REDIMAT
Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria

Carmen Batanero[1], Emilse Gómez[2], Luis Serrano[1], & José Miguel Contreras[1]

1) Universidad de Granada, Spain
2) Universidad Nacional de Colombia

Date of publication: October 24th, 2012

To cite this article: Batanero, C., Gómez, E, Serrano, L.,& Contreras, J.L. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. Journal of Research in Mathematics Education, 1(3), 222-245. doi: 10.4471/redimat.2012.13

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.13

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 1 No. 3 October 2012 pp. 222-245.

Understanding of Randomness by Prospective Primary School Teachers

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Emilse Gómez
Universidad Nacional de Colombia

Luis Serrano
Universidad de Granada

José Miguel Contreras
Universidad de Granada

Abstract

Current curricular guidelines for probability at Primary school level imply the need for a specific training of prospective teachers, which should be based on the previous assessment of their training needs. In order to contribute to this need, in this paper we present the analysis of responses by 157 Spanish prospective teachers to an open question, taken from previous research on subjective perception of randomness. The results show a mixture of correct and wrong conceptions, some of which parallel some historical conceptions of randomness. Teachers' educators could start from these intuitions to help prospective teachers advance to a broader meaning of the concept, adequate for their future teaching responsibility.

Keywords: teacher training, randomness, assessing conceptions

2012 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2012.13

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 1 No. 3 October 2012 pp. 222-245.

Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Emilse Gómez
Universidad Nacional de Colombia

Luis Serrano
Universidad de Granada

José Miguel Contreras
Universidad de Granada

Abstract

Las nuevas directrices curriculares para la probabilidad en la Educación Primaria requieren una formación específica de los futuros profesores, que ha de estar basada en la evaluación previa de sus necesidades formativas. Con objeto de contribuir a dicha formación, en este trabajo se analizan las respuestas abiertas a un problema utilizado en las investigaciones sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad. Los resultados muestran una mezcla de concepciones correctas e incorrectas, algunas de las cuáles son paralelas a las que el concepto de aleatoriedad ha recibido a lo largo de su historia. El formador de profesores podría partir de estas concepciones y hacerlas progresar para que los futuros profesores adquieran un significado completo del concepto, que les capacite para su futura labor docente.

Keywords: formación de profesores, aleatoriedad, evaluación de concepciones

2012 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2012.13

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en la educación secundaria en los últimos 20 años, su introducción desde los 6 años en los diferentes ciclos de la Educación Primaria es más reciente, y pretende proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (MEC, 2006).

Una condición para asegurar el éxito de la enseñanza de la probabilidad en este nivel es la adecuada preparación de los profesores de Educación Primaria, para lo que se requiere una evaluación previa de sus necesidades formativas (Franklin y Mewborn, 2006).

Este trabajo trata de contribuir a esta necesidad, presentando los resultados de un estudio sobre las propiedades que una muestra de 157 futuros profesores de Educación Primaria asigna a las secuencias de resultados aleatorios. La evaluación se realiza a partir del análisis de las respuestas abiertas a un ítem utilizado por Green (1983) en una investigación con estudiantes ingleses de entre 11 y 16 años y por Cañizares (1997) en otro estudio con niños españoles de 11 a 14 años. Se comparan los resultados con los de estos autores y se evalúan las concepciones subyacentes sobre la aleatoriedad, siguiendo la clasificación propuesta por Batanero y Serrano (1999).

En lo que sigue se presentan los fundamentos del trabajo, el método y sus resultados, finalizando con algunas implicaciones para la formación de profesores.

Fundamentos del Estudio

Significados del Concepto de Aleatoriedad a lo Largo de su Historia

La aleatoriedad se ha interpretado de forma diferente en distintos momentos históricos e incluso en la actualidad se resiste a una definición sencilla (Zabell, 1992; Bennet, 1998; Liu y Thompson, 2002; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Exponemos a continuación algunos significados que se le han atribuido, que nos permitirán comprender mejor las concepciones de los futuros profesores.

Aleatoriedad y causalidad.

En la antigüedad, y hasta comienzos de la Edad Media, se usaron dispositivos aleatorios para predecir el futuro o tomar decisiones, sin una idea científica de aleatoriedad. En este periodo, la aleatoriedad se relacionó con la causalidad y se concibió como el opuesto de algo que tiene causas conocidas (Bennet, 1998).

Liu y Thompson (2002) indican que las concepciones de aleatoriedad y determinismo se mueven a lo largo de un continuo epistemológico, uno de cuyos extremos corresponde a la creencia de que los fenómenos aleatorios son reflejo de la ignorancia humana, y no tienen una existencia objetiva. Esta visión aparece en Aristóteles, quien consideró que el azar resulta de la coincidencia inesperada de dos o más series de causas independientes (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). En el otro extremo se encuentra la creencia de que la aleatoriedad es inherente a la naturaleza, aceptando la existencia del azar irreductible. Poincaré (1936) ejemplifica este punto de vista citando, como ejemplo, el movimiento Browniano, donde fenómenos aleatorios a nivel microscópico originan una regularidad de fenómenos macroscópicos, que puede ser descrita por leyes deterministas.

