



Instructions for authors, subscriptions and further details:

<http://redimat.hipatiapress.com>

Creatividad Matemática: Momentos de Insight en Estudiantes de 4^o de ESO

Francisco Sánchez¹, Maria Luisa Fiol²

1) Autonomous University of Barcelona, Spain

2) Autonomous University of Barcelona, Spain

Date of publication: February 24th, 2016

Edition period: February 2016-June 2016

To cite this article: Sánchez, F., & Fiol, M.L. (2016). Creatividad matemática: Momentos de insight en estudiantes de 4^o de ESO. *REDIMAT*, 5(1), 28-55. doi: 10.4471/redimat.2016.1809

To link this article: <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1809>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

The terms and conditions of use are related to the Open Journal System and to [Creative Commons Attribution License \(CC-BY\)](#).

Mathematical Creativity: Moments of Insight in 4th Year of Secondary Compulsory Education (ESO)' Students

Francisco Sánchez
*Autonomous University of
Barcelona*

Maria Luisa Fiol
*Autonomous University of
Barcelona*

(Received: 9 November 2015; Accepted: 7 February 2016; Published: 24 February 2015)

Abstract

Solving geometric problems, traditionally called Insight, is one of the main areas that can help students develop and promote their creative potential in learning mathematics. In this article we set out to identify, describe and characterize the evidence that promotes moments of Insight in a group of 4th year secondary students. Initially we used a quantitative methodology and subsequently a qualitative one. This qualitative methodology uses analysis of solutions to 3 geometric problems potentially related to perceptual Insight, answers in the questionnaire and explanations provided in the semi-structured interview. The analysis has allowed us to identify and characterize explicit and non-explicit evidence in the occurrence of Insight. We give an especially important role, on the one hand, to the speed at which the sudden occurrence of Insight takes place and, on the other hand, to the emotionally positive component that determines the affective elements of its experience.

Keywords: Creativity, geometric problems potentially related to perceptual insight, restructuring, moments of insight

Creatividad Matemática: Momentos de Insight en Estudiantes de 4º de ESO

Francisco Sánchez
University of Barcelona

Maria Luisa Fiol
*Autonomous University of
Barcelona*

*(Recibido: 9 Noviembre 2015; Aceptado: 7 Febrero 2016; Publicado: 24
Febrero 2016)*

Resumen

La resolución de problemas geométricos tradicionalmente llamados de Insight, constituye uno de los ejes principales que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar y fomentar su potencial creativo en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo nos proponemos identificar, describir y caracterizar las evidencias que promueven momentos de Insight en un grupo de estudiantes de 4º de ESO. Utilizamos inicialmente una metodología cuantitativa y posteriormente una cualitativa. Esta metodología cualitativa utiliza el análisis de las resoluciones de 3 problemas geométricos potencialmente de Insight perceptivo, las contestaciones del cuestionario de respuestas y las explicaciones dadas en la entrevista semiestructurada. El análisis nos ha permitido identificar y caracterizar evidencias explicitadas y no explicitadas en la ocurrencia del Insight. Otorgamos un papel especialmente relevante por un lado, a la celeridad en que se produce la ocurrencia súbita del Insight y por otro a la componente emocionalmente positiva que determina la vivencia afectiva de su experiencia.

Palabras clave: Creatividad, problemas geométricos potencialmente de Insight perceptivo, reestructuración, momentos de Insight



A todos alguna vez nos ha sucedido que, después de dejar de pensar en un problema, de repente y casi sin darnos cuenta, de forma espontánea como explica Punset (2011), nos aparece el Eureka o el Ajá! que nos guía hacía la solución. Así mismo, aunque a otro nivel, pero de forma análoga, algo parecido les sucedió a grandes científicos como Arquímedes, Newton o el propio Einstein, cuando estaban sumergidos en sus disquisiciones científicas y sin saber cómo de forma repentina tuvieron un Click! que les hizo evidente la solución buscada; los hizo conscientes de sus propios hallazgos.

Es conocida la demostración del último teorema de Fermat, siendo ésta probablemente uno de los grandes ejemplos de creatividad matemática actual a nivel mundial. “Uno de los logros matemáticos más prominentes de finales del siglo pasado” (Corry, 2006, p. 387)

Una mañana de septiembre, después de varios años de intentos y fracasos, Andrew Wiles se encontraba trabajando cuando de pronto, de forma totalmente inesperada, tuvo una increíble revelación. Se dio cuenta de que aquello que lo había detenido durante tanto tiempo era exactamente lo que resolvería el problema. Según cuenta Andrew Wiles¹ fue el momento más importante de toda su carrera. Algo tan sencillo, elegante e indescriptiblemente hermoso: de las cenizas parecía surgir la verdadera respuesta al problema.

