REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Estudio de Caso sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio

Adriana Breda[1], Valderez Marina do Rosário Lima[2]

1) Universidad de Los Lagos, Chile
2) Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Brazil

Date of publication: February 24th, 2016
Edition period: February 2016-June 2016

To cite this article: Breda, A., & Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103. doi: 10.4471/redimat.2016.1955

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1955

REDIMAT, Vol. 5 No. 1 February 2016 pp. 74-103

Estudio de Caso sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio

Adriana Breda
Universidad de Los Lagos

Valderez M. do Rosário Lima
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

(*Recibido: 10 Marzo 2015; Aceptado: 16 Febrero 2016; Publicado: 24 Febrero 2016)*

Abstract

Este artículo tiene como objetivo investigar las características del análisis didáctico realizado por profesores del Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), para justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras y representan una mejora con relación a la enseñanza de las matemáticas que se realiza habitualmente. Para ello se presenta un estudio de caso de un profesor que ha planificado e implementado una propuesta didáctica innovadora. La primera conclusión es que el análisis didáctico realizado por este profesor se basa en el uso implícito de algunos de los componentes y descriptores de la idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Se concluye también que, aunque la justificación que realiza el profesor estudiado evidencia el uso implícito de algunos de estos componentes y descriptores, no llega a ser una reflexión bien estructurada ni demasiado elaborada.

Keywords: Análisis didáctico, criterios de idoneidad, trabajo de fin de máster

2016 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2016.1955

REDIMAT, Vol. 5 No. 1 February 2016 pp. 74-103

Case Study on the Didactic Assessment over a Final Work of a Master for Mathematics Teachers in Service

Adriana Breda
Universidad de Los Lagos

Valderez M. do Rosário Lima
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

(*Received: 10 March 2015; Accepted: 16 February 2016; Published: 24 February 2015)*

Resumen

This article aims to investigate the didactic assessment characteristics conducted by teachers within Brazilian Professional Master Programme in Mathematics (PROFMAT), to justify that their didactic proposals are innovative and represent an improvement over the common ways which mathematics is taught. For this, a case study of a teacher who has planned and implemented an innovative educational proposal is presented. One of the findings was that his didactic analysis is based on implicit using of several components and descriptors of didactic suitability, which are proposed by the Ontosemiotic of Mathematics Cognition and Instruction Approach. It is also concluded that, despite of the implicit use of some components and descriptors highlighted by the justification of the studied teacher, it is hardly considered as a well-structured or even a developed discussion.

Palabras clave: Didactic analysis, suitability criteria, master thesis

2016 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2016.1955

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Las políticas de formación continuada tienen por objetivo general que los profesores realicen una práctica que sea cada vez *mejor*, de más *calidad*. Si bien hay diferentes políticas de formación continuada, hay dos modelos claramente diferenciados. En el primer caso, se realizan asesoramientos en el propio centro educativo, para conseguir una reflexión crítica sobre la propia práctica de la cual se puedan derivar cambios. En el segundo caso, se ofrecen cursos de formación permanente a los que el profesor se inscribe a título personal. Se supone que el desarrollo profesional conseguido producirá un cambio en las prácticas del profesor asistente, que a su vez se pueden extender a sus compañeros de trabajo.

En relación al segundo modelo, Moreira (2004) plantea, con relación al caso de Brasil, donde los másteres académicos actuales no satisfacen las necesidades emergentes de la práctica docente y, en consecuencia, defiende la idea de la creación de másteres profesionales en la enseñanza de disciplinas específicas (Matemáticas, Física, Ciencias, etc.), ya que este tipo de máster se dirige a la práctica de los profesores y ofrece un plan de estudios que aborda la didáctica del área de conocimiento.

En un intento de formar a los profesores de matemáticas en ejercicio, siguiendo las sugerencias del párrafo anterior y responder al objetivo dieciséis de la ley 13.005 / 2014 del *Plano Nacional de Educação (PNE)* - conseguir que en el año de 2020 cincuenta por ciento de los maestros de educación básica logren una formación en postgrado (Ministério da Fazenda et al, 2014) - se inició en 2010, el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT),* a través de la recomendación del *Conselho Técnico-Científico de Educação Superior* de la *Coordenação de Aparefeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).*

Este máster está constituido como un curso de postgrado *strictu sensu*, semi-presencial, se ofrece en todo el territorio nacional de Brasil, está coordinado por la *Sociedade Brasileira de Matemática (SBM),* y tiene como objetivo principal atender a los maestros de matemáticas que trabajan en la enseñanza básica, especialmente en las escuelas públicas. Su objetivo es la mejora de su formación profesional, con énfasis en el dominio profundizado del contenido matemático relevante para su desempeño docente, de acuerdo con la misión estatutaria de la SBM "*estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles*." En este sentido, tiene como objetivos principales, (PROFMAT, 2013a, 2013b):

- Estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles;

- Calificar a los profesores de matemáticas de Enseñanza Básica con un nivel de posgrado *stricto sensu*, con énfasis en el dominio de los contenidos matemáticos, ofreciendo un curso de formación profesional que se ocupa de las necesidades derivadas del trabajo cotidiano de la escuela;
- Fomentar una actitud crítica sobre las clases de matemáticas en los niveles de educación primaria y secundaria, subrayando el papel central de los conocimientos de las matemáticas para afrontar las demandas de la sociedad moderna;
- Buscar el desarrollo profesional de los docentes mediante la mejora de su formación.

