCTER INDUCTIVO

Mª Consuelo Cañadas Santiago mconsu@ugr.es,

Encarnación Castro Martínez encastro@ugr.es

Resumen

En este trabajo se analizan los errores que cometen los sujetos al realizar una actividad relacionada con problemas matemáticos de carácter inductivo. Para ello, se detectan los errores, se explica el proceso que han seguido los sujetos en la resolución errónea del problema y se procede a su clasificación.

Razonamiento inductivo y el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas

Consideramos el razonamiento inductivo como una vía para acceder al conocimiento matemático en todos los niveles educativos.

El razonamiento inductivo es la forma de pensar adoptada para producir afirmaciones y alcanzar conclusiones que están apoyadas en unos casos particulares que se pueden conocer. El proceso inductivo abarca desde el trabajo con casos particulares hasta la formulación de una conjetura para el caso general (Cañadas, 2002).

Problemas matemáticos de carácter inductivo

Un problema es “una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución” (Lester, 1983; citado por Pozo et al, p. 17). Un problema se diferencia de un ejercicio en que para éste último, se disponen y se utilizan mecanismos o estrategias que llevan de forma inmediata a la solución. La resolución de un problema es el proceso que comienza con el planteamiento del problema y finaliza con la resolución del mismo. En este trabajo nos centramos en los problemas matemáticos.

La resolución de problemas es considerada por Segovia & Rico (2001) como un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor. “La resolución de problemas matemáticos es una actividad altamente formativa por los conocimientos, las destrezas y los tipos de razonamiento que en ella se ponen en juego” (Callejo, p. 91).

Los problemas matemáticos se pueden clasificar atendiendo al razonamiento que tiene que realizar el sujeto. En este sentido, hay problemas cuya resolución se apoya en un razonamiento de carácter deductivo y otros problemas cuyo razonamiento básico es de carácter inductivo. Nuestro trabajo se centra en los problemas matemáticos que se basan en razonamiento inductivo.

Los errores en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas

Error es el desacierto o equivocación en cierta cosa (Moliner, 1986). Pensamos que el estudio de los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de gran relevancia porque, entre otras cosas, nos permite conocer la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales (Borasi, 1987). En este sentido, utilizaremos los errores como punto de partida para la exploración del razonamiento matemático inductivo.

Tomamos los trabajos de Radatz (1979; 1980) para clasificar los errores que detectamos en el trabajo de los sujetos. Nuestros objetivos son algunos de los que cita este autor (Radatz, 1980): listar los errores que se hayan localizado, calcular la frecuencia de aparición de un error y clasificar los errores que aparezcan. Además, este autor resalta el interés de investigar los errores que cometen los alumnos en la resolución de problemas matemáticos y de investigar errores que no sean los meramente aritméticos, a los que se han dedicado la mayoría de los trabajos que menciona. Con base en estas ideas, tomaremos la clasificación que hace Radatz (1979) desde el punto de vista del procesamiento de la información:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener la información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de destrezas, hechos y conceptos previos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

También vamos a considerar que, aunque algunas de las respuestas sean erróneas, los errores pueden no ser tales para algunas condiciones específicas del problema.

Descripción de la actividad

<u>Sujetos</u>

El grupo de alumnos que participó en la actividad lo conformaban 40 trabajadores del Personal de Administración y Servicios de la Universidad de Granada. Estos sujetos estaban inscritos en un curso de formación humanística. De los 40 alumnos, 30 han completado con éxito estudios primarios, 10 cursaron estudios de secundaria y ninguno de ellos ha estudiado en niveles universitarios.

<u>Actividad</u>

La actividad consistió en responder a un cuestionario que contiene diez tareas no rutinarias, de carácter inductivo (tareas para las que el alumno no conoce estrategias que le lleven a la solución de una forma directa pero que no presentan un enunciado en el que se les plantea una situación problemática). Las dos últimas tareas son problemas. Todas las tareas se han elegido según dos de las variables consideradas por Castro (1995). Estas variables son el *tipo de representación* empleada y *tipo de trabajo requerido*.

