REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, tecnología y ACODESA

José C. Cortés[1], Fernando Hitt[2] y Mireille Saboya[2]

1) Universidad Michoacana, México
2) Université du Québec à Montreal, Canadá

Date of publication: October 24th, 2014
Edition period: October 2014-February 2015

To cite this article: Cortés, J.C., Hitt, F., & Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, Tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, *Vol 3*(3), 220-252. doi: 10.4471/redimat.2014.52

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.52

REDIMAT, Vol. 3 No. 3 October 2014 pp. 220-252

From Arithmetic to Algebra: Triangular Numbers, technology and ACODESA

José C. Cortés
Universidad Michoacana

Fernando Hitt
Université du Québec à Montreal

Mireille Saboya
Université du Québec à Montreal

(*Received: 18 October 2013; Accepted: 15 October 2014; Published: 24 October 2014)*

Abstract

The aim of this document is to address the articulation between arithmetic and algebra. The literature reports a discussion of arithmetic or algebraic thinking, not mentioning at all the importance of a pre-algebraic thinking related to an arithmetic-algebraic thinking. Through activities designed for this purpose, we propose a visual approach, with the intention of promoting mathematical visualization processes, which in turn constitute cognitive structures on the control exercised by students in solving a mathematical task. Our design is linked to a theoretical framework for action, collaborative learning (ACODESA) and use of technology in the mathematics classroom. In this study, we present our research project between Québec and Mexico, but restrict ourselves to the results obtained with the Mexican population in relation to polygonal numbers in secondary school.

Keywords: Mathematical visualization, ACODESA, triangular numbers, technology, arithmetic, algebra.

2014 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2014.52

REDIMAT, Vol. 3 No. 3 Octubre 2014 pp. 220-252

De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, tecnología y ACODESA

José C. Cortés
Universidad Michoacana

Fernando Hitt
Université du Québec à Montreal

Mireille Saboya
Université du Québec à Montreal

(*Recibido: 18 Octubre 2013; Aceptado: 15 Octubre 2014; Publicado: 24 Octubre 2014)*

Resumen

El propósito de este documento es el de abordar la articulación entre la aritmética y el álgebra. La literatura habla del pensamiento aritmético o algebraico, sin mencionar la importancia de un pensamiento aritmético- algebraico previo al algebraico. A través de actividades diseñadas para tal efecto, proponemos un acercamiento aritmético y visual, con la intención de promover procesos de visualización matemática, que a su vez, constituirán estructuras cognitivas sobre el control que ejercen los alumnos en la resolución de una tarea matemática. Nuestro diseño está ligado a un marco teórico sobre la acción, en un aprendizaje en colaboración (ACODESA) y uso de tecnología en el aula de Matemáticas. En este estudio, presentaremos nuestro proyecto de investigación entre Québec y México, pero nos restringiremos a los resultados obtenidos con la población mexicana en relación con los números poligonales en la escuela secundaria.

Palabras clave: Visualización matemática, ACODESA, números triangulares, tecnología, aritmética, álgebra.

2014 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2014.52

Nuestro proyecto global de investigación está ligado al análisis de la transición entre la aritmética y el álgebra (ver Hitt et al, 2013). En particular, en este documento nos centramos en procesos naturales de construcción de expresiones algebraicas en la resolución de un problema tratado bajo una metodología de construcción social del conocimiento.
Este estudio contempla la realización de experimentaciones sobre el mismo tipo de actividades, tanto en Québec como en México, en diferentes niveles de enseñanza en la escuela secundaria.

Se ha elaborado una serie de actividades ligadas a los números poligonales, tomando en consideración los resultados de Healy & Sutherland (1990) y Hitt (1994). Healy & Sutherland se centraron en la construcción de los números poligonales en ambientes de hojas de cálculo (Excel); Hitt, a su vez, propuso un ambiente de papel, lápiz y LOGO. Nuestra propuesta, como veremos más adelante, integra y mejora las actividades experimentadas por esos investigadores. Asimismo, se ha puesto un énfasis especial en crear un ambiente de construcción sociocultural del conocimiento, siguiendo una metodología específica de enseñanza llamada ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión) (ver Hitt, 2007; Hitt & Morasse, 2009; Hitt, 2013). En este documento, nos centramos en los resultados obtenidos en nuestra experimentación con una población de estudiantes de tercero de secundaria (con una edad de14 a 16 años) en México. El análisis de los resultados se centró específicamente en el papel que juegan los números poligonales en un ambiente de aprendizaje colaborativo (ACODESA) como apoyo a la construcción de un pensamiento aritmético - algebraico.

De acuerdo a nuestra concepción de pensamiento aritmético-algebraico, en la que los procesos aritméticos no están desligados de los procesos algebraicos, la visualización matemática juega un papel importante de mediador entre ambos procesos. Asimismo, estos procesos de visualización ayudan al alumno en la construcción de una estructura cognitiva sobre el control de la actividad matemática. Es decir, un alumno "perdido" en las manipulaciones algebraicas, puede encontrar un apoyo en la visualización y la aritmética para saber y controlar los resultados obtenidos en los procesos algebraicos.

Bajo este enfoque, la experimentación y el análisis de los resultados se realizarán siguiendo un marco teórico sobre la visualización matemática (según Zimmermann & Cuningham, 1991), sobre los procesos de control (según Saboya, 2010) que los estudiantes desarrollan para llevar a cabo una actividad matemática específica, y alrededor de la transición de la aritmética al álgebra (según Kaput, 2000, 2008; Kieran, 2007 y Artigue, 2012).

Conforme a este acercamiento teórico, la primera sección versa sobre lo que se conoce como pensamiento algebraico, los procesos de visualización matemática y aspectos de control en la resolución de una tarea matemática. Enseguida, se presentan los aspectos metodológicos y del diseño de nuestras actividades. La siguiente sección detalla el análisis de los resultados obtenidos en nuestra experimentación con estudiantes de tercero de secundaria en México (con una edad de 14 a 16 años) y finalmente, se presenta una sección dedicada a las conclusiones.

En resumen, en este documento tratamos los aspectos de articulación entre la aritmética y el álgebra; así como los procesos de visualización matemática y la construcción de estructuras de control. Todo ello, inmerso en un ambiente de trabajo en colaboración en el aula de Matemáticas.

¿Qué es un Pensamiento Aritmético-Algebraico?

Los resultados recientes de investigación nos indican que es posible mitigar los problemas de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra con un acercamiento natural de la aritmética hacia el álgebra (en el sentido de Kaput, 2000, 2008; Artigue, 2012). Pero, ¿qué es el pensamiento algebraico?

De acuerdo a Kaput (2008), el pensamiento algebraico debe comportar en general dos aspectos principales:

1) Realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera más formal y convencional, y
2) razonar con formas simbólicas, incluyendo la manipulación sintáctica guiada de estas formas simbólicas.

Bajo este enfoque, Kaput nos propone considerar dos etapas en la formación del pensamiento algebraico; pero, como lo señala Artigue (2012), la entrada al pensamiento algebraico se puede realizar bajo muchos caminos:

> En algunos países, es el recorrido histórico de las ecuaciones asociadas con el enfoque analítico cartesiano que se ha elegido, en otros, incluyendo la cultura anglosajona, es la forma de

> reconocimiento de patrones y la generalización que se ha seleccionado. Esto no intenta enseñar estructuras algebraicas sino identificar lo que se llaman "patrones" en secuencias de números, en configuraciones geométricas, para expresar algebraicamente y utilizar esta expresión algebraica para estudiar, caracterizar, comparar. En otros países, es el camino de modelación que se ha elegido, a menudo vinculados con situaciones extra-matemáticos. (p. 4).