La ignorancia de las leyes que gobiernan ciertos fenómenos naturales, sin embargo, no necesariamente involucran la aleatoriedad; como indica Ayer (1974), un fenómeno sólo se considera aleatorio si se comporta de acuerdo con el cálculo de probabilidades, incluso después de identificar los factores que regulan el fenómeno.

Aleatoriedad y probabilidad.

Al comenzar el estudio matemático de las probabilidades se relacionó la aleatoriedad con la equiprobabilidad (por ejemplo, en el *Liber de Ludo Aleae* de Cardano); ello fue debido a que los primeros estudios sobre probabilidad estuvieron relacionados con juegos de azar donde todos los resultados elementales eran equiprobables.

Batanero y Serrano (1999) indican que también actualmente la aleatoriedad se relaciona con la probabilidad, aunque un objeto aleatorio se definirá en forma diferente, dependiendo de la concepción subyacente de probabilidad. Si se defiende la asignación clásica de probabilidad, un suceso elemental sería aleatorio, si su probabilidad es la misma que la de cualquier otro suceso del mismo experimento (Lahanier- Reuter, 1999). Aunque esta definición es suficiente para los juegos de azar basados en dados, monedas, cartas, extracción de bolas en urnas, etc., Kyburg (1974) indica que impone condiciones excesivas y por ello es difícil de aplicar. Sólo podríamos decir que un suceso es aleatorio, si el espacio muestral es finito. Si fuese infinito, la probabilidad de cada suceso es siempre nula.

Cuando desplazamos la aplicación de la probabilidad a situaciones del mundo físico o natural, por ejemplo, al tratar de prever el color de ojos de un recién nacido, no siempre podemos aplicar el principio de equiprobabilidad. Podríamos considerar en estos casos que un suceso es aleatorio si la frecuencia relativa de ocurrencia se estabiliza a la larga, usando la concepción frecuencial de probabilidad. Tendríamos, sin embargo, el problema teórico de decidir el número necesario de experimentos para considerar que, a partir de este número, habríamos probado suficientemente el carácter aleatorio del suceso (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

En estas dos acepciones la aleatoriedad es una propiedad "objetiva" de cada elemento de una clase. Kyburg (1974) critica esta visión y propone una interpretación de la aleatorie-dad compuesta de cuatro términos, que son los siguientes:

- Un objeto que es miembro de un conjunto o colectivo;
- El conjunto del cual el objeto es un miembro (población o colectivo);
- La propiedad con respecto a la cual queremos estudiar la aleatoriedad del objeto;
- El conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

En esta interpretación el mismo objeto puede ser o no considerado como aleatorio, dependiendo de la persona; por tanto la aleatoriedad tiene un carácter subjetivo, en consonancia con la concepción subjetiva de la probabilidad, adecuada en las situaciones en que poseemos cierta información que puede cambiar nuestro juicio sobre la probabilidad de un suceso (Fine, 1973).

Formalización de la aleatoriedad.

A finales del siglo XIX, los desarrollos teóricos de inferencia estadística y la publicación de tablas de números pseudo-aleatorios llevan a la distinción entre un proceso aleatorio y una secuencia de resultados aleatorios (Zabell, 1992). Aunque la aleatoriedad es una propiedad de un proceso, solo se puede valorar si el proceso es aleatorio o no mediante la observación de sus resultados (Johnston-Wilder y Pratt, 2007). Esta discusión llevó a la formalización del concepto de aleatoriedad (Fine, 1973).

La propuesta de von Mises (1928/1952) se basó en considerar aleatorio un proceso si es imposible encontrar un algoritmo que nos permita predecir sus resultados. En la práctica, se considera aleatorio un proceso si una secuencia de resultados del mismo ha pasado las pruebas estadísticas suficientes (que tratan de probar el carácter no aleatorio del proceso). Sin embargo, como en toda prueba estadística hay posibilidad de error, nunca podemos estar totalmente seguros de la aleatoriedad de una secuencia finita de resultados, sino solo tomamos una decisión con respecto a su aleatoriedad con referencia a los resultados de las pruebas realizadas. Esto explica por qué una secuencia aleatoria generada por ordenador (que es producida mediante un algoritmo determinista) puede ser considerada aleatoria si pasa las pruebas necesarias (Harten y Steinbring, 1983).

Kolmogorov definió la aleatoriedad de una secuencia en base a su complejidad computacional (Zabell, 1992). En este enfoque, una secuencia debería ser aleatoria si no puede ser codificada en una forma más simple (usando menos caracteres) y la ausencia de patrones es su característica esencial. El número mínimo de signos necesario para codificar una secuencia particular da una escala para medir su complejidad, por tanto esta definición permite una jerarquía en los grados de aleatoriedad para diferentes secuencias. Es importante resaltar que tampoco en este enfoque existe la aleatoriedad perfecta, que es, por tanto, sólo un concepto teórico.

Percepción Subjetiva de la Aleatoriedad

La investigación sobre percepción de la aleatoriedad ha sido muy abundante, tanto con niños como con sujetos adultos. Falk y Konold (1997) clasificaron las tareas propuestas en estas investigaciones en dos grandes grupos: (a) Tareas de generación, en las que se pide al sujeto generar secuencias que simulen una serie de resultados de un proceso aleatorio típico, como el lanzamiento de una moneda; y (b) tareas de reconocimiento, donde el sujeto debe elegir entre varias secuencias, indicando cuál considera aleatoria.