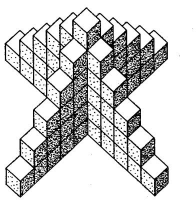
El tiempo máximo de trabajo que dedicaron los alumnos a realizar el cuestionario fue de una hora y media.

Problemas propuestos

En este trabajo nos centramos en la segunda parte del cuestionario al que hemos hecho mención, que está constituido por dos problemas. Hemos de tener presente que previamente habían realizado 8 tareas no rutinarias sobre secuencias numéricas que involucraban el razonamiento inductivo.

Los problemas son los que reproducimos a continuación:

1. Se está organizando un torneo en el que participan 22 equipos. En el torneo, cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos veces – uno en casa y otro fuera-. El organizador quiere saber cuántos partidos se van a jugar.
2. Observa la siguiente torre. Es la llamada Torre de Skeleton:



- ¿Cuántos cubos se necesitan para construir esta torre?

- ¿Cuántos cubos se necesitan para construir una torre como esta, pero con 12 cubos de altura?

- Explica cómo has hecho para llegar a la respuesta de la anterior pregunta.

- ¿Cómo calcularías el número de cubos necesario para una torre con n cubos de altura?

<u>Comparación de los dos problemas</u>

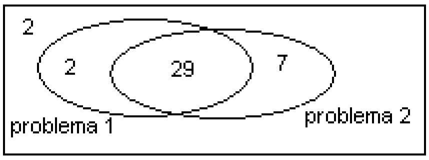
Como observación general, el primer problema está más cercano a la vida cotidiana de los alumnos que el segundo.

Respecto al tipo de representación, en el primer problema no aparece representación adicional al enunciado del problema. Para el segundo problema aparece una representación pictórica (la Torre de Skeleton).

En cuanto al tipo de trabajo que se les pide a los alumnos en relación con el razonamiento inductivo, en el primer problema deben realizar un razonamiento numérico simple. En el segundo problema se les plantean cuatro cuestiones que responden al proceso de razonamiento inductivo desde el trabajo con un caso particular hasta el caso general. Los cuatro apartados responden respectivamente al caso particular que se les presenta, a un término concreto de una secuencia dentro de la que está el caso particular presentado (interpolar), explicar la regla que se sigue en la interpolación (explicar regla) y calcular el término general de la secuencia (generalizar).

Resultados

En el siguiente diagrama se muestra el número de alumnos (sobre el total de 40) que trataron de resolver los dos problemas:



Problema 1

De los 31 alumnos que responden al primer problema, 2 dan el resultado numérico correcto (462). Uno de ellos lo hace por el procedimiento correcto (22x21), mientras que el otro no. 29 dan una solución errónea a este problema. Consideramos soluciones erróneas significativas las soluciones que aparecen con frecuencia mayores que 1. Indicamos estas soluciones a continuación, con su frecuencia absoluta asociada entre paréntesis: 42 (14), 44 (5), 242 (2) y 84 (2).

Problema 2

Los resultados globales de los 36 alumnos que dieron respuesta a alguno de los cuatro apartados del problema 2 son:

Tabla 1

	Ap. 1	Ap. 2	Ap. 3	Ap. 4
No contestado	0	4	8	27
Bien	21	5	7	0
Mal	15	27	21	9

Para los dos primeros apartados resaltamos las soluciones erróneas que aparecen en más de un alumno. En el primer apartado (cuya respuesta correcta es 66) cinco sujetos dan 61 cubos como solución y dos hacen lo propio con 60 cubos.

Las soluciones erróneas (distintas de 276 cubos) con frecuencia absoluta mayor que uno –que aparecen entre paréntesis– correspondientes al segundo apartado son: 132 (8), 312 (2), 265 (2) y 192 (2).

Utilizaremos las explicaciones dadas por los propios alumnos en el tercer apartado para identificar los tipos de errores que han cometido en los dos apartados anteriores.