Bajo el modelo de Kieran (2007), podemos saber más sobre los aspectos locales del contenido a desarrollar en los estudiantes a través de su modelo GTG, que en resumen trata de :

> G) La actividad generacional (por ejemplo, los patrones);
> T) La actividad de transformaciones (factorización, expansión, ecuaciones equivalentes, etc);
> G_m) La actividad global / meta (resolución de problemas, modelado, justificación, reconocimiento de patrones, etc.) (p. 714)

Nuestra reflexión está encaminada hacía la utilización de patrones y la posibilidad de expresar sus relaciones en términos aritméticos, visuales y algebraicos. Es decir, no hacemos una partición, como el modelo GTG, sino una integración. Precisamente bajo nuestro enfoque, siguiendo un camino natural hacia el álgebra, tenemos como propósito promover en nuestros estudiantes la construcción de una estructura cognitiva ligada a un pensamiento aritmético-algebraico.

El pensamiento aritmético-algebraico estaría considerado como primer escalón hacia el pensamiento algebraico que, según nuestro acercamiento, quedaría caracterizado por la habilidad de los estudiantes para:

a) Generalizar patrones (no necesariamente con representaciones institucionales, podrían ser representaciones producto de representaciones funcionales), procesos que descansarían en la visualización matemática y cálculo aritmético.
b) Generar expresiones algebraicas (representaciones institucionales) cuya validación primera estaría ligada a la visualización y al cálculo aritmético.
c) Formar una estructura cognitiva de control (en el sentido de Saboya, 2010), que integre de manera coherente estos procesos de validación surgidos en las discusiones de grupo, contando con una

estructura que permita percatarse de una contradicción en caso de encontrarse en una situación contradictoria.

d) Integrar el conocimiento algebraico a un proceso reversible, de manera que se permitiera la posibilidad de realizar procesos metacognitivos de reconstrucción, promoviendo la articulación entre la aritmética y el álgebra.

Desde este punto de vista, se puede apreciar que la visualización matemática tiene un rol importante. Esta visualización es el primer motor para la articulación entre la aritmética y el álgebra y, más precisamente, entre los procesos de construcción de una estructura de control que actúe sobre la actividad matemática en los estudiantes de secundaria.

Esta estructura de control permitirá a los alumnos descubrir contradicciones (contradicción cognitiva, percibida por un estudiante particular y no señalada por el experto, en este caso, el profesor. Ver p.e. Hitt, 2004, p. 341). Los conflictos que el estudiante percibe en su actividad matemática tienen que ver con una estructura cognitiva ligada a los procesos de control (Saboya, 2010) sobre esa actividad. Bajo este punto de vista, es importante desarrollar la transición de la aritmética al álgebra, construyendo al mismo tiempo una estructura cognitiva relacionada con el control sobre la actividad matemática que realiza cada estudiante. Esta estructura es algo que tiene que ver en cierta manera con el uso de representaciones y su articulación. Ellas pueden proporcionar un control sobre la actividad matemática (Saboya, 2010) y es por eso que nuestra propuesta de enseñanza toma en consideración el uso y producción de representaciones y la promoción de conversiones en el sentido de Duval (1993, 1995). De hecho, bajo esta hipótesis, estamos complementando la visión que se tiene del pensamiento algebraico en el sentido de Kaput (2000, 2008) y explicitado en el modelo GTG de Kieran (2007).

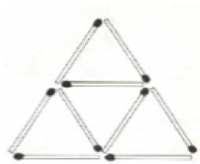
Entonces, será con la ayuda de un marco teórico sobre la visualización matemática y los procesos aritméticos que podremos dar cuenta de los procesos de control de la actividad matemática de los estudiantes de secundaria, con la finalidad de construir un pensamiento aritmético-algebraico.

Visualización Matemática

En la literatura podemos encontrar diferentes acercamientos a la visualización matemática. Los psicólogos del pasado (principios del siglo

XX) se centraban en analizar la inteligencia de los individuos a través de actividades de resolución de problemas de tipo puzzle. Por ejemplo, siguiendo la argumentación de Brownell (1942), podemos decir que los psicólogos antes de los 40's proponían tareas como la siguiente:

Construir cuatro triángulos equiláteros utilizando solo seis cerillas.



Ejemplo con 9 cerillas

Figura 1. Tarea de tipo puzzle

Los psicólogos mencionaban entonces que aquellos individuos que podían realizar esa tarea realizaban un proceso llamado insight.

El trabajo de Brownell (1942) atrajo la atención hacia el análisis de la inteligencia enfocada en la resolución de problemas escolares (de tipo verbal en la escuela primaria), los psicólogos empezaron a proponer problemas más escolarizados, dejando de lado los llamados puzzles. Se podría decir que algunos psicólogos cambiaban de posición hacia lo que actualmente se denomina como didáctica de las matemáticas.

En esta línea de razonamiento, tenemos el trabajo de Krutetskii (1976) acerca del análisis de habilidades escolares. Por ejemplo, Krutetskii (1976, p. 156 y 309), menciona una habilidad de un niño con respecto a un proceso mental (insight) en la siguiente tarea:

Encontrar la distancia de O a O_1, si el radio r = 1 y las partes sombreadas son equivalentes.

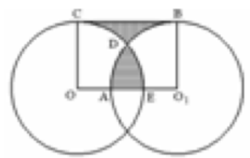


Figura 2. Tarea de Krutetskii.

Si bien los estudios de Krutetskii están centrados en las habilidades de los niños, su acercamiento metodológico se centra en la entrevista individual. Así, al proponerle la siguiente tarea a un alumno, éste, al mirar el dibujo proporcionó la respuesta (p. 309): “El rectángulo es igual a un medio círculo; $OO_1 = \pi /2$”. Krutetskii, entonces, proporciona el siguiente comentario: “El entrevistado parece haber ‘visto’ el resultado inmediatamente". Una probable interpretación de lo sucedido con este alumno es la siguiente (ver figura 3):

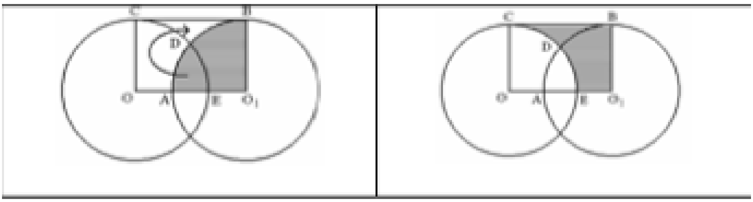


Figura 3. Posible interpretación del proceso mental realizado por el alumno.

Probablemente este tipo de estudios promovió que algunos didactas de las Matemáticas se dedicaran al estudio de la imagery en el sentido de Presmeg (1986), Aspinwall et al. (1997), Presmeg & Balderas (2001, 2002). Entre otros, un acercamiento muy ligado a "ver con los ojos de la imaginación", siguiendo el trabajo de Krutetskii (1976).

¿Podemos interpretar lo realizado por este alumno en el estudio de Krutetskii como un proceso de visualización matemática?

No, en el sentido de Zimmerman & Cuningham (1991), ellos precisan lo que consideran “procesos de visualización matemática”. Proponiendo así un nuevo acercamiento que permite ligar las representaciones mentales con las representaciones semióticas producto de ese proceso:

> Desde la perspectiva de la visualización matemática, la restricción de que las imágenes deben ser manipulados mentalmente, sin la ayuda de un lápiz y papel, parece artificial. De hecho, en la visualización matemática lo que nos interesa es precisamente la capacidad del estudiante para dibujar un gráfico apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con un ordenador) para representar un concepto matemático o problema y utilizar el diagrama para lograr un entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas.

> En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para un fin, que es la comprensión. (p. 3)

Nuestro estudio precisamente está ligado a este tipo de procesos, en donde se promueven representaciones mentales (funcionales en lo que sigue) y las representaciones asociadas a estas representaciones funcionales, producidas sobre papel, computadora, pizarrón, etc. Se considera también un ambiente de colaboración en el aula y de tecnología. Esto juega -como lo vamos a exponer-, un papel muy importante en la resolución de tareas matemáticas.