La experiencia matemática a un problema la describe el propio Wiles;

Entrás en la primera habitación, y está oscuro, completamente oscuro. Tropezas y chocas con los muebles, pero al mismo tiempo vas aprendiendo dónde está cada cosa. Al final, tal vez al cabo de meses, encuentras por fin el interruptor de la luz, lo pulsas y, de repente, ¡todo está iluminado y puedes ver exactamente dónde estás! (Albertí, 2010, p.143)

En esta descripción podemos identificar, algunas herramientas propias del trabajo creativo como el reconocimiento de patrones, el establecimiento de conexiones, desafiar suposiciones, asumir riesgos y la emoción sentida.

Este es uno de los muchos ejemplos históricos que evidencian la importancia de los aspectos creativos en el pensamiento matemático. Sin embargo desde la enseñanza escolar de las matemáticas no se le da la misma importancia que a otros aspectos como por ejemplo al razonamiento deductivo. Desde una perspectiva escolar, nos interesa identificar las estrategias alternativas de resolución y comprensión por parte de los

estudiantes al intentar resolver un problema, interpretar un enunciado o entender un tema de estudio. Creemos que es muy importante reflexionar sobre los momentos del Ajá! o Insight (Gardner, 1989; Callejo, 1994; Sequera, 2007; Liljedahl, 2008) que experimentan los alumnos de diferentes edades cuando intentan resolver un problema. Todos los que nos dedicamos a la enseñanza hemos sido testigos de momentos de idea feliz en los que el alumno explica con satisfacción cómo ve la solución en un momento personal y único.

En este estudio investigamos las experiencias creativas de los estudiantes, a partir de escuchar e interpretar sus explicaciones, cuando abordaron la resolución de unos problemas concretos. En este sentido hemos de tener presente el contexto de cercanía entre los alumnos y el investigador (Jade, 2012) puesto que éste era un profesor de su propio centro escolar. Esto ha podido mejorar la comprensión e interpretación de los procesos creativos y manifestaciones de los momentos de Insight obtenidos.

La razón que motiva el estudio de los momentos de Insight, reside en la importancia de contemplar la resolución creativa desde la enseñanza y didáctica de las matemáticas como una finalidad educativa prioritaria, que nos puede llevar a implementar en la praxis de nuestras aulas una mejora significativa en la educación matemática. Este trabajo forma parte de una investigación más amplia en la que se identifica una taxonomía de categorías de resolución según el reconocimiento de momentos de Insight, así como el estudio de las componentes visual y afectiva en la ocurrencia del Insight.

El objetivo de este artículo es identificar, describir y caracterizar los momentos de Insight, a partir de los resultados de un grupo de estudiantes ante la resolución de tres problemas geométricos potencialmente de Insight perceptivo. Es decir, queremos estudiar las evidencias en las estrategias de resolución planteadas por los estudiantes que promueven momentos de Insight.

Marco Teórico

Algunas Nociones Históricas sobre el Insight y la Resolución de Problemas

La Teoría de la Gestalt establece un primer marco teórico en la resolución de problemas (Wallas, 1926) desde la perspectiva de la creación matemática. Nos referimos al pensamiento productivo. La Gestalt concibe el pensamiento productivo como aquel que está basado en la reestructuración y reorganización implícita del aprendizaje pasado, generando nuevas estrategias que se acaban transformando en una solución nueva al problema. El conocido problema del paralelogramo de Wertheimer (1959) es un ejemplo. Dicho autor afirmó que los estudiantes que resolvían problemas mediante estrategias de resolución productiva, tenían mayor facilidad para abordar con éxito nuevas situaciones problemáticas que difiriesen de la original, respecto a aquellos estudiantes que habían empleado estrategias reproductivas. Wertheimer (1959) concibe por estrategias reproductivas aquellas en las que simplemente se reproducen experiencias previas, hábitos, habilidades o algoritmos de resolución. En cambio en las estrategias productivas no nos limitamos sencillamente a recordar, sino que somos capaces de producir respuestas no ensayadas previamente, a partir de la modificación y reorganización del aprendizaje pasado generando nuevas posibilidades de resolución.