Las respuestas erróneas dadas en el apartado 4 son en ocho casos explicaciones sin sentido en las que muestran no dominar el lenguaje algebraico. Sólo en un caso hay un intento de encontrar una fórmula en la que aparezca “n” para el término general.

Errores en los dos problemas

Todos los sujetos reconocieron disponer de tiempo suficiente para la realización de la actividad.

En la tabla 2 se muestran los errores detectados en los dos problemas según la clasificación de Radatz (1979):

		Errores debidos a				
		Dificultades lenguaje	Dificultades al obtener información espacial	Aprendizaje deficiente de destrezas, hechos o conceptos	Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes
Problema 1		23	0	1	1	0
Problema 2	Ap. 1	0	7	0	15	0
	Ap. 2	0	4	0	0	0
	Ap. 3	28	0	0	21	0

<u>Errores en el problema 1</u>

Uno de los dos alumnos que llegan al resultado numérico correcto incurre en un error de procedimiento. Este sujeto es el único que comete un error debido a una asociación incorrecta que se deriva de relacionar este problema con otros similares que haya resuelto y que no se resuelva por el mismo procedimiento. Concluye que cada equipo juega 42 partidos y realizando 42x11 llega al mismo resultado numérico correcto basándose en una analogía que en este caso ha funcionado por azar.

Hay veintitrés sujetos que incurren en error debido a dificultades en el lenguaje, dificultades al traducir desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema formal en el lenguaje matemático. Catorce de ellos dieron 42 partidos como solución al primer problema. Consideraron que cada equipo juega con todos excepto con él mismo (21) y que cada uno de ellos juega un partido en casa y otro fuera (21x2). En este razonamiento no se consideran todos los cruces posibles entre los 22 equipos, lo que lleva a una solución errónea. Hay cinco alumnos que tampoco consideran todos los cruces posibles y, además, no tienen en cuenta que un equipo no puede jugar consigo mismo (22x2).

Los dos sujetos que dan 242 como respuesta han realizado la operación 22x11.

Hay dos alumnos que consideran que se juegan 84 partidos. El primero de ellos comete un error al sumar, puede ser debido a una distracción momentánea o a un aprendizaje deficiente de una destreza matemática. Ambos incurren en un error debido a dificultades del lenguaje al interpretar el enunciado.

Ninguno de los alumnos recurre a ningún tipo de representación gráfica que pudiera ayudarlos a la interpretación del enunciado. En este sentido, y atendiendo a que los errores más frecuentes se han debido a que no han considerado todos los cruces posibles entre los equipos, facilitaría el trabajo una tabla de doble entrada en la que aparecieran en ambas entradas todos los equipos, o un diagrama de flechas o alguna representación similar.

Errores en el problema 2

En la tabla 1 se observa que, según se avanza en el proceso de generalización, mayor es el número de sujetos que no contestan a las preguntas y menor es el número de respuestas correctas.

Hay siete sujetos que fallan debido a dificultades para obtener información espacial de la representación gráfica. Dos de ellos no cuentan los cubos de la columna central. Cinco de los alumnos no cuentan los cubos que hay debajo del cubo más alto que se observa. Aunque en el enunciado no se especifica, se puede deducir observando la construcción de la torre que debajo del cubo más alto hay más cubos.

En el trabajo de interpolación requerido por el segundo apartado, quince de los veintisiete alumnos que dan una respuesta errónea, fallan al considerar que para construir una torre de 12 cubos de altura máxima se necesitarán el doble de los cubos que para la torre de 6 cubos de altura máxima. Estos errores son debidos a asociaciones incorrectas, ya que consideran que se trata de un problema de proporcionalidad directa y que como la altura de la torre aumenta en razón 2, de igual modo deben aumentar el número de cubos necesarios.

Dos sujetos vuelven a cometer un error asociado a la dificultad de obtener información espacial y no cuentan los cubos que hay debajo del más alto en el segundo apartado.