Recientemente, hay cierto interés en Brasil en investigar qué características deben tener los programas de formación profesional de los docentes para que éstos sean eficaces. Belfort y Mandarino (2008), por ejemplo, afirman que los programas de formación continua deben promover la profundización en los saberes disciplinares, pero sin disociarlos de los saberes pedagógicos, pues esta articulación es la que va a generar prácticas de enseñanza que consigan un mejor aprendizaje de los alumnos y muestran, como ejemplo de ello, el programa de formación continua denominado *Pré-Letramento em Matemática* dirigido a profesores brasileños de la etapa inicial. Gatti (2008) discute la forma cómo los procesos de educación continuada de profesores, presenciales o a distancia, han sido implementados en el contexto de las políticas educacionales del Brasil (tanto a nivel federal, estatal o municipal) en la última década y, en particular, presenta una discusión sobre la oferta y calidad de estos programas en el escenario brasileño. Miranda (1999), también presenta reflexiones sobre la eficacia del *Programa de Educação Continuada* promovido por el *Ministério de Educação do Brasil (PEC).* En particular, algunas de estas investigaciones se han centrado en la eficacia de los programas de formación de profesores de matemáticas en el Brasil (Bairral, 2002; Santos, 2012; Silva Filho, 2013, Franca, 2012; Ferreira, 2013; Prado, Silva & Araujo, 2011). Esa misma preocupación puede ser encontrada en investigaciones de ámbito internacional, tanto en el escenario europeo, como en el mundo anglosajón (Darling-Hammond, 1995; Darling-Hammond & Sykes, 1999; Franke, Carpenter & Fennema, 2001; Birman, Desimone, Porter & Garet, 2000; Desimone et al., 2002; Elmore & Burney, 1997; Lee, 2005; Guskey, 2003; Guskey & Yoon, 2009; Ingvarson, Meiers & Beavis, 2005; Godino y

Batanero, 2008). De manera general, estos estudios demuestran que los profesores que han participado de dichos programas están más direccionados en los problemas concretos de la clase; discuten sus ideas y propuestas pedagógicas con más frecuencia; son colaborativos y trabajan mejor en equipo y, además, presentan conexiones entre el conocimiento del contenido a ser enseñado y los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta línea de investigación sobre la eficacia de los programas de desarrollo profesional docente, consideramos relevante investigar en qué medida está siendo alcanzado el objetivo de estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas del PROFMAT, de tal forma que se puedan tener elementos de *feedback* que permitan dar sugerencias de mejora al programa.

El trabajo que se presenta aquí tiene por objetivo investigar las características del análisis didáctico realizado por profesores del *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT),* para justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras y representan una mejora con relación a la enseñanza de las matemáticas que se realiza habitualmente. En particular se realiza el estudio detallado y exhaustivo del análisis didáctico de la propuesta innovadora de un alumno de dicho máster. Este objetivo forma parte de una investigación más amplia, que tiene como finalidad general responder a la siguiente pregunta: ¿de qué manera los profesores que cursan el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* en la región de *Rio Grande do Sul* conciben la mejora de la enseñanza de las matemáticas?

Después de esta introducción, en la que se explica el objetivo de la investigación, en la segunda sección, se explica el marco teórico y metodológico en el que se enmarca la investigación. En la tercera, se realiza el estudio de un TCC de una universidad del estado de *Rio Grande do Sul*, en particular se analizan con detalle las argumentaciones dadas por el autor para justificar que su propuesta innovadora representa una mejora para la enseñanza de las matemáticas. El artículo termina con un apartado de consideraciones finales.

Aspectos Teóricos y Metodológicos

Las orientaciones establecidas en el PROFMAT exigen que el trabajo final de este máster debe ser desarrollado para temas específicos del currículo de matemáticas de la etapa de Enseñanza Básica del Brasil, de forma innovadora y que tenga, preferencialmente, aplicación directa en el aula

(PROFMAT, 2013a). Dicho trabajo, llamado *trabalho de conclusão de curso* (TCC) es un trabajo de reflexión final en el que el estudiante debe mostrar, por medio de una presentación oral y pública, que, en alguna medida, alcanzó los objetivos del PROFMAT, los cuales le capacitan para mejorar su actuación como profesor de matemáticas en un centro de Educación Básica. En este sentido, según las orientaciones del PROFMAT, el TCC debe ser un espacio para que se efectúe un trabajo transversal contemplando buena parte de los saberes previstos en el máster.

En este trabajo partimos de que el TCC implica un ejercicio de análisis didáctico, dado que se debe explicar una propuesta didáctica y justificar que ésta significa una mejora para la enseñanza de las matemáticas. Ahora bien, encampo de la Educación Matemática no hay un consenso sobre la noción de "calidad" y, en particular, no hay consenso sobre los "métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". Básicamente existen dos maneras de afrontar esta problemática, desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font & Godino, 2011).Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguirlos. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor”.

La noción de criterios de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007, 2008) se posiciona en la perspectiva consensual. Dicha noción es una respuesta parcial a la siguiente problemática:¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorara sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado.

La valoración de la idoneidad didáctica es un nivel de análisis didáctico que forma parte de un modelo más amplio de análisis didáctico de procesos de instrucción propuesto por el EOS. Dicho modelo consta de cinco niveles de análisis, cada uno con sus respectivas herramientas (Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011): 1) Identificación de prácticas matemáticas. 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. 4) Identificación del sistema de normas y meta-normas. 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel de análisis explora las prácticas matemáticas hechas en un proceso de instrucción matemático. El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013; Font, Godino y Gallardo, 2013; Badillo, Font y Edo, 2015; Distéfano, Pochulu y Font, 2015; Rondero y Font, 2015). El tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas (Font, Planas y Godino, 2010; Contreras, García y Font, 2012); las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y meta-normas. El cuarto nivel de análisis estudia dicha trama (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009; Pochulu y Font, 2011).