El método del descubrimiento por uno mismo también se considera especialmente relevante en la resolución de un problema por compartir con el aprendizaje productivo de la Gestalt un rendimiento superior tanto en la transferencia como en la retención de lo aprendido por parte del estudiante. Bajo el enfoque de la Gestalt, el pensamiento productivo guía a reorganizar el campo perceptual, generando así nuevas relaciones y asociaciones. Esta forma de pensamiento se pone en marcha cuando no nos limitamos a recordar; sino que somos capaces de producir respuestas no ensayadas previamente. También se puede poner en marcha cuando generamos nuevas reestructuraciones a partir de los elementos y relaciones que intervienen en el problema que pueden venir posibilitadas a partir de un cambio de perspectiva y así llegar a la ocurrencia de una idea original e innovadora.

Autores como Ohlsson (1984) para explicar el fenómeno del Insight en la resolución de problemas, plantean una teoría de la reestructuración.

Análogamente al paradigma gestáltico, concibe el Insight a partir de una adecuada reestructuración de los elementos del problema. A diferencia de la Gestalt, Ohlsson (1984) concibe que la ocurrencia de una reestructuración óptima sólo pueda venir posibilitada por la adecuada descripción y configuración espacial de la situación problemática en cuestión, a veces transcrita como formas y figuras geométricas. Esta reestructuración que caracteriza el Insight, puede darse en la resolución de un problema y en otras ocasiones ayudar en el progreso hacia la solución.

En esta línea, Ima Blumm (2014) plantea que para hallar una solución creativa a un reto, hemos de buscar reestructuraciones mentales creativas, basándonos en otros patrones de organización de la información, distintos a nuestra percepción inicial de la situación. Como ejemplo de reestructuración mental propone nuestro cambio de interpretación cuando miramos algunas de las famosas imágenes Gestalt, de doble lectura.

Insight y Momentos de Insight en este Contexto

Nuestro marco conceptual se basa en la investigación sobre el pensamiento productivo de Wertheimer (1959) y la resolución de problemas geométricos de Insight (Ohlsson, 1984; Blumm, 2014).

Consideramos el concepto de *Insight*, como aquella reestructuración de los elementos o relaciones geométricas que se establecen en un problema geométrico y que mediante una reorganización visual repentina puede posibilitar una nueva solución o continuar con la resolución. Cuando hacemos referencia a esta reestructuración entendemos que puede estar basada en una combinación de distintos procesos (Ohlsson, 1984; Wertheimer, 1959; Blumm 2014). Como por ejemplo cuando somos capaces de identificar y discriminar visualmente determinadas figuras geométricas implícitas, identificar la relación entre la parte y el todo, ver los elementos de un problema desde distintos enfoques, etc.

Al hablar de reorganización visual repentina, no nos referimos a la percepción entendida –sólo– como función visual psíquica específica, sino que la percepción la entendemos como un –todo– en la línea de la Gestalt: El todo es más que la suma de las partes. Comprendiendo que las partes a las que hacemos referencia son los inputs internos de la persona como las motivaciones, la experiencia previa, sus habilidades cognitivas, el conocimiento general y específico de la materia en concreto, etc.

A partir de la aproximación de “momento mágico” de Barnes (2000) y “momentos de Insight” de Sequera (2007) consideramos un *momento de Insight*, cuando los estudiantes explicitan una repentina comprensión o reestructuración de los elementos o relaciones que intervienen en el problema geométrico. Esta reestructuración les permite visualizar y entender la situación y poder continuar o resolver el problema. Expresiones identificadas por Barnes (2000) cuando los participantes resolvían algunos problemas matemáticos son “A flash of understanding” o “it might just click”, por ejemplo.

En el proceso de exploración e identificación, consideraremos dos clases de evidencias según la naturaleza de los momentos de Insight: de evidencia explicitada y de evidencia no explicitada. Las evidencias explicitadas hacen referencia a expresiones (Liljedahl, 2008) en las que el estudiante explica, de una cierta manera afectiva, cómo se le ha ocurrido la reestructuración geométrica que ha descubierto y le ha permitido poder continuar con la resolución del problema. En cambio en las evidencias no explicitadas los estudiantes se limitan a expresiones generalmente escuetas pero también con una cierta componente afectiva, que por el contexto permite inferir que han podido continuar con la resolución del problema.

Metodología: Un Estudio Exploratorio en el Ámbito de la Identificación de los Momentos de Insight

Participantes

El estudio del cual presentamos una parte, se llevó a cabo con 20 estudiantes que cursaban el cuarto curso de la Educación Secundaria obligatoria (ESO) en el instituto público IES Parets del Vallés, situado en la comarca del Vallés Oriental de Barcelona.