También debido a dificultades en la obtención de información espacial cometen errores los que dan 312 cubos como solución. Estos sujetos han considerado la torre dividida en cuatro partes y cada una de ellas comienza con una columna de 12 cubos de altura y va disminuyendo hasta que termina con una columna de 1 cubo de altura. De este modo están contando la torre central de 12 cubos cuatro veces, cuando sólo debería aparecer una vez.

Por último, mencionar los dos sujetos que interpretan el enunciado de forma diferente a la esperada. Nuestro objetivo era que consideraran una torre con altura doce y que conforme se alejaran de esta columna central, la altura vaya disminuyendo a razón de un cubo por columna hasta llegar a una columna formada por un solo cubo. Sin embargo estos sujetos interpretan que la torre está formada por una columna central que determina la altura según su número de cubos y, disminuyendo a razón de un cubo por columna, hay otras cinco columnas en cada uno de los cuatro lados que se observan en el dibujo. Así, dan como respuesta 195 como resultado de realizar 12+4(11+10+9+8+7). Lo que pudiera ser detectado como un error en primera instancia, es una interpretación diferente a la que se esperaba al no haber hecho una definición general de la torre que se ha presentado.

Veintiocho sujetos que dieron contestación errónea al dar la explicación de la regla que habían seguido en los dos apartados previos se han encontrado dificultades en la lectura e interpretación de lo que querían expresar. Veintiuno de estos sujetos manifiestan que en el segundo apartado, el número de cubos debe ser el doble del número de cubos que en el primer apartado (asociación incorrecta).

Aunque la mayoría de los errores en el segundo problema se deben a dificultades para obtener la información espacial, hay algunos casos para los que la representación facilita la explicación que dan para el apartado 3 y, sin embargo no han contestado correctamente en el apartado 2.

Por último, en el cuarto apartado se les propone trabajar para el caso general de la torre, con n cubos de altura. Ninguno de los alumnos responde con éxito. Todos los alumnos que no contestaron a este apartado (veintisiete) manifestaron no saber cómo trabajar con la “n”. De los nueve alumnos que contestaron, sólo uno escribió algo coherente. Este apartado es demasiado difícil para el nivel de conocimientos que tienen estos sujetos.

Conclusiones

La actitud de los estudiantes fue de predisposición al trabajo, se mostraron interesados y motivados durante el desarrollo de la actividad. A ninguno de los alumnos le resultó evidente la resolución de los problemas propuestos y eso lo vieron como un reto.

La representación pictórica ha invitado y motivado a los estudiantes a tratar de resolver los problemas, ya que son más alumnos los que han intentado resolver el segundo problema y no han contestado el primero que los que han hecho lo contrario. A pesar de este hecho y de las numerosas ocasiones en las que la representación gráfica fue usada en las clases de matemáticas a las que asistieron, ninguno de los alumnos trató de usar una representación distinta a la numérica para resolver el problema 1.

El segundo problema nos ha dado más información sobre los errores que cometen los alumnos en el proceso resolución de problemas de carácter inductivo, ya que el propio enunciado los va guiando desde el caso particular hasta la generalización.

Los errores deben ser analizados cautelosamente porque lo que puede ser observado como tal en primera instancia, puede que no lo sea tras el análisis. Esto puede tener implicaciones tanto en el proceso de enseñanza y aprendizaje en general como en otras situaciones como la evaluación y la investigación.

Este trabajo pone de manifiesto cómo el análisis de los errores ayuda a reflexionar sobre el enunciado de un problema, sobre la adecuación del mismo a los sujetos que lo van a trabajar y sobre el contenido matemático que se trabaja en su resolución.

Referencias

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics 7*, 3. pp. 2-9. Montreal: FLM Publishing Association.

Callejo, M. L. (1987). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Narcea.

Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por estudiantes de Secundaria.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Moliner, M. (1986). *Diccionario del Uso del Español*. Madrid: Editorial Gredos.

Pozo, J. I., del Puy, M., Domínguez, J., Gómez, M. A. & Postigo, Y. (1994). *La solución de problemas.* Madrid: Santillana.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students’ errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics 1* (1), 16-20.

Segovia, I. & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.