Los cuatro primero niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Pochulu y Font, 2011; Robles, Del Castillo y Font, 2012). Este último nivel se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

Tal como se muestra en la revisión de la literatura realizada en Breda, Font y Lima (2015), la noción de idoneidad didáctica ha tenido un impacto relevante en la formación de profesores en diferentes países (Mallart, Font y Malaspina, 2015; Seckel y Font, 2015; Pochulu, Font y Rodriguez, 2015). Dicho impacto está relacionado con la idea de que uno de los componentes del conocimiento didáctico-matemático del profesor es aquél que permite valorar y justificar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por esta razón, en esta investigación se ha tomado como referencial teórico para analizar las categorías utilizadas para justificar la mejora de la enseñanza de las matemáticas, que se deriva de las propuestas innovadoras de los TCC, los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS:

> 1. Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". 2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos. y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar. 3. Idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos. 4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción. 6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Font, Planas e Godino, 2010, p.101)

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso de estudio. Por ejemplo, todos concordamos que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por "buenas" matemáticas. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) aportan un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, los cuales están pensados para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. Dado que el profesor de este estudio de caso hace una propuesta para la etapa secundaria, hemos considerado pertinente utilizar la adaptación de dichos componentes y descriptores para la etapa de secundaria que se propone en Font (2015) (tabla 1). Dicha adaptación también se ha utilizado en otras investigaciones, por ejemplo, en Seckel (2016).

Tabla 1
Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Componentes	Descriptores
Idoneidad Epistémica	
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Tabla 1 (…/…)
Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Idoneidad cognitiva	
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias indiv.	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) Promueve procesos meta-cognitivos.
Idoneidad Interaccional	
Interacción docente - discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.

Tabla 1 (…/…)
Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
Idoneidad Mediacional	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutorización, tiempo de aprendizaje)	Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

Tabla 1 (…/…)
Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Idoneidad Emocional	
Intereses y necesidades	Selección de tareas de interés para los alumnos. Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.
Idoneidad Ecológica	
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Para la realización de este trabajo hemos optado por seleccionar un estudio de caso (Ponte, 1994) − que se caracteriza por el análisis, en profundidad, de una situación específica y particular − de un TCC producido y publicado por el programa de *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* en el estado de *Rio Grande do Sul, Brasil*. Dentro del universo de veintinueve TCC − publicados durante el primer semestre de 2013 y segundo semestre de 2014 por las dos universidades de este estado que participan en este programa−, hicimos un estudio de los mismos para clasificarlos en función del tipo de innovación (incorporación de contenidos matemáticos de nivel superior en la Educación Básica, incorporación de las TIC, entre otros) y de la implementación o no de la propuesta (planificación, implementación y rediseño), y escogimos uno que presenta una propuesta didáctica cuya innovación consiste en el establecimiento de conexiones intra-matemáticas en la Educación Secundaria y que, además, fue implementado.

Estudio de un Caso que Presenta la Implementación de una Propuesta que Tiene Como Innovación el Establecimiento de Conexiones Intra-matemáticas en la Enseñanza Secundaria

En esta sección presentamos el análisis de un caso que presenta la implementación de parte de una secuencia de tareas cuya propuesta innovadora consiste en el establecimiento de conexiones intra-matemáticas, específicamente, la propuesta de implementar el estudio de los polinomios por medio de un abordaje funcional. Explicamos, primeramente, la estructura del TCC y seguidamente analizamos los argumentos, reflexiones, etc. que el autor realiza para justificar que su propuesta posibilita una mejora con relación a la enseñanza usual de los polinomios.

Estructura del TCC

El autor afirma que generalmente se da un tratamiento superficial al cálculo del valor numérico y al cálculo de las raíces de un polinomio. Por otra parte afirma que, además de dar importancia a estos dos contenidos su propuesta didáctica presenta un enfoque más funcional entrelazado con el uso de la tecnología, lo cual permite poner el énfasis en los procesos investigativos y argumentativos y en el uso del programa *GeoGebra* para la generación de gráficos de las funciones polinómicas.

En el primer capítulo el autor presenta una breve revisión histórica sobre los polinomios destacando los principales resultados y personajes que contribuyeron a su estudio. El segundo capítulo trata sobre la forma en que los polinomios se presentan en los libros de la etapa de Enseñanza Secundaria del Brasil. Presenta una reflexión sobre los Parámetros Curriculares Nacionales del Brasil para la Etapa Básica (Primaria y Secundaria) (PCN) destacando que hay un eje dedicado al álgebra que remarca la conexión de ésta con las funciones.

En el tercer capítulo el autor se propone identificar los polinomios como funciones polinómicas y, después, introducir los conceptos de valor numérico y de raíz de un polinomio desde un punto de vista funcional. Utilizando el *GeoGebra* presenta un estudio de las funciones polinómicas, mostrando la relación que hay entre el número de veces que el gráfico corta al eje x con el grado del polinomio. Seguidamente, el autor se preocupa en dar énfasis al número de operaciones necesarias para el cálculo del valor numérico y en buscar una fórmula que nos dé el número de estas operaciones. A continuación se dedica a presentar el método de *Ruffini* y también se preocupa por el número de operaciones necesarias para encontrar el valor numérico de una función polinómica por este método. Luego muestra que el método de *Ruffini* disminuye el número de operaciones necesario para calcular el valor numérico. En lo que sigue, el autor se preocupa del cálculo de las raíces de un polinomio mediante el Teorema del Valor Intermedio y en justificar el Teorema Fundamental del Álgebra de manera gráfica, relacionando el gráfico generado por el polinomio con los puntos de corte del gráfico con el eje de las abscisas. También introduce la Regla del Signo de Descartes para contar las raíces positivas y negativas de un polinomio y, por último, explica el Teorema de las Raíces Racionales para determinar las raíces racionales de un polinomio.