La selección de los participantes de la muestra, se llevó a cabo a partir de la prueba de evaluación de las competencias básicas en matemáticas realizada a 68 estudiantes de 4º de ESO que participaron voluntariamente. La muestra no es aleatoria, ya que se seleccionaron los 20 estudiantes que obtuvieron la mejor puntuación en esta prueba oficial de competencias básicas en matemáticas en Educación Secundaria, propuesta por el Departamento de Educación de la Generalitat de Cataluña en el curso 2003/2004. La muestra escogida de 20 participantes, se caracteriza por estar

equilibrada respecto al género y porque los estudiantes realizaban un itinerario curricular ordinario. La edad de los participantes oscilaba entre los 15 y 16 años. La recogida de datos se realizó durante el curso 2011/12.

Elaboración de las Herramientas de Recogida de Información: Prueba Piloto

Con el objetivo de analizar los momentos de Insight, en los problemas de estudio, construimos tres herramientas de investigación: un cuestionario de respuestas (R1; anexo1), una entrevista semiestructurada (E1; anexo2) y una Tabla con los indicios identificados en las resoluciones de estos tres problemas que a partir de ahora llamaremos Tabla 1.

Iniciamos el trabajo realizando una prueba piloto de las tres herramientas para validarlas. En el cuestionario de respuestas tuvimos que introducir una tercera pregunta, sobre si en ese momento se les ocurría otra solución, debido a que en diferentes casos los estudiantes no resolvían alguno de los problemas en concreto pero, a posteriori, sí parecían concebir y explicitar una posible solución. Y nos interesaba poder identificar todas las posibles ocurrencias de Insight independientemente si se habían producido durante la resolución de los problemas o realizando el cuestionario de problemas posterior.

Por otra parte el estudio piloto de la entrevista semiestructurada, nos hizo reformular la sexta pregunta introduciendo tres opciones de respuesta: casualidad, visualización e inspiración; debido a que la mayoría de estudiantes en la versión preliminar dejaron la respuesta en blanco y nos interesaba conocer a qué atribuían los participantes la ocurrencia de su resolución. Por otro lado nos interesaba que nos proporcionasen descripciones específicas y detalladas acerca de cómo habían podido resolver los problemas geométricos; cómo creían que se les había ocurrido la resolución, idea o estrategia que podía haberles facilitado la resolución. El objetivo no es buscar opiniones generales, sino interpretar el significado establecido por el estudiante entrevistado a partir de lo que dice y cómo lo dice, para poder valorar las individualidades así como aquellas particularidades únicas en la generación de una idea creativa, que podría promover una evidencia relativa a un momento de Insight.

Además la prueba piloto de la Tabla 1 de los indicios identificados, nos llevó a introducir pequeños cambios en la redacción; ya que nos interesaba

poder identificar los participantes que mediante ensayo y error empleaban diferentes resoluciones de distinta naturaleza o distintos enfoques que potencialmente podían promover un momento de Insight en la misma solución.

Los resultados obtenidos a partir de estas tres herramientas de investigación fueron triangulados. Esto nos ha permitido contrastar y comparar la información obtenida.

Diseño

Una vez elaboradas las herramientas de recogida de la información que habían sido afinadas a partir de la prueba piloto, el diseño de la investigación quedó estructurado en dos fases diagnósticas:

Una primera Fase Diagnóstica de Selección con el objetivo de seleccionar los problemas y alumnos participantes y una segunda Fase Diagnóstica de Relación con el objetivo de dar una visión general, cuantitativa, de los resultados y una visión más específica de los datos a nivel cualitativo.

1. En una primera Fase Diagnóstica de Selección, se seleccionaron 10 problemas geométricos potencialmente de Insight perceptivo que a partir de ahora llamaremos problemas geométricos. Los criterios generales de selección de los problemas geométricos se basaron en que fuesen problemas geométricos que fomentasen la utilización de estrategias creativas y no reproductivas. Buscábamos que al menos, fuese necesaria una reestructuración de los elementos o relaciones geométricas que intervienen en el problema mediante alguna estrategia de visualización, sustentada en algunas habilidades visuales como la identificación visual, discriminación visual, reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y memoria visual.
2. En la segunda Fase Diagnóstica de Relación, los estudiantes realizaron los problemas de estudio, el Cuestionario de Respuestas y la Entrevista Semiestructurada.