Una de las principales conclusiones de estos estudios es que incluso los adultos tienen dificultades para producir o percibir aleatoriedad (Falk, 1981; Falk y Konold, 1997; Nickerson, 2002); encontrándose sesgos sistemáticos en sus razonamientos. Por ejemplo, algunos adultos muestran la falacia del jugador, o creencia que la probabilidad de un suceso decrece cuando el suceso ha ocurrido recientemente, sin reconocer la independencia de los ensayos repetidos (Tversky y Kahneman, 1982). Estos sujetos tienden a rechazar secuencias con rachas largas del mismo resultado en tareas de percepción, y consideran aleatorias las secuencias con un exceso de cambios entre los diferentes resultados (Falk, 1981; Falk y Konold, 1997).

Estos sesgos se han encontrado también en niños, a pesar de que Piaget e Inhelder (1951), pensaron que al alcanzarse la adolescencia, se llega a comprender la convergencia, es decir, la regularidad global y la variabilidad local de una secuencia de resultados aleatorios de un mismo proceso. Sin embargo, los resultados de Green (1983) en una amplia muestra de chicos de entre 11 y 16 años contradicen esta teoría e indican que el reconocimiento de la aleatoriedad no mejora con la edad ni en las tareas de generación ni en las de reconocimiento de secuencias aleatorias. El autor indica que los chicos comprenden la equiprobabilidad de resultados en experimentos tales como lanzar una moneda, pero no la independencia de ensayos. Basan su reconocimiento de secuencias aleatorias en la búsqueda de patrones en los resultados, número de rachas del mismo resultado y frecuencias de resultados, que no siempre se asociaron en forma correcta a aleatoriedad o determinismo. Estos resultados fueron replicados por Cañizares (1997) con niños españoles.

Batanero y Serrano (1999) analizaron las respuestas de 277 estudiantes de secundaria (14 y 17 años) a algunos ítems sobre percepción de aleatoriedad en secuencias aleatorias lineales y bidimensionales sugiriendo que algunos estudiantes presentan concepciones sobre la aleatoriedad equivalentes a algunas de las concepciones históricas descritas en el apartado 2.1. El objetivo del presente trabajo es analizar si dichas concepciones también se presentan en futuros profesores, con la finalidad de tenerlas en cuenta en la organización de su formación en probabilidad.

Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores

Pocas investigaciones están relacionadas con la comprensión de la aleatoriedad por parte de los futuros profesores, y las que existen indican que esta comprensión es pobre. Así, Begg y Edwards (1999) en un trabajo con 22 profesores en ejercicio, encontraron que la tercera parte tenía dificultad con la idea de suceso equiprobable y muy pocos comprendieron el concepto de independencia. Batanero, Cañizares y Godino (2005) identificaron tres sesgos en el razonamiento probabilístico en una muestra de 132 profesores en formación de Educación Primaria: la heurística de la representatividad o confianza excesiva en las pequeñas muestras (Tversky y Kahneman, 1982), el sesgo de equiprobabilidad o creencia que todos los sucesos aleatorios son equiprobables (Lecoutre, 1992) y el enfoque en el resultado o dificultad de interpretar una pregunta de probabilidad en términos probabilísticos (Konold, 1991).

Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) analizaron las respuestas de 57 profesores de Educación Primaria a un cuestionario en que se describe verbalmente varios sucesos y se pregunta si se consideran aleatorios. En general, los participantes mostraron una concepción incompleta de la aleatoriedad, que se refleja, en la mayoría de casos, en argumentos causales y falta de reconocimiento de situaciones aleatorias cotidianas (más allá de juegos de azar). Muchos participantes consideraron deterministas fenómenos aleatorios, si se pueden identificar causas que lo influyen (por ejemplo en meteorología). Entre las propiedades correctamente percibidas se encuentran la existencia de multiplicidad de posibilidades y la impredecibilidad de los resultados.

Chernoff (2009) analizó las respuestas dadas por 239 futuros profesores de matemáticas (163 de primaria y 76 de secundaria) a tareas de reconocimiento de secuencias formadas por 5 repeticiones del lanzamiento de una moneda, todas ellas con la misma proporción de caras. El análisis cualitativo de las justificaciones de 19 sujetos, que aparentemente tenían una percepción incorrecta de aleatoriedad, le lleva a concluir que dichos futuros profesores podrían razonar desde tres interpretaciones de espacio muestral: (a) teniendo en cuenta los cambios de cara a cruz; (b) considerando la longitud de la racha más larga, y (c) considerando los cambios y la racha más larga conjuntamente. También concluye que sus razonamientos aparentemente incorrectos con respecto a aleatoriedad podrían ser consistentes con dichas visiones de espacio muestral y no serían debidas a falta de razonamiento probabilístico, sino al uso de probabilidades subjetivas personales.

A continuación, presentamos nuestra investigación, cuyo objetivo es complementar las anteriores, analizando en profundidad las concepciones de aleatoriedad de los futuros profesores y poniéndolas en relación con las observadas a lo largo de la historia.