En los estudios de Hitt (2013), la distinción entre representación funcional y representación institucional es importante. Por ejemplo, en los trabajos de Duval (1993, 1995), él hace énfasis en las representaciones institucionales (las que encontramos en los libros de texto, computadoras o las que utiliza el profesor). Por el contrario, las representaciones funcionales están ligadas al pensamiento espontáneo de los alumnos cuando intentan resolver un problema o una situación problema. En esta resolución, el alumno, teniendo en mente una representación funcional, produce representaciones que usualmente no podemos catalogar dentro de nuestro repertorio de representaciones institucionales; sin embargo, son las que ayudan a los alumnos en la resolución de la tarea solicitada. De hecho, existe una tendencia a no considerarlas como elementos sustanciales para hacerlas evolucionar hacia las representaciones institucionales.

En este contexto, uno se puede preguntar acerca del tipo de tarea que se solicita a los alumnos. En principio, en nuestro proyecto experimental, estamos alejados de los problemas de corte puramente algebraico como lo exponen Coxford & Shulte (1988), alrededor de: “¿Pueden sus estudiantes de high school resolver estos problemas?” Más bien, estamos interesados en promover procesos de visualización matemática como en el sentido de Zimmerman & Cunningham (1991) y de producción de representaciones que provengan de representaciones funcionales cuando los alumnos resuelvan un problema o situación problema.

Preguntas de Investigación

Una pregunta general que nos hemos planteado es si en la construcción del pensamiento algebraico es si será necesario restringirse a los problemas de corte puramente algebraicos o si se necesita poner en juego la aritmética y la visualización matemática, proponiendo así problemas geométrico-algebraicos.

A partir de esta pregunta general, hemos diseñado preguntas específicas de investigación:

En un proceso de construcción sociocultural del aprendizaje ligado a un pensamiento algebraico, ¿tienen los estudiantes de secundaria las competencias necesarias para resolver problemas de corte aritmético-geométrico desde una perspectiva geométrico-algebraica?; ¿promueve la resolución de tareas en ese contexto la construcción de un pensamiento aritmético-algebraico?; en una actividad sobre los números poligonales en el contexto de la construcción del pensamiento algebraico, ¿qué papel juega el contexto tecnológico?

Metodología

La metodología ACODESA toma en cuenta el acercamiento de construcción individual y sociocultural del aprendizaje. El método de enseñanza que se puede realizar con ACODESA (ver Hitt, 2007; González-Martin et al., 2008; Hitt & Cortés, 2009; Páez, 2004) está dividido en etapas que toman en consideración trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una integración de un aprendizaje en colaboración (Paintz, 2001), debate científico a la manera de Legrande (1990, 1996, 2001) y de auto-reflexión de acuerdo a las ideas de Hadamard (1945), lo cual podemos ver en el cuadro 1. En estas etapas el profesor es un guía y sólo es en la etapa de institucionalización que el profesor presenta los resultados utilizando las representaciones oficiales, haciendo énfasis en las producciones de los estudiantes.

Veamos en resumen las características de la metodología ACODESA (Hitt, 2007; Hitt & Morasse, 2009; Hitt, 2013). Es importante señalar que en este método de enseñanza, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final, en el proceso de institucionalización. En las tres primeras fases, el profesor es un guía y es deber de los estudiantes argumentar y validar sus producciones. En el proceso de institucionalización (posterior al proceso de auto-reflexión) es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.

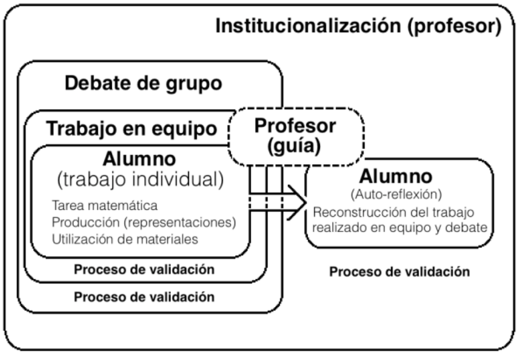


Figura 4. Vista global del proceso en el aula con la metodología ACODESA.

Así, en resumen, las diferentes etapas de ACODESA son:

1) Trabajo individual (producción de representaciones funcionales y producciones semióticas asociadas para comprender la situación problema).
2) Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales y producciones asociadas).
3) Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales y producciones asociadas).
4) Auto-reflexión. Regreso sobre la situación (trabajo individual de reconstrucción y auto-reflexión de lo realizado en clase).
5) Institucionalización. Utilización de representaciones institucionales por parte del profesor dentro del proceso de institucionalización de saberes.

La elaboración de actividades, dentro de la metodología ACODESA, implica una estructuración de manera que favorezca la producción de representaciones funcionales de sus correspondientes representaciones externas y procesos de conversión entre representaciones. En la construcción de conceptos, todas las representaciones de los objetos matemáticos son importantes. Conociendo los resultados de investigación sobre los errores algebraicos en la escuela secundaria, debemos poner especial atención en la construcción de actividades para el aula de Matemáticas.

En nuestro caso, trabajando con estudiantes de secundaria, consideramos que la tarea no debe promover de forma inmediata la manipulación de representaciones algebraicas. Esto nos lleva a discutir precisamente del contenido de este documento, que está en relación directa con un proceso natural de la aritmética, de la visualización matemática y finalmente de la construcción de expresiones algebraicas relacionadas con el cálculo de los números poligonales.

La actividad, en su primera etapa, se elaboró considerando tres objetivos específicos (además de los objetivos generales de investigación): 1) realizar una prueba de la metodología ACODESA; 2) promover un sentido de la iteración (con Excel) de acuerdo a los resultados de Healy & Sutherland (1990), y 3) promover un salto a los procesos algebraicos clásicos de papel y lápiz, mediados el uso de un applet (POLY) desarrollado para este fin. Este applet permite calcular el número poligonal deseado y propone una representación visual. En el ejemplo de la figura 5, aparecen los 5 primeros números triangulares así como el número triangular 15, que es 120. La utilización de este applet permite la validación de conjeturas utilizando ejemplos numéricos.

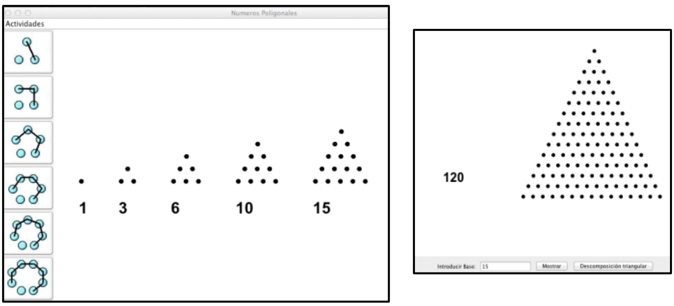


Figura 5. Ejemplo del applet Poly con los números triangulares.

Resumen de la Actividad y Objetivos

En resumen, la actividad es la siguiente (en anexo se encuentra la actividad completa):

1) Se explica qué son los números triangulares.
    - Se introducen los números triangulares con ejemplos en forma visual y numérica (ejemplos de números triangulares

en orden en una versión y desordenados en otra). La versión en desorden de los ejemplos de números triangulares, tenía la intención de proporcionar una mayor dificultad a la tarea solicitada y analizar si esto produciría diferentes expresiones algebraicas entre los estudiantes y situaciones contradictorias a sobrepasar en un debate.

2) Se solicita calcular algunos números triangulares usando lápiz y papel. Promoción de representaciones funcionales y representaciones externas asociadas.
    - Con esta actividad se intenta promover un proceso de visualización matemática, en el sentido que la producción de diferentes números triangulares solicitados, conlleve a la construcción de reglas y relaciones aritmético geométricas.
3) Calcular número triangulares usando Excel y probar usando Poly. Promoción de conjeturas y pruebas en el sentido de Balacheff (1997), la demostración no forma parte en el nivel de estudios de estos estudiantes,
    - Con esta actividad se intenta promover los procesos iterativos relacionados con la visualización y relaciones aritmético geométricas. Se espera la producción de representaciones semióticas sobre papel producto de representaciones funcionales (por ejemplo lo encontrado por Healy & Sutherland (1990, p. 858): "trig Δna = na before + position." (en Inglaterra con alumnos de 13-14 años), cuya evolución permite la construcción formal de una expresión algebraica ligada a un algoritmo iterativo característico del contexto Excel.
4) Encontrar una expresión algebraica para cualquier número triangular. Promoción de procesos de generalización, la conjetura se convierte en resultado.
    - Promoción de maneras de calcular números triangulares fuera del contexto iterativo de Excel para dirigirse hacia las expresiones algebraicas que permitan el cálculo de cualquier número triangular, ligado más bien a un trabajo de papel y lápiz. Se espera la producción de una expresión algebraica a algo de la forma: Triangular $n = (n * (n + 1)/2)$.