En el capítulo cuatro el autor muestra la implementación de parte de la propuesta planificada en el capítulo tres, en el tercer año de Enseñanza Secundaria, conectando, mediante la definición de polinomio, la idea de valor numérico y la de raíz de un polinomio desde un punto de vista funcional. Seguidamente realiza actividades que tienen como objetivo encontrar las raíces de polinomios a través del Teorema del Valor

Intermedio y de la construcción del gráfico del polinomio con el *GeoGebra*.

A continuación realiza una actividad que consiste en que los alumnos hallen las raíces del polinomio cuando este está expresado en forma factorial. El autor se preocupa por hacer que los alumnos dividan un polinomio por uno de sus factores sin explicar antes un método de división, o sea, los alumnos deben multiplicar los factores excluyendo aquel que se sugiere como divisor, proponiendo, a partir de esto, una actividad para introducir la regla de *Ruffini* para la división de polinomios. Además de esto, utiliza la regla de *Ruffini* para calcular los valores numéricos y enfatiza que el cálculo del valor numérico por el método de *Ruffini* permite menos operaciones que cuando se usa o método de sustituir en la expresión del polinomio. Finaliza la actividad con la introducción del esbozo del gráfico en el *GeoGebra* para que los alumnos visualicen las raíces y las concavidades.

El TCC termina con unas consideraciones finales en las que el autor argumenta que su propuesta de presentar los polinomios de forma práctica, intuitiva y con recursos computacionales es innovadora de acuerdo con los objetivos del PROFMAT. También comenta que antes de la experimentación tenía dudas sobre si su propuesta se podría aplicar por cuestiones de tiempo y si tendría efectos para la preparación de los alumnos para el ingreso en la universidad. Comenta, también, que después de la aplicación de la propuesta los alumnos no presentaron dificultades para resolver las tareas, que el tiempo fue suficiente y que los alumnos estaban más entusiasmados, concluyendo que su propuesta es viable y que se adapta a las directrices curriculares nacionales.

Presentada una síntesis del TCC de Dierings (2014), vamos mostrar a continuación cuáles de los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS son contemplados, implícitamente o explícitamente, por el autor, cuando trata de justificar que la secuencia de tareas presentada en su TCC representa una mejora con relación a la enseñanza habitual de los polinomios.

Criterios de Idoneidad Didáctica

En este artículo, de acuerdo con Ramos y Font (2008), partimos del supuesto de que cuando los profesores tienen que reflexionar sobre una propuesta didáctica que signifique un cambio o una innovación de su propia práctica, utilizan de manera implícita algunos de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS. A continuación vamos a mostrar párrafos de la justificación dada por el autor de la calidad de la su propuesta, que se pueden considerar evidencias de un uso implícito de algunos de los descriptores de los diferentes componentes de los criterios de idoneidad didáctica.

Idoneidad epistémica

En este TCC se observa que el autor realiza comentarios, reflexiones, etc. que permiten concluir que el autor tiene en cuenta implícitamente algunos de los descriptores de la idoneidad epistémica.

Errores

En el TCC no aparecen comentarios relacionados con errores cometidos por el profesor y tampoco se observan prácticas que se puedan considerar incorrectas desde el punto de vista matemático.

Ambigüedades

El autor del TCC valora de manera general la secuencia de tareas implementadas y considera que todo ha ido muy bien y que los alumnos no tuvieron dificultades, de lo cual podemos inferir que él no notó que sus explicaciones, o los materiales didácticos suministrados a los alumnos, pudiesen estarles causando ambigüedades o confusiones.

Riqueza de procesos

El autor del TCC justifica la calidad de su propuesta innovadora en el hecho de que ésta fomenta que los alumnos realicen procesos matemáticos relevantes, en especial, procesos intuitivos, argumentativos e investigativos:

> El presente trabajo de tesis de maestría tiene como objetivo proponer una nueva forma de abordar la enseñanza de los polinomios. Dado que este contenido se trabaja en el último año de la escuela secundaria, presentamos una propuesta, enfocada hacia

> la educación superior, investigativa e intuitiva, sin dejar de poner el énfasis en las definiciones y teoremas. (Dierings, 2014, p.09)
>
> No estamos considerando que el alumno ya sea capaz de entenderlas demostraciones con el debido rigor matemático, sino que los resultados sean presentados de una manera investigativa que facilite su asimilación. (Dierings, 2014,p.13)

Además de esto, en su relato se observa que algunos de estos procesos efectivamente se realizaron durante la implementación. Por ejemplo, en los párrafos que siguen hay algunas evidencias de que se realizaron, respectivamente, procesos de resolución de problemas, argumentación y formulación de conjeturas:

> Tomamos nota de que varios estudiantes se dieron cuenta de la continuidad de la función, aunque intuitivamente, y así dedujeron que si tenemos un determinado P(a) negativo y después un P(b) positivo, entonces hay un valor de c, con a <c <b tal que P(c) = 0. En este punto se los presentó el teorema del valor intermedio. Aunque sin hacer la demostración, el teorema fue entendido y asimilado. (Dierings, 2014, p.49)
>
> Al observar el desarrollo de la Actividad05, observamos que los estudiantes, incluso sin conocer ningún procedimiento de división de polinomios, se dieron cuenta de que sería suficiente hacer el producto de los polinomios excluyendo el divisor. (Dierings, 2014, p.61)
>
> Todos los estudiantes estaban de acuerdo en que este proceso es más rápido y más conveniente para encontrar el valor numérico de un polinomio. Algunos, incluso, utilizaron hojas de cálculo, consiguiendo que el software realizase los cálculos por el método de Horner. (Dierings, 2014, p. 65)
>
> Además dela observación delos elementos anteriores, estimulamos al estudiante a pensar en el número de veces quela gráfica corta al eje de abscisas y así establecer una relación con el grado del polinomio. Otro aspecto interesante de observar es la cantidad de veces que la función cambia de creciente a decreciente y viceversa. Durante este análisis hemos utilizado términos, aunque aún no definidos, como la raíz del polinomio y la noción de máximo y el mínimo. (Dierings, 2014, p.26)