Método

La muestra estuvo formada por 157 futuros profesores de Educación Primaria, de la Universidad de Granada, de los cuáles el 58% eran mujeres. Los datos se tomaron como parte de una actividad práctica en la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria”, de contenido didáctico. Posteriormente a la recogida de datos, se discutieron las respuestas con los futuros profesores y se realizaron actividades de simulación para ayudarles a reconocer sus intuiciones incorrectas.

Estos estudiantes habían estudiado probabilidad durante la educación secundaria, así como en la asignatura “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, del curso anterior, donde estudiaron los conceptos de aleatoriedad, probabilidad, asignación de probabilidades mediante regla de Laplace, estimación frecuencial de la probabilidad, y realizaron ejercicios sencillos de probabilidad simple y compuesta.

La tarea propuesta se presenta en la Figura 1 y se tomó del cuestionario de Green (1983), habiendo sido también utilizada por Cañizares (1997). Se optó por elegir esta tarea, por disponer de respuestas de niños, que posteriormente podrían usarse para discutir con los futuros profesores las semejanzas o diferencias de sus concepciones con las de sus futuros alumnos. Además es una tarea semejante a otras utilizadas en las investigaciones sobre percepción de la aleatoriedad en sujetos adultos.

Tarea. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011
Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
1110000001000101001000000100011000101000000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados

a. ¿Qué niña ha hecho trampas?
b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Figura 1. Tarea propuesta

De acuerdo a Batanero (2011), una de las estrategias que pueden seguir los futuros profesores para resolver la tarea propuesta, es contar el número de caras de cada una de las secuencias y comparar con el número esperado en 150 lanzamientos de una moneda equilibrada, que sigue una distribución binomial *B(150, 0.5)*, de modo que el número esperado de caras sería 75, con desviación típica 6.12.

Al comparar este valor teórico con el número de caras en las secuencias de Clara y Luisa (Tabla 1), se observa que no hay coincidencia en ninguno de los dos casos; sin embargo, en un proceso aleatorio, habría que esperar algo de variación. Una forma de evaluar si la diferencia entre el valor observado y esperado del número de caras en cada caso se ajusta a la variabilidad propia de un fenómeno aleatorio sería realizar un contraste Chi-cuadrado de bondad de ajuste.

Tabla 1
Frecuencias observadas y teóricas de caras en la tarea propuesta

	Cara	Cruz
Clara	72	78
Luisa	67	83
Teórica	75	75

Si denotamos las frecuencias observadas como (o_i) y las esperadas (e_i) para las *k* posibles respuestas de la variable, el valor de este estadístico sería $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$, que sigue una distribución Chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad bajo la hipótesis de que los datosprovienen de la distribución teórica. La aplicación de este contraste a los datos de la Tabla 1, produce resultados que no son estadísticamente significativos; en la secuencia de Clara $\chi^2_{obs}=0.24,\ p=0.6$ y en la secuencia de Luisa $\chi^2_{obs}=1.71,\ p=0.19$.

Repitiendo el mismo procedimiento, pero analizando la secuencia por pares (es decir, como lanzamientos sucesivos de dos monedas) obtenemos los resultados de la Tabla 2. En este caso, al repetir el contraste Chi-cuadrado, para la secuencia de Clara se obtiene $\chi^2_{obs}=9.84,\ p=0.02$ (en una distribución Chi-cuadrado con 3 g.l.), y para la de Luisa $\chi^2_{obs}=4.89,\ \ p=0.18$. En consecuencia, puesto que el resultado de Clara es estadísticamente significativo, rechazamos la hipótesis de que su secuencia es aleatoria, con un nivel de significación de *0,02*. La diferencia sería todavía más evidente si se analizan los datos como lanzamientos sucesivos de tres monedas, en cuyo caso, la realización del contraste Chi-cuadrado para las dos distribuciones de tripletas genera los siguientes resultados: en la secuencia de Clara $\chi^2_{obs}=27.8,\ p=0.0001$ (en una distribución Chi-cuadrado con 7 g.l.) y en la secuencia de Luisa $\chi^2_{obs}=6=6.33,\ p=0.501$.

Tabla 2

Frecuencias observadas y teóricos de parejas de resultados en la tarea propuesta

	CC	C+	+C	++
Clara	12	30	18	15
Luisa	25	21	12	17
Teórica	19	19	19	19

Aunque los futuros profesores no tienen los conocimientos suficientes para aplicar el contraste Chi- cuadrado, podrían contar la frecuencia de caras y cruces (Tabla 1) en las dos secuencias y argumentar su respuesta en base a la diferencia con el valor esperado, al igual que hicieron los niños de la investigaciones de Green (1983) o Cañizares (1997), respuesta que consideraríamos correcta, para los conocimientos que ellos tienen. Otros participantes podrían basar sus respuestas en la longitud de la racha más larga, que es de sólo 3 caracteres en el caso de Clara y de 9 en el caso de Luisa. Schilling (1990) muestra que el valor esperado de la longitud de la racha más larga en n repeticiones de un experimento, donde el suceso de interés tiene probabilidad 0.5, se aproxima al $log_2 n - 2/3$; en este caso $log_2 (50) - 2/3=6.56$, por lo que la longitud esperada para la racha más larga se aproxima a 7, de manera que el resultado de Luisa se acerca más al valor esperado que el de Clara. A pesar de ello, Green (1983) indica que algunos niños eligen precisamente como aleatoria la sucesión de Clara, porque esperan rachas cortas.