Análisis de Resultados

En esta primer experimentación se trabajó con 14 estudiantes de tercero de secundaria (con edades de14 a 16 años) de la Escuela Federal Ignacio Manuel Altamirano de Zacapu, Michoacán. Iniciamos el análisis de resultados siguiendo las etapas de la metodología ACODESA.

Trabajo Individual (etapa inicial)

Se repartieron 7 hojas de trabajo (HT en adelante) de tipo A (con ejemplos de triangulares en orden) y 7 de tipo B (incluyendo ejemplos de triangulares en desorden). La repartición se hizo al azar. En esta etapa se concedió a los alumnos 10 minutos para realizar un trabajo individual y se les pidió que todo lo escribieran con bolígrafo de tinta azul. Con lo cual, se logra recuperar lo que hicieron en esta primera etapa.
Vamos a mostrar algunas producciones semióticas de los alumnos, producto de sus representaciones funcionales.

Específicamente podemos mencionar tres tipos de estrategias utilizadas por los estudiantes:

1. La percepción domina y las producciones están ligadas a representaciones icónicas sin contar con otro tipo de relación explícita.

Como podemos observar en la producción de Alejandra (figura 6), cuando se pregunta directamente sobre un número triangular (en este caso el 25), sigue una estrategia ligada a la percepción, sin añadir reglas u otros elementos que nos permitan decidir si fue más allá de la simple percepción.

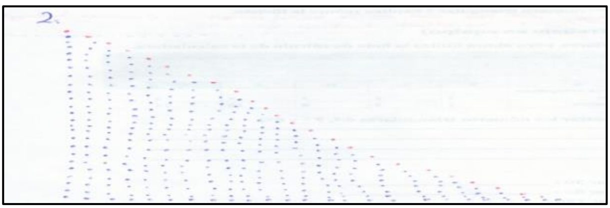
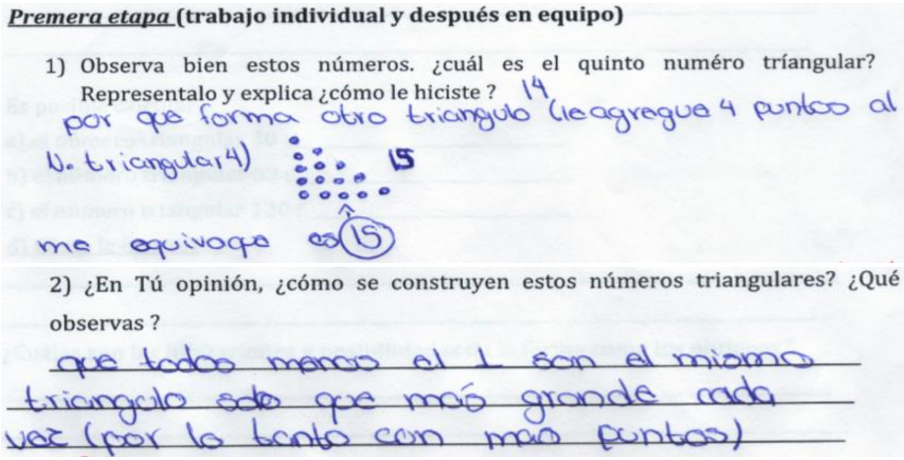


Figura 6. HT Alejandra (respuesta en relación a cuál es el número triangular 25).

El hecho de haber solicitado el cálculo de un número triangular más grande (el triangular 25) se dio con la finalidad de promover un rompimiento en la estrategia ligada a la percepción –que es el de “añadir bolitas”–, e intentar generar estrategias diferentes (como veremos en el caso de Omar).

2. Un proceso de visualización matemática explícito se percibe en las producciones en donde la base del triángulo juega un papel fundamental. Dado un triangular en forma geométrica, se permite calcular el triangular siguiente añadiendo "una bolita" a la línea siguiente (estrategia seguida por Gaby y Emanuel).



Premera etapa (trabajo individual y después en equipo)

1) Observa bien estos números. ¿cuál es el quinto numéro tríangular? Representalo y explica ¿cómo le hiciste ? 14

por que forma otro triangulo (le agregue 4 puntos al N. triangular 4) 15

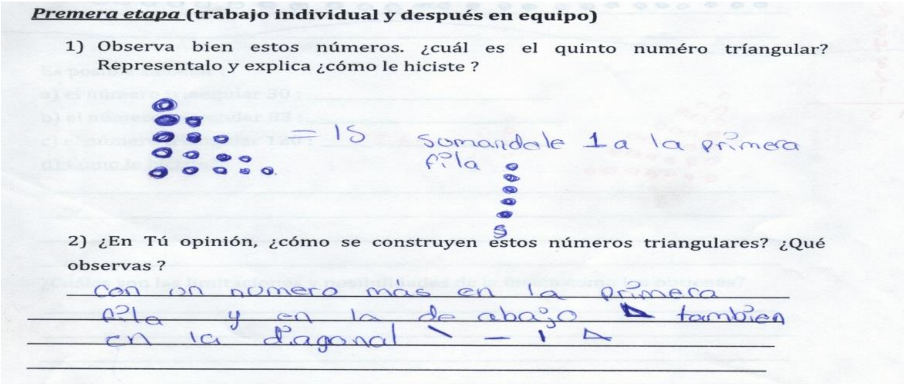
me equivoque es 15

2) ¿En Tú opinión, ¿cómo se construyen estos números triangulares? ¿Qué observas ?

que todos menos el 1 son el mismo triangulo solo que más grande cada vez (por lo tanto con más puntos)

Figura 7. HT de Gaby (trabajo individual).

Al añadir una pregunta intermedia donde se cuestiona la explicación del proceso seguido (pregunta 2), promovemos en el alumno un proceso de conversión hacia la lengua natural, y ello puede motivar la creación de una estructura cognitiva más rica. Algunos de los ejemplos dan muestra de ello, proponiendo reglas para la construcción del subsiguiente número triangular.



Premera etapa (trabajo individual y después en equipo)

1) Observa bien estos números. ¿cuál es el quinto numéro tríangular? Representalo y explica ¿cómo le hiciste ?

= 15 Somandole 1 a la primera fila

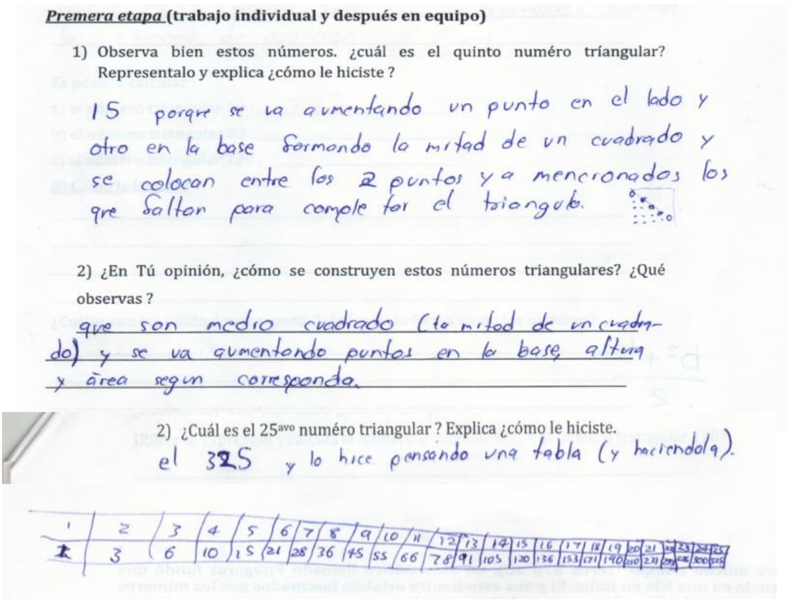
5

2) ¿En Tú opinión, ¿cómo se construyen estos números triangulares? ¿Qué observas ?