Representatividad

El autor del TCC presenta reflexiones explícitas sobre la complejidad de los polinomios, haciendo observar que estos puedes ser presentados en un contexto algebraico o en un contexto funcional y muestra una secuencia de actividades que permiten el establecimiento de una conexión entre esos dos contextos intra-matemáticos. De hecho, el autor, ya en las palabras clave, asume la centralidad del estudio de los polinomios por medio de un abordaje funcional. También presenta un subcapítulo que trata de las conexiones entre polinomio y función polinómica:

> Generalmente, cuando empezamos a desarrollar este contenido en el tercer año nos surge la siguiente duda: ¿Es necesario distinguir entre polinomio y función polinómica? Según Lima (2006) no es necesaria esta distinción. "Tenga en cuenta que el concepto de polinomio contempla apenas la lista de sus coeficientes y la manera en la que los sumamos y multiplicamos; al referirse a la función polinómica, empezamos a estar interesados en la correspondencia entre números complejos establecida por el valor que la función toma en cada punto. Es claro que cada polinomio representa una única función polinómica. Por otra parte, hemos visto anteriormente que dos funciones polinómicas sólo son iguales cuando tienen la misma lista de coeficientes. En otras palabras, dos funciones polinómicas solo son iguales cuando los polinomios asociados a ellas son iguales. Por lo tanto, la función polinómica también corresponde a un único polinomio. De esta manera, hay una correspondencia biunívoca entre las funciones polinómicas y polinomios, lo que nos permite, sin riesgo de confusión, hacer referencia indistintamente al polinomio p o la función polinómica p. A menudo es conveniente referirse a un "polinomio p(x)", especialmente en situaciones donde otros polinomios aparezcan descritos sólo por su expresión. (Dierings, 2014, p.22)
>
> (…) no es difícil para el estudiante entender que a cada función polinómica puede asociarse a una gráfica representada en el plano cartesiano. Así, presentamos algunas ideas interesantes, como la idea de que, en el caso de la función, para cada valor real de x tenemos un valor numérico correspondiente, la noción de continuidad del polinomio, la intersección de la gráfica de la función con los ejes cartesianos, el signo del polinomio, el

> crecimiento y decrecimiento. Llamamos la atención sobre el crecimiento y el decrecimiento, en el sentido de visualizar los puntos máximos y mínimos, así como la constatación de que los valores numéricos pueden ser los mismos para diferentes valores de x. (Dierings, 2014, p. 23)

Idoneidad cognitiva

En este TCC se observa que el autor realiza comentarios que permiten concluir que implícitamente tiene en cuenta algunos indicadores de la idoneidad cognitiva.

Conocimientos previos

Aunque el autor hace un breve comentario sobre los conocimientos previos de los alumnos, no realizó ninguna evaluación inicial para verificar si los alumnos los dominaban:

> Como en los años anteriores se han estudiado las funciones polinómicas de primer y segundo grados, incluso con el nombre de función afín y función cuadrática, e incluso funciones trigonométricas, no es difícil para el estudiante entender que a cada función polinómica puede asociarse a una gráfica representada en el plano cartesiano. (Dierings, 2014, p.23)

Adaptación curricular a las diferencias individuales

En el relato del autor no se pueden extraer conclusiones de que hayan realizado actividades de ampliación o de refuerzo.

Aprendizaje

El autor no da ninguna evidencia de haber realizado evaluaciones, a pesar de ello afirma que el aprendizaje realizado fue bastante satisfactorio:

> Después de la aplicación de las actividades propuestas y siguiendo con las tareas normales del libro, o con cuestiones de la prueba para entrada en la universidad, notamos que los estudiantes no tuvieron grandes dificultades para resolverlas. (...). Teniendo en cuenta lo que se ha trabajado, con un poco de lectura complementaria, los

> estudiantes tuvieron una mejor comprensión de los teoremas y las cuestiones relacionadas con el contenido, en comparación con otras clases en las que trabajamos de la manera tradicional. (Dierings, 2014, p.66)

Alta demanda cognitiva

El autor considera, implícitamente, que su propuesta conlleva una alta demanda cognitiva en sus alumnos, ya que las tareas propuestas activan procesos cognitivos relevantes. Dicho de otra forma, el profesor al optar por una propuesta didáctica que implica la realización de procesos matemáticos relevantes está proponiendo, a su vez, tareas con una alta demanda cognitiva.

Idoneidad interaccional

De manera general, el autor no presenta ningún comentario y no da indicios de haber tenido en cuenta los componentes contemplados en la idoneidad interaccional. Solo apunta que las tareas propuestas fomentan una cierta autonomía de los alumnos. Veamos una propuesta de actividad que promueve este componente:

> Para dar una idea del comportamiento de una función polinómica, la identificación de las raíces, el crecimiento y el decrecimiento, proponemos confeccionar una tabla calculando el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2-2x^3 + 5x + 2$. Los valores de x fueron previamente establecidos de manera que se aproximasen a los valores de las raíces. Hecha la tabla responda a las siguientes preguntas: a) Observe la tabla y describa lo que más le llamó la atención en relación a los valores encontrados. b) Tenga en cuenta que ningún valor de x en la tabla es la raíz del polinomio, es decir, ningún P (x) calculado resultó ser cero. Teniendo en cuenta esto, estime cuales son los valores de x donde $P(x) = 0$. (Dierings, 2014, pp. 45-46)

Idoneidad mediacional

En este TCC se observa que el autor realiza comentarios, reflexiones, etc. que permiten concluir que implícitamente tiene en cuenta algunos indicadores de la idoneidad mediacional.