Resultados y Discusión

Recogidas las respuestas se realizó un análisis de su contenido, estudiando separadamente las respuestas a las partes a y b de la tarea, cuyos resultados se presentan y discuten a continuación.

Identificación de Secuencias Aleatorias

En primer lugar se obtuvo la frecuencia de futuros profesores que consideran que Clara o Luisa hace trampas (Tabla 3). Observamos que pocos de ellos muestran una intuición correcta, pues la gran mayoría indica que Luisa fue quien hizo trampas.

Tabla 3

Frecuencia y porcentaje de respuestas a la pregunta a (niña que hace trampas)

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Clara (Correcta)	42	26.8
Luisa	89	56.7
No sabe	17	10.8
Ninguna de las dos	1	0.6
No responde	8	5.1

Los resultados son incluso peores que los observados en estudios anteriores, pues 34% de niños ingleses entre 11 y 16 años en el estudio de Green (1983) así como 29% de niños españoles entre 10 y 14 años en el de Cañizares (1997) indicaron que Clara hizo trampas. Las intuiciones en este tipo de tarea parecen ser más acertadas cuando las secuencias son más cortas, pues en el estudio de de Batanero y Serrano (1999) con estudiantes españoles de 14 y 17 años y utilizando cuatro secuencias de 40 lanzamientos de una moneda, dos aleatorias y dos no, las secuencias aleatorias fueron correctamente identificadas por 54% y 59% de los estudiantes, y las no aleatorias por 40% y 64%.

Argumentos

Para profundizar el análisis, se clasificaron los argumentos de los futuros profesores en la parte b de la tarea, en dos fases. En una primera clasificación, se diferenciaron los argumentos que hacen referencia a la frecuencia de caras, la longitud de las rachas, la identificación de un patrón en la secuencia o la impredecibilidad. Seguidamente, cada una de estas categorías se subdividió en la forma que se indica a continuación.

Respuestas basadas en la frecuencia de caras.

Algunos futuros profesores realizaron un recuento de las frecuencias de caras en las dos secuencias, y las compararon con la frecuencia esperada en una distribución binomial (75 caras). Estas respuestas reflejan, de acuerdo a Serrano (1996), una concepción de la aleatoriedad consistente *con la visión frecuencial de la probabilidad*, pues se espera que la frecuencia relativa de caras se aproxime a la probabilidad teórica. Por un lado, los sujetos que dan este argumento manifiestan la idea de convergencia; por otro lado, han realizado un proceso de inferencia informal (Batanero, 2011), en cuanto han usado un modelo matemático (número esperado de caras) comparando con sus datos para rechazar o aceptar la hipótesis de aleatoriedad de cada secuencia. En algunos casos, esta concepción correcta se mezcla con alguna incorrecta, por ejemplo, estimando a la baja la variabilidad de los resultados en un experimento aleatorio. Los argumentos relacionados con las frecuencias son de dos tipos.

A1. *Frecuencias muy alejadas del valor teórico*. Se comparan las frecuencias observadas y esperadas, indicando que hay demasiada diferencia entre ellas. Si el participante indica que Luisa hace trampas, usando este argumento para indicar que su secuencia no es aleatoria, muestra una concepción incorrecta de la aleatoriedad, pues no percibe suficientemente la variabilidad inherente a una secuencia aleatoria. Un ejemplo, en el que, sin embargo, el estudiante muestra concepciones adecuadas de la equiprobabilidad de resultados, convergencia y valor esperado, se reproduce a continuación:

> Luisa hizo trampas porque la probabilidad al lanzar una moneda de que salga cara o cruz es del 50%. Por tanto en 150 lanzamientos estimaríamos los valores más cercanos a la media (75) y en este caso es 78 el valor más cercano (Participante 39).

Si el participante, por el contrario, considera que es Clara quien hace trampas, usando el argumento A1 para aceptar su secuencia como aleatoria, ha sido capaz de reconocer la variabilidad inherente a un proceso aleatorio, que es una capacidad constituyente del razonamiento estadístico, de acuerdo a Wild y Pfannkuch (1999), como en el siguiente ejemplo:

> Clara hizo trampas porque la probabilidad es inexacta y da resultados posibles, siendo más creíble el resultado de Luisa que el de Clara (Participante 71).

A2. *Frecuencias muy próximas al valor teórico*. Otros participantes, una vez realizado el recuento de frecuencias, indican que son cercanas al valor teórico. Si el argumento se refiere a Clara, como el siguiente ejemplo, se reconoce, como en el caso anterior la variabilidad aleatoria:

> Clara hizo trampas porque le da casi un 50% de probabilidad de caras y cruces y es muy difícil que en estos casos salga un 50%. Es más lógico el resultado de Luisa (Participante 78).