Con un numero más en la primera fila y en la de abajo también en la diagonal

Figura 8. HT de Emanuel (trabajo individual).

3. Proceso de visualización matemática: "La mitad de un cuadrado" (estrategia seguida por Omar), no pudiendo el alumno operacionalizar, pasa al uso recursivo con una tabla, operacionalizando las estrategias de Gaby y Emanuel.



Premera etapa (trabajo individual y después en equipo)

1) Observa bien estos números. ¿cuál es el quinto numéro tríangular? Representalo y explica ¿cómo le hiciste ?

15 porque se va aumentando un punto en el lado y otro en la base formando la mitad de un cuadrado y se colocan entre los 2 puntos ya mencionados los que faltan para completar el triangulo.

2) ¿En Tú opinión, ¿cómo se construyen estos números triangulares? ¿Qué observas ?

que son medio cuadrado (la mitad de un cuadrado) y se va aumentando puntos en la base altura y área segun corresponda.

2) ¿Cuál es el 25avo numéro triangular ? Explica ¿cómo le hiciste.

el 325 y lo hice pensando una tabla (y haciendola).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	[illegible]	23	24	25
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	[illegible]	[illegible]	300	325

Figura 9. HT de Omar (trabajo individual).

Estos, como lo hemos señalado, son los productos en forma individual. Lo que se pretende con este proceso es que *cada alumno proporcione su propia estrategia* (correcta o no), que será seguramente modificada por el trabajo en equipo, el trabajo en gran grupo, y la auto-reflexión. Se intenta promover una evolución de las producciones ligadas a las representaciones funcionales que progresen hacia las representaciones institucionales, todo ello en un ambiente de colaboración, en un aprendizaje sociocultural.

Trabajo en Equipo (Segunda Etapa)

Se formaron 4 equipos de 3 estudiantes cada uno y 1 equipo de 2 estudiantes, la organización fue al azar, quedando entre los equipos estudiantes que tenían la HT-A (que incluye ejemplos de triangulares ordenados) y otros con la HT-B (que incluye triangulares desordenados).

Únicamente en un equipo (Equipo 2, en adelante EQ-2), todos los estudiantes tenían la HT-B.

En esta etapa, se pidió a los alumnos que escribieran en rojo para que los investigadores pueda seguir sus cambios.

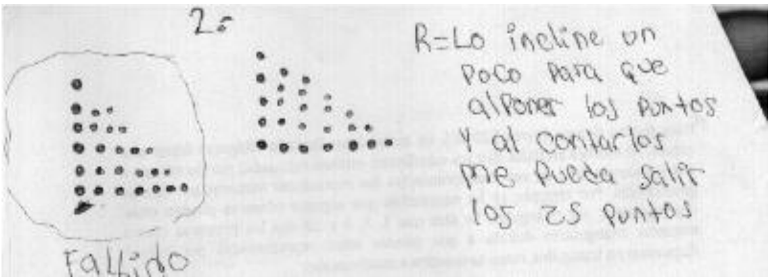


Figura 10. Hoja de trabajo del EQ-2.

En el EQ-2 se determinó que el número triangular es el expresado en la configuración de las figuras de la HT-B. Es decir, si tiene 3 “bolitas”, es el número triangular 3; si son 10 “bolitas”, es el número triangular 10. (ver figura 10). En el caso del número triangular 25, estos estudiantes intentaron acomodar 25 “bolitas” para forzar la formación de un triángulo. Podemos constatar que la presentación de los números triangulares en forma desordenada promueve una estrategia incorrecta. Los alumnos en su trabajo en equipo no logran percibir la contradicción de su propuesta visual para calcular, por ejemplo, el triangular 25.

El equipo de Omar tenía una representación de los números triangulares ordenados. Omar en su trabajo individual (ver figura 9), ya contaba con una estrategia novedosa, que utilizaba una tabla de valores. Una vez que se integró el EQ-4 (conformado por Omar, Karla y Diana), fue notoria la influencia de Omar entre los miembros de su equipo. Así, Karla y Diana inician también un trabajo numérico. Se pueden seguir las trazas dejadas por el equipo, ya que la consigna en trabajo de equipo era la de escribir con tinta roja.

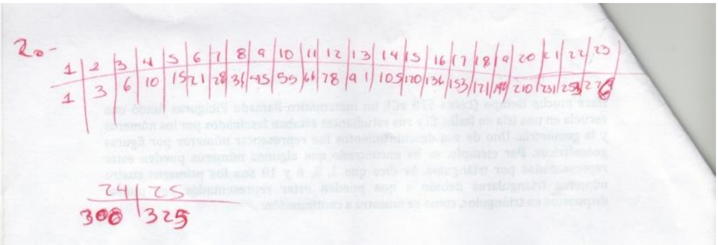


Figura 11. Hoja de trabajo Diana.

Karla sugiere una conjetura de su interacción con Omar y Diana: $y = 0.52 * x^2$. Esto es precisamente lo que se buscaba en relación a nuestra propuesta. Si bien la conjetura no podrá ser corroborada porque ella no proporciona una expresión correcta, sí podemos asegurar que entre el trabajo visual y el numérico hubo procesos de visualización que permitieron llegar a una expresión algebraica interesante.

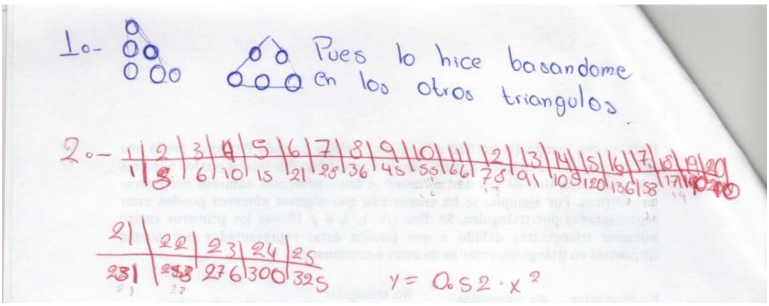


Figura 12. Hoja de trabajo de Karla.

En resumen, los resultados de esta etapa de trabajo en equipo nos muestran cuatro aspectos:

1°. La presentación de los números triangulares en forma ordenada promueve una estrategia correcta para continuar calculando triangulares posteriores.

2º. La presentación de los números triangulares en forma desordenada promueve una estrategia incorrecta. Los alumnos en su trabajo en equipo no lograron percibir la contradicción de su propuesta visual para calcular, por ejemplo, el triangular 25.

3°. La importancia del trabajo en equipo. Este tipo de trabajo en colaboración promueve cambios en las ideas iniciales de los alumnos. Es notoria la influencia de Omar sobre las representaciones iniciales de Karla y Diana, promoviendo una evolución y la conformación del equipo de Karla, Diana y Omar les permite proponer una conjetura. Este proceso de construcción sociocultural del conocimiento está divido en etapas y ésta es una de ellas.

4°. El surgimiento de conjeturas, ya sea de tipo verbal o de tipo algebraico, como la proporcionada por Karla en su interacción con Omar y Diana: $y = 0.52 * x^2$.

Esta evolución nos proporciona elementos de reflexión sobre los procesos de visualización matemática (Zimmermann & Cunningham, 1991), cómo las conjeturas, desde un punto de vista visual y aritmético, se convierten en conjeturas explícitas en el contexto algebraico (Kaput, 2008; Kieran, 2007), y cómo los procesos de control (Saboya, 2010) sobre los procesos algebraicos descansan en resultados aritméticos y/o aritmético-geométricos.