Recursos materiales

El autor explica que utilizó el GeoGebra, la hoja de cálculo y la calculadora en su proceso de instrucción. Además, explica en su relato, dónde y cómo utilizó estos recursos. El autor dio mucha importancia al uso del GeoGebraen las tareas implementadas y también comenta que los alumnos usaron, en menor medida, la hoja de cálculo y calculadora. En su relato podemos observar, por ejemplo, en qué actividades se utilizaron estos recursos:

> Actividad 4: inicialmente usaremos el GeoGebra y haremos la gráfica del polinomio mencionado en la actividad anterior. Después confeccionaremos una tabla en una hoja de cálculo para los valores de -2,5 «x« + 2,5-0,05 con un intervalo de 0,05 utilizando ambos métodos. También vamos a hacer una columna para comprobar si hay una discrepancia entre los resultados obtenidos por cada método. (Dierings, 2014, p.30)

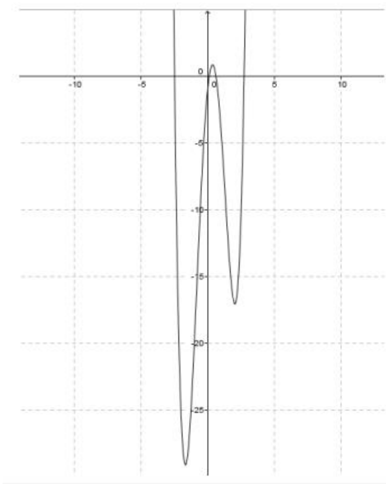

Figure 1. Gráfica de la actividad 04. (Dierings, 2014, p. 13)

> Actividad 06: realice los siguientes productos de binomios y use el GeoGebra para generar la gráfica del polinomio que resulta. A continuación, a través de la gráfica, localice las raíces de estos

polinomios. a) $P(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$. Donde $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. (Dierings, 2014, p. 36)

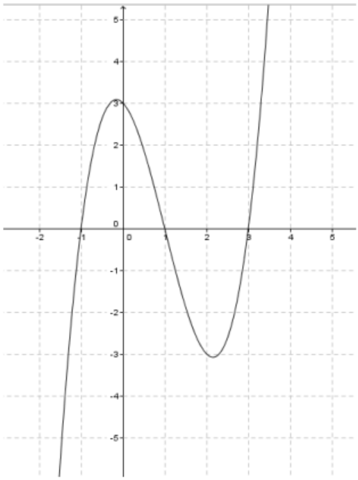

Figure 2. Gráfica de la actividad 06, letra a. (Dierings, 2014, p. 37)

Tenga en cuenta que las raíces de este polinomio son {-1,1,3}. Caben entonces algunas preguntas: ¿El conjunto de raíces tiene que ver con los binomios que componen el polinomio? Fue por casualidad que esto ocurrió? Y el punto de intersección con el eje de ordenadas? (Dierings, 2014, p.36).

En el desarrollo de las actividades inherentes al contenido, utilizamos algunos recursos tecnológicos tales como software GeoGebra y la hoja de cálculo(Excel). Las gráficas se han elaborado con el GeoGebra y no consideramos que fuera necesario que cada alumno las transcribiese. (Dierings, 2014, p.45).

Para fijar el método proponemos la siguiente actividad: dado el polinomio, encontrar el valor de P(2), P(-2), P(10), P(8), P(500), por el método Briot-Ruffini utilizando la calculadora si es necesario. (Dierings, 2014, p.64)

Número de alumnos, horario y condiciones de la clase

En relación a este componente, el autor no realiza ningún comentario, lo cual, implícitamente, permite suponer que no ha encontrado ningún problema en este aspecto.

Tiempo

El autor presenta una propuesta innovadora y manifiesta que tenía una cierta preocupación de que el tiempo no fuese suficiente para la implementación de toda la secuencia didáctica. Pero, después de la implementación, concluye que no necesita de más tiempo para aplicar su propuesta.

> En el momento en que nos propusimos llevar a cabo la enseñanza de los polinomios de una manera diferente con esa clase, teníamos una gran preocupación con relación al tiempo requerido y también con los temas de preparación para los exámenes de ingreso de los graduados de secundaria.
> (…/…) Después de la aplicación de las actividades propuestas, y siguiendo con el libro normal de ejercicios y problemas del examen para ingreso a la universidad, hemos encontrado que los estudiantes no tuvieron grandes dificultades para resolverlos. Además, no necesitamos más tiempo de lo habitual para la realización de las actividades, lo que nos sorprendió. (Dierings, 2014, p.66)

Idoneidad emocional

Con respecto a los descriptores de la idoneidad emocional, el autor no presenta ninguna referencia, excepto al final, cuando él sostiene que los estudiantes mostraron interés en la realización de las actividades.

> Cabe señalar que los estudiantes mostraron más interés en el estudio del contenido en cuestión. El hecho de que están participando en una nueva propuesta educativa fue asimilado positivamente. (Dierings, 2014, p. 66)

Idoneidad ecológica

En este TCC se observa que el autor realiza comentarios, reflexiones, etc. que permiten concluir que implícitamente tiene en cuenta algunos indicadores de la idoneidad ecológica.

Innovación didáctica

De acuerdo con las directrices establecidas en el PROFMAT con relación a la elaboración del TCC, los profesores tienen que justificar que sus propuestas son una innovación para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. En el tema estudiado, los polinomios, el autor considera que la innovación se logra mediante la realización de actividades que establecen relaciones intra-matemáticas entre el contexto algebraico y el contexto funcional.