En otros casos, se usa el argumento A2 para rechazar la secuencia de Luisa, esperando mayor proximidad, incluso coincidencia con el valor teórico, indicando una concepción incorrecta de la aleatoriedad, como en el siguiente ejemplo; no obstante, esta concepción de la aleatoriedad es próxima a la relacionada con la *visión clásica de la probabilidad*:

> Luisa hizo trampas porque si los niños lanzan una moneda 150 veces y solo hay dos posibilidades, tienen que obtener cada lado más o menos 75 veces. Solo Clara tiene este resultado pero Luisa no (Participante 148).

Argumentos basados en la longitud de las rachas.

Otros futuros profesores analizaron la longitud de las rachas, obteniéndose dos argumentos diferenciados, basados en dicha longitud:

A3: *Rachas largas*. En general, se observa la existencia de rachas largas, como argumento para rechazar la secuencia como aleatoria, razonamiento que también apareció en el trabajo de Serrano (1996), quien sugiere que indica una comprensión incorrecta de la independencia de los ensayos repetidos.

> Luisa hace trampas por la combinación de 3 o más veces el mismo resultado. Clara sólo llega a 3 repeticiones. Luisa tiene más series repetidas, alguna de 9 repeticiones. Esto es muy improbable (Participante 123).

Un sujeto observa la falta de rachas largas, como argumento para rechazar la secuencia de Clara como aleatoria, mostrando una buena percepción de la independencia de ensayos:

> Clara hace trampas porque aparece de forma más aleatoria, alternando los "0" y los "1"; en cambio lo de Luisa parece más real, ya que hay más continuidad de resultados muchos "0" y "1" seguidos (Participante 65).

A4: *Rachas cortas*. Algunos futuros profesores sugieren que las rachas de una de las dos secuencias son demasiado cortas para un proceso aleatorio, usándolo para rechazar la secuencia de Clara como aleatoria, lo que indica una buena percepción de la independencia de ensayos como vemos en el siguiente ejemplo:

> Clara hace trampas porque en su grupo de resultados no hay más de tres resultados iguales seguidos, y puede haber más de tres resultados iguales seguidos porque hay la misma probabilidad de que salga una cruz o una cara (Participante 27).

Argumentos basados en la existencia de un patrón.

La existencia o no de un patrón en la secuencia sirve a algunos participantes para justificar quien hace trampas. También hemos diferenciado dos tipos de argumento:

A5: *Existe un patrón en la secuencia*. El argumento hace referencia al orden en que van apareciendo las caras y cruces en la secuencia y al hecho de que parezca muy regular para ser o no aleatoria. Para algunos la alternancia de los dos valores debe darse en experimentos con resultados equiprobables (Luisa haría trampas). Este razonamiento indica un *enfoque en el resultado* (Konold, 1989) y muestra una pobre comprensión del significado frecuencial. Una respuesta en esta categoría es:

> Luisa hace trampas porque sus resultados se repiten mucho durante todas las veces, es decir, por ejemplo "cruz" le sale muchas veces, creo que hay más probabilidad que salga también cara, que se igualen tanto cara como cruz (Participante 54).

Para otros participantes, la regularidad en el patrón de alternancias es un indicativo de falta de aleatoriedad (Clara haría trampas), lo que indica una concepción correcta de ausencia de patrón en las secuencias aleatorias. Dichos participantes asociarían la aleatoriedad con ausencia de modelo o patrón, una visión próxima a la modelización de la aleatoriedad de von Mises (1952/1928) para quien una secuencia es aleatoria si es imposible encontrar en ella patrones predecibles. A pesar de que estos futuros profesores tienen una idea parcialmente correcta, de hecho en la secuencia aleatoria se pueden identificar una multitud de modelos; por ejemplo, la distribución Binomial o geométrica, por lo que la aleatoriedad podría interpretarse igualmente como multiplicidad de modelos (Serrano, 1996). Un ejemplo de esta categoría es:

> Clara hizo trampas porque los resultados obtenidos parecen ser una serie que se repite, ya que, aunque no se siga a la perfección es muy parecida en sus porcentajes (Participante 56).

A6: *La secuencia no sigue un patrón*. Un participante usa el argumento contrario al anterior, en este caso, rechazando la aleatoriedad, lo que indicaría una concepción incorrecta.

> Luisa hizo trampas porque apenas se intercalan valores de distinto valor, es decir, que si tenemos una probabilidad del 50% es más posible que tanto cara como cruz se intercalen de forma mas sucesiva (Participante 29).

Otros tipos de argumentos.

A7: *Impredecibilidad*. Una característica común en diferentes concepciones de aleatoriedad es la impredecibilidad: no poder predecir un suceso futuro basado en un resultado del pasado (Bennet, 1998). La comprensión del carácter impredecible de un resultado particular en un proceso aleatorio es fundamental en la comprensión de la aleatoriedad, pero también la de la posibilidad de predicción del conjunto de resultados (variabilidad local y regularidad global). Sin embargo, algunos participantes confunden el resultado impredecible y la posibilidad de predecir las frecuencias de los diferentes resultados en una serie de ensayos. Serrano (1996) menciona una posible relación de este tipo de argumentos con el enfoque en el resultado, un sesgo consistente en interpretar un enunciado de probabilidad en forma no probabilística (Konold, 1989). Una respuesta que ilustra esta categoría es:

> No sabe quien hizo trampas porque al igual que una niña lanzó la moneda y de forma aleatoria se obtienen los resultados, con la chica que se los inventó ocurre lo mismo, no puede comprobarse porque al lanzar una moneda es un caso aleatorio que no se puede comprobar (Participante 5).