Debate y su Transformación en Debate Científico (Tercera Etapa, Trabajo en Grupo)

En esta etapa se realizó una videograbación de lo que sucedía en el debate. Mostraremos cómo en un contexto sociocultural hubo un avance de las ideas iniciales, tanto en las individuales como en las de los equipos. Para realizar el análisis de esta etapa vamos a dividirlo en episodios. Los participantes son los 14 estudiantes, el profesor y un investigador (“Prof” e

"Inv" en adelante). En el primer episodio vamos a ver cómo uno de los equipos interpreta los números triangulares.

Episodio 1

Está en el pizarrón el equipo de Gaby:

Figura 13. Gaby parece tomar el liderazgo frente al debate de todo el grupo.

Inv: Les pido que realicen el número triangular 6.

Ellas voltean a revisar su hoja de trabajo para recordar cómo habían realizado anteriormente el N-T. 5. Entonces Gaby dibuja 6 bolitas en la base y dice: "Estamos viendo que la base del número 5 era 5"

Inv: ¿Qué dibujaste?

Gaby: "6 puntitos, que es la base del triángulo y de altura también serían 6.

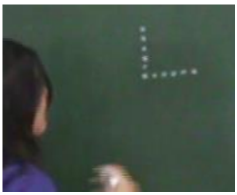


Figura 14. Es notoria la estrategia de "construir la base y el lado del triángulo" antes de llenar con bolitas el resto del triangulo discreto.

Inv: ¿Cuál es la base del número triangular 14?

Gaby: 14.

En este episodio podemos concluir que los alumnos ya son capaces de ver las características de los números triangulares analizando la representación visual.

En el episodio 4, Mónica está frente al pizarrón y explica cómo obtener el número triangular 8 basándose en la figura geométrica y proporcionando el cálculo del área de un triángulo.

Episodio 2: Primera conjetura hacia la fórmula general.

> Mónica: Es que sacaremos lo que es el área del triángulo, que sería 8 por 8, que son 64 y lo dividimos entre 2, es 32.

Figura 15. Calculando según la conjetura el triangular 8.[Se oye una voz muy baja de una niña que dice: “pero no, ¿qué no sería 36?”]

> Observación: esta intervención muestra que una alumna ha detectado una contradicción (contradicción cognitiva). La alumna relaciona un cálculo anterior con el resultado propuesto por Mónica. Podemos decir en este momento que el cálculo numérico de los números triangulares proporcionó una estructura de control que permite evidenciar a la estudiante la contradicción. La alumna realizó este comentario solamente con sus compañeros más próximos.

El investigador escuchó a la alumna e intervino, pero en lugar de solicitar a la alumna que explicara, él mencionó lo siguiente:

> Inv: A ver, revisa esa teoría que me estás diciendo con un número triangular que tenga…

El investigador fue interrumpido por Roberto.

> Observación: felizmente, el alumno Roberto interrumpió al investigador, proporcionando argumentos propios de los alumnos. Es decir, el experto, el investigador o el profesor, sabían de la contradicción formal, pero era importante que fueran los alumnos quienes la detectaran.

Roberto: Pero… éste, el número triangular del 8, sería 36 y no 32, entonces no puede ser.

Inv: Pasa por favor al pizarrón, Roberto.

El equipo de Roberto pasó al pizarrón y comenzó a calcular el número triangular 6. Ese número triangular había sido dibujado en el pizarrón al principio de la discusión en grupo y por eso lo retomaron.

María, del equipo de Roberto, empezó a hacer la figura escribiendo 6 bolitas en la base y 6 bolitas en la altura.

Roberto: [Señalando la figura que acaba de realizar María] Este es el número 6, aplicamos la fórmula que dice base por altura sobre dos, sería 6 por 6, da 36 entre 2 tocaría a 18; mientras que el número triangular vendría siendo 21, entonces no daría la fórmula ésta [señala la fórmula].

Prof: ¿Qué diferencia hay entre…… si aplicas la fórmula que te dice? Aplica la fórmula, apúntale ahí [se refiere a que escriba en el pizarrón].

María escribe la fórmula:

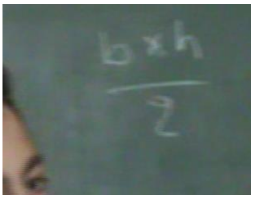


Figura 16. Fórmula asociada a la conjetura.

Prof: En este caso ¿cuál es la base?

Roberto escribe, 6*6/2 son 18 y no es el número triangular.

Prof: ¿Cuál es el número triangular?

Los alumnos contestaron a coro :” 21.”

Roberto: Su diferencia sería 3.

Prof: ¿Su diferencia sería…?

Roberto: 3.

Roberto calculó el número triangular 8 escribiendo la fórmula. El resultado fue 32.

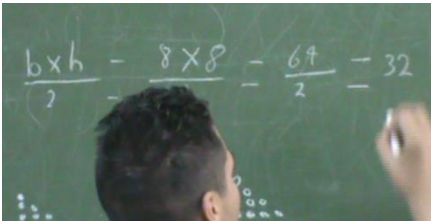


Figura 17. Utilizando su fórmula para calcular el triangular 8 y mostrando que la fórmula no funciona.

> Prof: Y el número triangular 8, ¿cuál es?
> Roberto: Es 36.
> Prof: ¿El del 8?
> Observación: Cuándo el profesor (experto) hace la pregunta, Roberto duda y tiene que recurrir nuevamente a la estructura de control más elemental, que es contar bolitas.
> Roberto empieza a contar las bolitas de la figura que ya tenía en el pizarrón y dice: " 36."
> Se oyen voces que dicen: "la diferencia es 4".

En este episodio vamos a ver cómo los alumnos construyen en equipo una fórmula para los números triangulares, se dan cuenta que ésta no funciona y la rectifican.

Episodio 3: ¡EUREKA! Rectificando la fórmula en un debate científico.

Se oye una voz sorprendida que dice: " y del 8 es cuatro, entonces sería un medio".

> Gaby: La mitad de 8 es 4 y 4 son los números que le falta a 32 para ser 36, entonces en la fórmula tenemos que poner base por altura entre dos más …[pausa] más la mitad del… [pausa] más la mitad del número triangular, la mitad… [pausa] la mitad de la base.
> Observación: Es importante señalar aquí que Gaby intervino explicitando una relación numérica y poco a poco (en su discurso hubo varias pausas) completó su idea, pasando de lo numérico a lo geométrico. El elemento de control es claro que fue proporcionado

por la relación aritmética y de allí pasó a una relación geométrica. En estos momentos están desechando su conjetura inicial y dando pie a una nueva. Los argumentos fueron utilizados para refutar la conjetura.

Prof: Pasa a escribirlo. Una voz de una alumna dice: “creo que entre todos ya va saliendo algo, porque de uno solo no”.

Observación: La construcción sociocultural del conocimiento se ha dado en esta etapa de debate científico (ACODESA, ver Hitt, 2013). La alumna expresa abiertamente la co-construcción generada en el debate.

Gaby pasa al pizarrón a escribir la idea que acaban de tener.

Gaby: ¿Cómo represento la mitad de la base?

Es interesante observar que ahora Gaby tiene dificultades para transformar el argumento geométrico "mitad de la base" en términos algebraicos.

Inv: Un medio o eso, entre la mitad.

Gaby escribe $(b * h)/2 + (1/2)$ y entonces le dicen: “un medio del número triangular.”

Muchos estudiantes intervinieron al unísono proponiendo la escritura final, sugiriendo a Gaby cambiar lo que había escrito. De hecho, en este proceso, Gaby se dejó guiar por sus compañeros, ya que ella no entendía bien el proceso de "mitad de la base" y la escritura $b/2$. Finalmente, ella escribe:

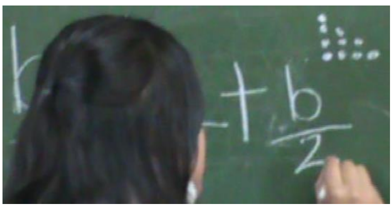


Figura 18. Nueva conjetura, producto del debate en gran grupo.