Adaptación al currículo

Por un lado su propuesta se adapta al currículo, porque el estudio de los polinomios está presente en las directrices de los parámetros curriculares y, por otro lado, su propuesta de conectar el punto de vista funcional con el algebraico en el estudio de los polinomios es coherente, si se tiene en cuenta que los parámetros curriculares (PCN) para la enseñanza secundaria, en el eje de Álgebra, incluyen el estudio de funciones, y se sugiere analizar las conexiones entre las funciones y el álgebra.

> Como el objeto de estudio en nuestro caso es la enseñanza de polinomios, vamos a hacer un breve análisis de lo que el PCN de las matemáticas dice del eje de álgebra, especialmente en relación con el estudio de las funciones. (Dierings, 2014, p.16).
>
> Se observa que, de acuerdo con los parámetros curriculares nacionales, polinomios, ecuaciones polinómicas y función polinómica deben ser incluidos en la parte flexible del plan de estudios. (Dierings, 2014, p.18)

Conexiones intra e inter-disciplinares

El autor explica, en su TCC, que planea realizar una conexión intra-matemática y se preocupa por conectar el tratamiento algebraico de los polinomios con el funcional. Por otra parte, en el TCC no hizo ninguna referencia interdisciplinar.

Utilidad socio-laboral

El autor presenta argumentos sobre el uso social y laboral de su enfoque innovador, en particular afirma que su propuesta prepara a los estudiantes para sus estudios posteriores en la educación superior.

> Por lo tanto, acreditamos que tenemos un estudiante que finaliza la escuela secundaria bien preparado y un graduado mucho más habilitado para realizar estudios de ciencia exactas y tecnológicos. (Dierings, 2014, p.66)
>
> En el momento en que nos proponemos llevar a cabo la enseñanza de los polinomios de una manera diferente con la referida clase, tuvimos una gran preocupación [...] Las cuestiones de la preparación para los exámenes de ingreso a la universidad de los graduados de secundaria. (Dierings, 2014, p.66)

Consideraciones sobre el análisis didáctico realizado

Una ventaja con la cual se encuentra el lector de este TCC es que el autor hace una evaluación de la aplicación de su propuesta, la cual le permite manifestar que logró, de manera exitosa, cinco de las seis idoneidades – a la sexta, la idoneidad interaccional, el autor casi no la contempla. Implícitamente, se puede concluir que el autor encontró un buen equilibrio entre las cinco idoneidades que tuvo en consideración.

Según el autor, el proceso de instrucción implementado, además de animar a los estudiantes y facilitar su aprendizaje, los prepara para estudios posteriores. Explica, por ejemplo, que después de la aplicación de las actividades propuestas continuó con los ejercicios normales del libro, así como con cuestiones seleccionadas para los exámenes de ingreso a la universidad, y afirma que observó que los estudiantes no tuvieron grandes dificultades para resolverlos. Argumenta, además, que no necesitó más tiempo de lo habitual para la ejecución de las actividades. También afirma que con el trabajo realizado en clase, junto con un poco de lectura adicional, los estudiantes tuvieron una mejor comprensión de los teoremas y las cuestiones relacionadas con el contenido, en comparación con otras clases en las que trabajaban de la manera tradicional, subrayando que los estudiantes en su clase mostraron más interés en el estudio delos polinomios.

> Después de la aplicación de las actividades propuestas, y siguiendo con los ejercicios normales del libro el libro y cuestiones para ingresar en la universidad, hemos encontrado que los estudiantes no tuvieron grandes dificultades para resolverlos. Además, no necesitamos más tiempo de lo habitual para la realización de las actividades, lo que nos sorprendió. Con lo que se trabajó, junto con un poco de lectura adicional, los estudiantes tuvieron una mejor comprensión de los teoremas y las cuestiones relacionadas con el contenido, en comparación con otras clases en las que trabajamos de la manera tradicional. Cabe señalar que los estudiantes mostraron más interés en el estudio del contenido en cuestión. El hecho de que estaban participando en una nueva propuesta educativa fue asimilado positivamente. Con este trabajo, llegamos a la conclusión de que nuestra propuesta es viable y contribuye significativamente a lo que ya se recomienda actualmente. Tanto es así que ya se está aplicando la misma actividad a más clases de tercer año de la escuela secundaria con grandes resultados. En consecuencia, creemos que tenemos un estudiante que al finalizar la secundaria es más capaz de realizar estudios en ciencias exactas y tecnológicas. (Dierings, 2014, p.66)

Consideraciones Finales

Este artículo tenía como objetivo investigar las características del análisis didáctico realizado por profesores del *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)*, para justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras y representan una mejora en la enseñanza de las matemáticas.

En el caso estudiado, el análisis de la justificación que ha dado el profesor de su propuesta de mejora concuerda con la conclusión a la que se llega en Ramos y Font (2008) y en Seckel y Font (2015).Estos autores, consideran que cuando los profesores tienen que reflexionar sobre una propuesta didáctica que signifique un cambio o una innovación sobre su propia práctica, utilizan de manera implícita algunos de los criterios de idoneidad propuesto por el EOS. El análisis del TCC muestra una reflexión del profesor que va más allá de una reflexión espontánea, sin embargo, no está lo suficientemente guiada, entre otras razones, por la falta de una pauta explícita y amplia en el PROFMAT que sirva para orientar el análisis didáctico de los maestros.

Debido a los resultados encontrados, esta investigación genera elementos de *feedback* que permiten dar sugerencias para la mejora del PROFMAT desde un punto de vista de la didáctica de las matemáticas. Conviene señalar que, una posibilidad para dicha mejora es la necesidad de la elaboración de criterios o pautas para mejorar el nivel de análisis didáctico de los profesores que realizan dicho máster. Una manera de llegar a un reflexión más elaborada, que permite la mejora de la enseñanza de las matemáticas, consiste en el uso de directrices explícitas, como las que ya se han aplicado en diversas propuestas de investigación y formación de profesorado como si puede ver en (Giménez, Font y Venegas, 2013; Godino, Batanero, 2008).