A8: *Otros argumentos*. Algunas justificaciones, con menores frecuencias que las anteriores, se refieren a la equiprobabilidad de resultados y por tanto mostrarían, según Batanero y Serrano (1999) una concepción de aleatoriedad ligada al enfoque clásico de la probabilidad:

> Ninguna hizo trampas porque la probabilidad de que salga P=1/2=0.5 cara o cruz es la misma si tiras una moneda como si no la tiras (Participante 105).

Otros argumentos expresan creencias personales poco justificadas:

> Clara hizo trampas porque es más probable que una moneda caiga por el mismo lado un mayor número de veces (Participante 7).

Finalmente, se producen algunas respuestas confusas en las que es difícil seguir el razonamiento del futuro profesor, aunque son minoría:

> Cualquiera de las dos pudo engañar, porque la probabilidad indica sólo probabilidades, no números exactos (Participante 70).

En la Tabla 4 se cruza la respuesta a la parte a, sobre qué niña hizo trampas, con el argumento que apoya dicha respuesta, en la parte b. Se observa que los argumentos para indicar que Clara hace trampas se relacionan principalmente con la existencia de un patrón (50%) o bien con las rachas demasiado cortas (28.6%) e indicarían en los dos casos concepciones correctas de la aleatoriedad.

Los participantes que indican que Luisa hace trampas se basan primordialmente en el tamaño de su racha más larga (58%), por lo que muestra una comprensión incorrecta de la independencia de ensayos sucesivos. Otro porcentaje apreciable espera que las frecuencias observadas debieran ser más próximas a las esperada (28.6%), lo que sugiere falta de percepción de la variabilidad inherente a la aleatoriedad. En general, observamos que lo más frecuente fue analizar la longitud de las rachas, seguido por argumentar la existencia de un patrón y luego por la proximidad de las frecuencias observadas con las esperadas. En total el 59% de los futuros profesores da argumentos erróneos para apoyar que Luisa hace trampas, el 27% argumentos correctos para apoyar que es Clara la que hace trampas y el resto no es capaz de detectar qué secuencia es no aleatoria o no da un argumento consistente.

Tabla 4

Frecuencias y porcentajes de argumentos en la pregunta b (n=148)*

Argumento	Niña que hace trampas							
	Clara		Luisa		No sabe/ ninguna		Total	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
A1. Frecuencias muy diferentes	1	2.4	5	5.7			6	4.1
A2. Frecuencias muy próximas	3	7.1	19	21.6			22	14.9
A3. Rachas largas	1	2.4	51	58.0			52	35.1
A4. Rachas cortas	12	28.6					12	8.1
A5. Existencia de un patrón	21	50.0	7	8.0			28	18.9
A6. No existe patrón			1	1.1			1	0.7
A7. Impredecibilidad					15	83.3	8	5.4
A8. Otros argumentos	4	9.5	5	5.7	3	16.7	19	12.8

* Total de alumnos que dan un argumento

Este porcentaje es muy próximo al obtenido en investigaciones previas, ya que 22% de los niños ingleses (Green, 1983) así como 29% de los niños españoles (Cañizares, 1997) proporcionan argumentos correctos. Una diferencia es que la ausencia de argumentos fue mayor en los niños (14% de los ingleses y 30% de los españoles), mientras que esta ausencia sólo se da en el 5.7% de los participantes en nuestro estudio, lo que indica una mayor capacidad de argumentación entre los futuros profesores.

Conclusiones y Sugerencias para la Formación de Profesores

Los resultados confirman los de otros estudios sobre aleatoriedad en adultos (Falk, 1981; Falk y Konold, 1997; Nickerson, 2002), que indican nuestra dificultad para percibir aleatoriedad. Al igual que en estos estudios, se observan sesgos como la falacia del jugador o el enfoque en el resultado, así como concepciones erróneas acerca de la equiprobabilidad o la falta de la comprensión de la independencia.

Estos resultados no son sorprendentes, puesto que Bar-Hillel y Wagenaar (1991) subrayan la dificultad del concepto de aleatoriedad, que se resiste a una definición sencilla y que sólo puede aplicarse a través del análisis de las secuencias de resultados. Por otro lado, aunque expresiones como "número aleatorio", "experimento aleatorio" aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano como en los libros de texto, en dichos libros no se suele incluir una definición precisa del concepto (Batanero, Green y Serrano, 1998).

Sin embargo, la comprensión de la aleatoriedad es esencial para el aprendizaje de la probabilidad, por lo que los futuros profesores debieran adquirir una comprensión profunda que les permita adquirir una competencia suficiente en su futura enseñanza de la probabilidad, como se recomienda en los nuevos currículos.