Prof: Y ¿ cómo representas el número triangular? En esa fórmula que estás escribiendo ahí ¿cómo representas el número triangular ?

Alumnos: La base o la altura.

Gaby escribe la fórmula $(b * h)/2 \ + (b/2)$

Prof: Precisamente lo que él decía, la altura ¿ a qué es igual?

Alumnos: A la base.

Prof: Entonces ya sustitúyela para que no metas la altura.

Alumnos: Sería base por base.

G aby escribió mal la formula y la corrigieron, así que la escribió correctamente:$(b * b)/2 + (b/2)$

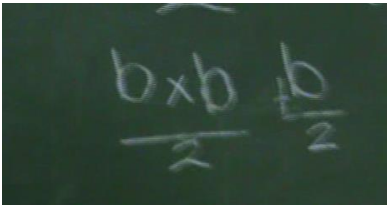


Figura 19. Expresión partiendo del hecho de que la base es igual a la altura.

Prof: Ok, entonces ¿base por base cuánto es?

Alumnos: Base cuadrada.

Gaby escribe finalmente la fórmula presentada en la figura 20.

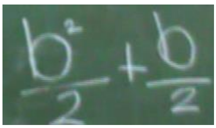


Figura 20. Expresión final construida en el debate.

Prof: ¿Ustedes creen que ésa es la fórmula ? Pruébenla con el número triangular 15.

Gaby: Tengo que hacer bolitas…

Prof: No, no, no, ya tienes la fórmula.

El debate se convirtió en debate científico, los alumnos en conjunto rechazaron su conjetura inicial, proponiendo contraejemplos y al mismo tiempo, construyendo una nueva conjetura que les llevó a proponer la fórmula $(b^2/2) + (b/2)$. En este proceso, es notorio la articulación que realizaron los alumnos con aspectos aritméticos, geométricos y algebraicos. El proceso realizado por ellos, señala precisamente el camino de nuestras hipótesis de trabajo. La construcción de un pensamiento algebraico desde nuestro punto de vista pasa por la construcción de un pensamiento aritmético-algebraico. En la construcción de este pensamiento, no puede dejarse de lado la construcción de una estructura cognitiva ligada al control de la actividad matemática.

Estos resultados apuntalan lo expresado por Kaput (2008) y Artigue (2002) sobre la construcción natural del pensamiento algebraico y confirman la importancia de la construcción de una estructura de control en el sentido de Saboya.

En el apartado sobre las preguntas de investigación, las dos primeras son: ¿Tienen los estudiantes de secundaria las competencias necesarias para resolver problemas de corte aritmético-geométrico desde una perspectiva geométrico-algebraica? ¿Promueve la resolución de tareas en ese contexto la construcción de un pensamiento aritmético-algebraico?

Los resultados obtenidos en esta experimentación, proporcionan una respuesta a esas dos primeras preguntas de investigación. En primer lugar, porque un camino natural hacia el pensamiento algebraico requiere de actividades aritmético geométricas que permitan los procesos de visualización y la construcción de una estructura cognitiva de control, llevando finalmente a los alumnos a resolver las tareas planteadas desde una perspectiva algebraica, lo que responde a la segunda pregunta de investigación.

La tecnología jugó un papel secundario en el contexto mexicano. Sin embargo, en la experimentación con los estudiantes en Québec, la tecnología fue un factor sumamente importante (ver Hitt, Saboya & Cortés, 2013). Entonces, con lo que respecta a la tercer pregunta de investigación reportada en este documento con respecto a la población mexicana, no podemos proporcionar elementos importantes en la resolución de la tarea solicitada en el contexto tecnológico.

Cuarta Etapa (Trabajo Individual)

Esta etapa, que denominamos Auto-reflexión, consistió en volver a aplicar la hoja de trabajo a cada uno de los participantes. La etapa se realizó 30 días después de las primeras.., la asistencia fue de solamente 10 estudiantes. La idea principal de esta etapa era auscultar cuántos de los estudiantes podían reconstruir la fórmula en un proceso individual.

Se solicitó a los alumnos realizar la siguiente tarea:

1ª. pregunta: Calcula el número triangular 27.

2ª. pregunta: Escribir la fórmula para calcular cualquier número triangular.

3ª. Pregunta: usando tu fórmula, calcula el número triangular 313.

Los resultados son los siguientes: de los 10 estudiantes, 2 continuaron con el proceso de dibujar “bolitas” (ver ejemplo en la figura 21).

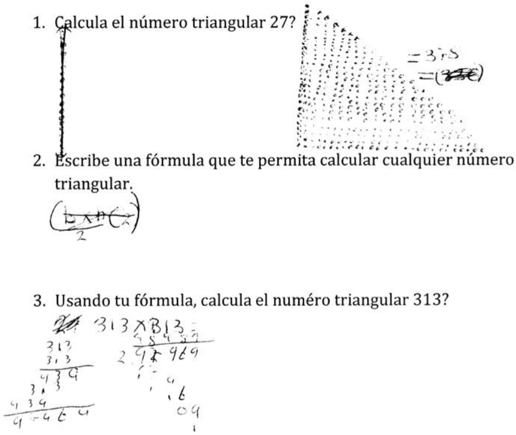


Figura 21. Dos alumnos siguieron la estrategia de contar bolitas

Cuatro de los diez, reconstruyeron una expresión similar a la primera conjetura escribiendo: $(b * h)/2$. Un alumno pudo reconstruir la fórmula pero perdió la relación geométrica llevándolo a contradicciones (ver ejemplo en la figura 21).

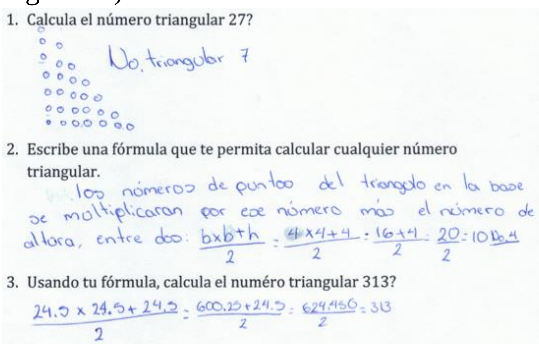
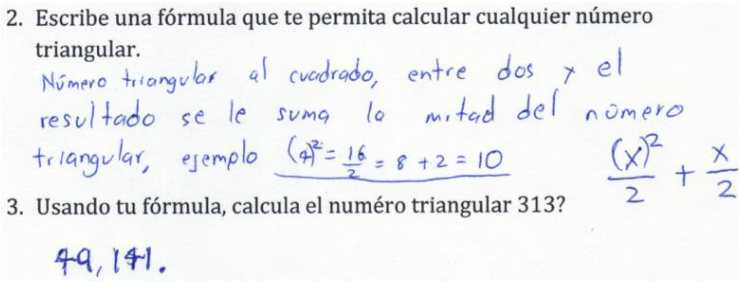


Figura 22. Cuatro de 10 alumnos regresó a la conjetura inicial y uno reconstruyó la fórmula pero perdió el contexto, lo que lo colocó en una situación de contradicción.

Finalmente, tres reconstruyeron la fórmula exhibiendo un conocimiento estable.


2. Escribe una fórmula que te permita calcular cualquier número triangular.

Número triangular al cuadrado, entre dos y el resultado se le suma la mitad del número triangular, ejemplo $\frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8 + 2 = 10$ $\quad \frac{(x)^2}{2} + \frac{x}{2}$

3. Usando tu fórmula, calcula el numéro triangular 313?

49,141.

Figura 23. Tres de diez alumnos reconstruyeron (etapa de Auto-reflexión) correctamente lo realizado en el debate.