Referencias

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V., Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 207-225.

Badillo, E., Font, V. & Edo, M. (2015). Analyzing the responses of 7 - 8 year olds when partitioning problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(4), 811-836.

Bairral, M. (2002). *Desarrollo profesional docente en Geometría: Análisis de un proceso de Formación a Distancia*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

Belfort, E. y Mandarino, M. (2008). Anaix do IV HTEM*: Implementação do Pró-Letramento em Matemática.* Rio de Janeiro: UFRJ.

Birman, B. F., Desimone, L., Porter, A. C., & Garet, M. S. (2000). Designing professional development that works. *Educational Leadership*, *57*(8), 28-33. Retrieved from:

http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el200005_birman.pdf

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática 8*(2), 1-41.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, *26*(42b), 667-690.

Darling-Hammond, L. (1995). Changing conceptions of teaching and teacher development. *Teacher Education Quarterly*, 22(4), 9–26.

Darling-Hammond, L., & Sykes, G. (1999). *Teaching as the Learning Profession: Handbook of Policy and Practice*. San Francisco: Jossey-Bass.

Desimone, L. M., Porter, A. C., Garet, M. S., Yoon, K. S., & Birman, B. F. (2002). Effects of professional development on teachers' instruction: Results from a three-year longitudinal study. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 24(2), 81-112.

Dierings, A. R. (2014). *Ensino de Polinômios no Ensino Médio: Uma Nova Abordagem*. (Tesis doctoral no publicada). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria: Brasil.

Distéfano, M. L, Pochulu, M. D., & Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *REDIMAT*, *4*(3), 202-233. doi: 10.17583/redimat.2015.1568

Elmore, R. F., & Burney, D. (1997). *Investing in Teacher Learning: Staff Development and Instructional Improvement in Community School District#* 2. New York, NY: Teacher College.

Ferreira, E. C. (2013). *Práticas pedagógicas e objetos de estudo: análise sobre as pesquisas em educação matemática do programa de mestrado da UEPB nos anos de 2007 e 2008.* (Tesis doctoral no publicada). Universidade Estadual da Paraíba, Brasil.

Font, V. y Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, Innovación y Buenas Prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124. doi: 10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Planas, N., Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Franca, M. R. (2012). *Limites e potencialidades em Educação Matemática de diferentes programas de formação na perspectiva de professores de escolas públicas de Três Lagoas*. (Tesina de Maestría). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Levi, L. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, *38*(3),653–689.

Gatti, B. A. (2008). Análise das Políticas Públicas para formação continuada no Brasil, na última década. *Revista Brasileira de Educação*, *13*, 57-70.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp581-590). Oxford: ICMI studies.

Godino, J. D., Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En *Actas VI CIBEM* (pp. 4-9). Puerto Montt: Chile.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e da instrução matemática. *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática 10*, 7-37.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Retrieved from: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Guskey, T. R. (2003). What makes professional development effective? *Phi Delta Kappan*, *84*(10), 748-50. doi: 10.1177/003172170308401007

Guskey, T. R., & Yoon, K. S. (2009). What works in profesional development. *Phi Delta Kappan*, *90*(7), 495-500. doi: 10.1177/003172170909000709

Ingvarson, L., Meiers, M., & Beavis, A. (2005). Factors affecting the impact of professional development programs on teachers' knowledge, practice, student outcomes & efficacy. *Education Policy Analysis Archives*, 13(10), 1–26.

Lee, S. (2005). *Encyclopedia of School Psychology*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Mallart, A., Font, V. & Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos* (en prensa).

Ministério da Fazenda (MF), Ministério do Planejamento,Orçamento e Gestão (MP), & Ministério da Educação (MEC). (2014). Lei Nº 13.005 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação (PNE) e dá outras providências.

Miranda, G. V. (1999). Reflexões sobre a avaliação do PEC. En M. Bicudo, et al (eds.). *Formação do educador e avaliação educacional*. São Paulo: Editora UNESP.

Moreira, M. A. (2004). O mestrado (profissional) em ensino. *Revista Brasileira de Pós-Graduação*, *1*(1), 131-142.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (en prensa).

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Prado, M. R. M., Silva, M.G.L., Araujo, M. F. F. (2011). A formação pós-graduada em Ensino de Ciências Naturais e Matemática de docentes do IFRN: implicações na atuação docente. En *VIII ENPEC/ I Encuentro Iberoamericano de Investigación en Didáctica de las Ciências*, Campinas.

PROFMAT (2013a). *Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos a o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).* Sociedade Brasileira de Matemática.

PROFMAT (2013b). *Avaliação suplementar externa do programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional*. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 233-265.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática,* 24, 5-41.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Santos, I. M. (2015). *A Identidade do PPGECNM na Formação Continuada de Professores de Matemática*. (Tesis doctoral no publicada). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona.

Seckel. M. J. & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional*, *11*(19), 55-75.

Silva Filho, A. P. (2013). *Formação continuada de professores de matemática*: *Um estudo sobre a práxis docente no Programa Gestar II na Bahia / Feira de Santana.* (Tesis de maestría no publicada) Universidade Estadual de Feira de Santana, Brasil.

Adriana Breda es profesora, de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Valderez M. do Rosário Lima es profesora adjunta, de la Pontificia Universidad Católica do Rio Grande do Sul, Brazil.

Contact Address: La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: Avenida Alcalde Gustavo Fuchslocher, 1305, Osorno, Chile. **Email**: adriana.breda@ulagos.cl, valderez.lima@pucrs.br