Como apunta Fernández (1990), la función principal del proceso de diagnóstico pedagógico es la toma de decisiones sobre los cambios que requiere el modelo de enseñanza para ayudar al alumno en su adquisición de habilidades y competencias. Nuestra investigación no solo sugiere la necesidad de reforzar la formación sobre probabilidad en los futuros profesores, sino también un cambio en la aproximación de este aprendizaje haciendo más hincapié en aquellos razonamientos sesgados que están presentes en los futuros profesores. Una enseñanza basada en el uso de la simulación, y la reflexión en pequeños grupos sobre estas dificultades podrían ayudar a superar estos sesgos.

Los futuros profesores en nuestro estudio mostraron una mezcla de intuiciones y creencias correctas e incorrectas respecto a la aleatoriedad. Será labor del formador de profesores ayudarles a construir una concepción más completa, partiendo de la parte correcta de las intuiciones descritas en este estudio. Ello es particularmente importante, debido a la dependencia, señalada por Ball, Lubienski y Mewborn (2001), de las tareas habituales del profesor, como evaluación de los estudiantes, u organización de la enseñanza, de su conocimiento matemático.

Por otro lado, algunas de las respuestas de los futuros profesores a la segunda parte de la tarea indican concepciones próximas a las aceptadas en diferentes periodos históricos sobre la aleatoriedad. Será importante, entonces, que el formador de profesores aproveche estas concepciones parcialmente correctas para hacerlas progresar:

• La visión de la aleatoriedad como equiprobabilidad, debe hacerse progresar pues tiene una aplicación muy restringida;
• La visión frecuencial, donde se espera una convergencia entre las frecuencias esperadas y las observadas, ha de completarse, haciendo a los futuros profesores conscientes de la variabilidad y la independencia de ensayos sucesivos;
• El reconocimiento de la imposibilidad de predicción de resultados aislados, debe también ampliarse aceptando la posibilidad de predicción de la distribución de frecuencias de los diferentes sucesos implicados;
• Por último, la visión de aleatoriedad como falta de modelo ha de abandonarse a favor del reconocimiento de la multiplicidad de modelos subyacentes en una secuencia de resultados aleatorios.

En este sentido, la tarea presentada y la discusión con los futuros profesores de las posibles respuestas correctas e incorrectas a la misma, puede servir para incrementar su conocimiento matemático y didáctico sobre la aleatoriedad, ampliando la comprensión de las propiedades de este concepto, así como de los posibles sesgos de razonamiento relacionados con el mismo, que podrían presentarse en sus futuros alumnos.

Referencias

Ayer, A. J. (1974). El Azar. En M. Kline, (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 172-181). Barcelona: Blume.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bar-Hillel, M., y Wagenaar, W. A. (1991). The perception of randomness. *Advances in applied mathematics, 12*(4), 428-454

Batanero, C. (2011). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *CIEAEM XIII*. Recife.

Batanero, C., Cañizares, M. J., y Godino, J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Green, D.R., y Serrano, L. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 113-123.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C., y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Begg, A., y Edwards, R. (1999, Diciembre). Teachers' ideas about teaching statistics. *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Chernoff, E. (2009). *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*. (Tesis doctoral). Simon Fraser University, Canada.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. En C. Laborde (Ed.), Proceedings of the *Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Grenoble.

Falk, R., y Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. *Psychological Review, 104*, 301-318.

Fernández, S. (1990). Diagnóstico curricular y dificultades de

aprendizaje. *Psicothema, 2*(1), 37-56.
Fine, T. L. (1973). *Theories of probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.
Franklin, C., y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), Proceedings of the *First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.
Harten, G., y Steinbring, H. (1983). Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive and mathematical definition. En R W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 363-373). Amsterdam.
Johnston-Wilder, P., y Pratt, D. (2007). The relationship between local and global perspectives on randomness. *CERME 5*, Working Group 'Stochastic Thinking'.
Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.
Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasesfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Kluwer, Dordrecht.
Kyburg, H. E. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.
Lahanier-Reuter, D. (1999). *Conceptions du hazard et enseignement des probabilities statistiques* . París: Presses Universitaires de France.
Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.
Liu, Y., y Thompson, P. (2002). Randomness: Rethinking the foundation of probability. En D. Mewborn, P. Sztajn, E. White, H. Wiegel, R. Bryant, y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Twenty Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atenas: PME.

MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa Calpe (Publicación original en 1928).

Nickerson, R. S. (2002). The production and perception of randomness. *Psychological Review, 109*, 330-357.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Poincaré, H. (1936). El Azar. Artículo publicado originalmente en lengua inglesa en *Journal of the American Statistical Association, 31*, 10-30. Recogido en J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas, 3*, 68-82.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Schilling, M. F. (1990). The longest run of heads. *The College Mathematics Journal, 21*(3), 196-207.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 221-248.

Zabell, S. L. (1992). The quest for randomness and its statistical applications. En F. Gordon, y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the XXI Century* (pp. 139-166). The Mathematical Association of America.

Carmen Batanero es Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, España.

Emilse Gómez es Profesora de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia.

Luis Serrano es Catedrático de Escuela Universitaria de Didáctica de la Matemática, en la Facultad de Humanidades y Educación de Melilla. Universidad de Granada, España.

José Miguel Contreras es Profesor Ayudante Doctor de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, España.

Dirección de contacto: La correspondencia sobre este artículo debe dirigirse a: Carmen Batanero, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de Cartuja 18071 Granada (España). Dirección de correo electrónico: batanero@ugr.es