Ello nos indica que en el proceso de auto-reflexión y reconstrucción de lo sucedido en el debate, solamente tres de los alumnos realizaron una reconstrucción adecuada. El resto (siete), mostraron un retroceso, regresando a su posición inicial antes del debate en gran grupo.
Específicamente en las producciones que se muestran en las Figuras 21, 22 y 23, podemos observar diferentes tipos de comportamiento:

a) Retorno a las representaciones figurales para encontrar el número triangular solicitado y errores al reconstruir o recordar la expresión algebraica correspondiente.
b) Capacidad de recordar una fórmula ligada a la primera conjetura, pero pérdida de la relación con la figura. Un alumno consideró el 313 como el triangular y realizó un cálculo que le permitió llegar aproximadamente al 313 proponiendo 24.5. Este alumno, aún cuando reconstruyó la fórmula, perdió el contexto y no se percató que estaba en situación contradictoria, como es el caso de los otros cuatro.
c) Notación que está ligada totalmente a los procesos geométricos.
d) Notación algebraica precisa que le permite al alumno calcular el número triangular solicitado.

Resultados similares son reportados por Thompson (2002) sobre un retroceso después de un período de "consenso" en la resolución de un problema. De hecho, inspirados por este tipo de resultados y de la importancia de reflexionar más tiempo sobre una actividad matemática (Hadamard, 1945) fue que nosotros incorporamos una etapa de auto-reflexión a la metodología ACODESA (Hitt, 2007, 2013). Esta etapa puede proporcionarnos mayor información acerca de quiénes verdaderamente han construido un conocimiento estable. Es bien sabido que el conocimiento "se pierde" con el tiempo (Karsenty, 2003). Es por ello que, en principio, el gran problema en la enseñanza de las Matemáticas consiste en la construcción de un conocimiento estable.

Nosotros creemos que los resultados demuestran que lo importante no es que los alumnos resuelvan un problema, sino que se pueda construir un pensamiento aritmético-algebraico más sólido que permita desarrollar una estructura de control que sirva no solamente para aprender álgebra, sino también para aprender cualquier concepto matemático, en donde la estructura de control juegue un papel fundamental.

Conclusiones

El diseño de las actividades sobre los números triangulares promovió en los estudiantes procesos de visualización en el sentido de Zimmermann y Cunningham (1991), en donde las representaciones funcionales y sus respectivas representaciones externas jugaron un rol fundamental en la construcción de una estructura cognitiva ligada al control de la actividad matemática en algunos estudiantes.

La estructura cognitiva sobre el control tiene que ver con la proposición de conjeturas y la construcción de contraejemplos. Si la conjetura pareciera no funcionar, por qué nos detenemos en nuestro proceso y seguimos otro o por qué buscamos la producción de contraejemplos o de argumentos que permitan validar un resultado. Los estudiantes en la experimentación propusieron la conjetura de que la base por la altura sobre 2 sería la fórmula para calcular cualquier número triangular. Los contraejemplos proporcionados por ellos mismos fueron aquellos que surgieron en los procesos visuales y aritméticos antes de la propuesta algebraica. El debate científico promovió la construcción de una fórmula correcta para calcular cualquier número triangular $(b^2 + b)/2$. Este descubrimiento es completamente diferente de lo que se realiza en una enseñanza clásica sobre los números triangulares, que es la de proponer la fórmula n(n+1)/2.

Con lo anterior queremos mostrar que una construcción sociocultural del conocimiento puede diferir considerablemente de la versión institucional. Un elemento fundamental en este proceso es la co-construcción del saber, como lo señaló de manera natural una de las alumnas: "creo que entre todos ya va saliendo algo porque de uno solo no".

Los resultados obtenidos en la etapa de auto-reflexión nos muestra la importancia de crear un conocimiento estable. Aún con todo el trabajo desarrollado por los estudiantes en cada una de las etapas, el hecho de que, un mes después de la experimentación, 3 alumnos de 10 hubieran podido reconstruir la fórmula exacta, muestra la fragilidad del conocimiento. Sin mencionar que algunos, en su reconstrucción, estaban en posición de contradicción y que ellos mismos no la detectaron.

La experimentación que realizamos fue corta y exclusiva de los números triangulares. De acuerdo a los resultados, creemos que se debe continuar con las actividades para construir los siguientes números poligonales y que la actividad completa pueda proporcionar mejores resultados. En esta experimentación, los alumnos no utilizaron mucho las herramientas tecnológicas, como se dio en el caso con la población de Québec.

Agradecimientos

Se agradece a la Coordinación de Investigación Científica de la UMSNH por el apoyo otorgado al proyecto No. 9.5. Asimismo, queremos agradecer al Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada por el apoyo otorgado al proyecto No. 410-2008-1836, CID 130252. Agradecemos también al Prof. Gerardo Carrillo Mata, profesor de Matemáticas de la Escuela Federal Ignacio Manuel Altamirano de Zacapu, Michoacán, por su apoyo en la realización de la experimentación.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Retrieved from: http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/

Aspinwall, L., Shaw, K. & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301-317. doi: 10.1023/A:1002976729261

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. *18*(2) 147-176. doi: 10.1007/BF00314724

Brownell, W. A. (1942). Problem solving. In N.B. Henry (Ed.), *The psychology of Learning* (41st Yearbook of the National Society for the Study of Education. Part 2). Chicago: University of Chicago press.

Coxford, A. F. & Shulte, A. P. (1988). *The ideas of algebra, K-12*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 37-65). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37). MAA Series, No. 19. USA.

Gonzalez, A., Hitt, F., & Morasse, C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepts co-variation and spontaneous representations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter* (Vol. 3, pp. 89-97). Morelia: PME.

Hadamard, J. (1945). *The Psycology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University press.

Healy, L. & Sutherland, R. (1990). The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *21*(6), 847-862. doi: 10.1080/0020739900210603

Hitt, F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(3), 447-455. doi: 10.1080/0020739940250318

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. En G. Lemoyne (Ed.), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude*. *Revue des Sciences de l'Éducation*. Volume XXX, (pp. 329-354).

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Ed.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris: Éditorial Hermes.

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18*, 9-27.

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación et Internet*, *10*(1), 1-30.

Hitt, F. & Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes**.** *Proceedings CIEAEM 61*. Montréal, Quebéc, Canada.*"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2*. G.R.I.M. (Department of Mathematics). University of Palermo, Italy.

Hitt, F., Saboya, M. & Cortés, C. (2013). Structure cognitive de contrôle et compétences mathématiques de l'arithmétique à l'algèbre au secondaire: Les nombres polygonaux. *Actes du congrès CIEAEM65*. Turin, Italia.

Kaput, J.J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26).

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is Algebraic Reasoning?. In J.J. Kaput, D. Carraher & M.L.Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York : Routledge.

Karsenty, R. (2003). What adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 51, pp 117-144. doi: 10.1023/A:1022429504802

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. *En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Legrand, M. (2001) *Scientific debate in mathematics courses.* En D. Holton (Ed.), *Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study* (pp. 127-135). Springer.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3) 365-406.

Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 221–280.

Páez, R. E. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México. Retrieved from: http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/

Panitz, T. (2001). *Collaborative versus cooperative learning- a comparison of the two concepts which will help us understand the underlying nature of interactive learning.* Retrieved from: http://www.capecod.net/~tpanitz/tedspage/tedsarticles/coopdefinition.htm.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 297-311. doi: 10.1007/BF00305075

Presmeg, N. & Balderas, P. (2001). Visualization and affect in nonroutine problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, *3(4)*, 289-313. doi: 10.1207/S15327833MTL0304_03

Presmeg, N. & Balderas, P. (2002). Graduate Students´Visualization in Two Rate of Change Problems. In F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 47-61). International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Tesis de doctorado no publicada. Université du Québec à Montréal.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Mathematics* (pp. 25-37). MAA Series, No. 19. USA.

José C. Cortés Zavala es profesor de didáctica de las matemáticas, en el Departamento de Matemáticas, Universidad Michoacana, México.

Fernando Hitt es profesor de didáctica de las matemáticas, en el Departamento de Matemáticas, Université du Québec à Montreal, Canadá.

Mireille Saboya es profesora de didáctica de las matemáticas, en el Departamento de Matemáticas, Université du Québec à Montreal, Canadá.

Contact Address. Postal address: Virrey de Mendoza 1153 col. Ventura Puente c.p. 58020 Morelia, México. **Email**: jcortes@umich.mx