Para la obtención de los datos, los tres problemas que presentamos aquí se escogieron porque originaron un mayor número de estrategias de resolución, en las que hemos podido identificar reestructuraciones que potencialmente pueden propiciar momentos de Insight. Las herramientas de

investigación fueron validadas con una prueba piloto y con un experto para mejorar su calidad.

Elaboramos la Tabla 1 con el objetivo de facilitarnos la identificación de las evidencias que determinan los momentos de Insight. Se trata de identificar los indicios más significativos en la resolución de los tres problemas geométricos que consideramos han podido propiciar evidencias explicitadas o no explicitadas. En las evidencias explicitadas los participantes explican cómo se les ha ocurrido la reestructuración que les ha permitido resolver o continuar con la resolución en cambio en las no explicitadas se limitan a dar alguna expresión con una cierta componente afectiva, sin explicar la reestructuración geométrica. Se validó con una prueba piloto y con un experto para mejorar su eficacia.

Realizamos un doble análisis cuantitativo y cualitativo para contrastar la interpretación de los resultados obtenidos: un primer análisis en el que se analizan los resultados a nivel global de la muestra y un segundo análisis en el que estudiamos las respuestas de los participantes que nos aportaban más información.

Los resultados obtenidos a partir de estas tres herramientas de investigación fueron triangulados, para contrastar y comparar la información obtenida desde diferentes tipologías de datos recogidos y por tanto permitimos un mayor grado de fiabilidad y validez en los resultados obtenidos.

Todo esto, nos ha permitido por una parte identificar y describir los momentos de Insight, y por otra caracterizarlos así como compararlos con los obtenidos en otras investigaciones.

Resultados: Análisis y Discusión

Identificamos algunos indicios que potencialmente pueden estar relacionados con la ocurrencia de una idea o resolución geométrica original y creativa. Definimos seis indicios, Tabla 1, mediante una cualidad o frase, para describir algunas caracterizaciones que nos permiten reconocer el potencial resolutor y creativo de los participantes.

Respecto el potencial resolutor y con el objetivo de identificar el grado de éxito, el primer indicio (RCP) consiste en identificar una resolución del problema y el segundo (IRPG) en identificar alguna estrategia de resolución que implica una representación visual o gráfica.

Con el potencial resolutor creativo, nos interesa identificar ideas, estrategias o resoluciones innovadoras y creativas. Identificamos el primer indicio (IOO1) cuando inferimos que se ha descubierto una reestructuración o relación no trivial entre conceptos y representaciones; el segundo indicio (IOO2) cuando inferimos que se inventan nuevas estrategias o resoluciones; el tercero (IOF1) cuando identificamos que se tantea mediante uno o varios enfoques; el cuarto (MO) cuando se reconocen expresiones en las que los estudiantes explicitan haber conseguido poder continuar o resolver el problema

Tabla 1
Estudio cuantitativo de los indicios identificados

n = 20 participantes	Indicio	Problema 1		Problema 2		Problema 3	
		n	%	n	%	n	%
<i>Resolución</i>							
Se identifica una resolución al problema	RCP	14	70%	7	35%	8	40%
Se identifican representaciones visuales y/o gráficas	IRPG	16	80%	17	85%	8	40%
<i>Resolución creativa</i>							
Se descubren reestructuraciones o relaciones no triviales entre conceptos y/o representaciones	IOO1	14	70%	9	45%	9	45%
Se inventan formas de abordar el problema	IOO2	2	10%	17	85%	12	60%
Se tantea, retrocede y avanza a partir de diversos intentos mediante uno o varios enfoques	IOF1	10	50%	3	15%	2	10%

Tabla 1 (.../...)
Estudio cuantitativo de los indicios identificados

n = 20 participantes	Indicio	Problema 1		Problema 2		Problema 3	
		n	%	n	%	n	%
<i>Resolución</i>							
Se identifican expresiones en las que los estudiantes denotan haber conseguido resolver el problema: Evidencias explicitadas y evidencias no explicitadas	MO	6		5		7	

En los tres problemas, la primera columna es la frecuencia absoluta, respecto al número de participantes en los que hemos identificado el indicio concreto. La segunda columna es el porcentaje de participantes sobre el total de la muestra. A excepción del indicio momentos de Insight (MO) donde la frecuencia y porcentaje no es sobre participantes sino sobre el problema, debido a que hemos reconocido distintos momentos de Insight en un mismo participante.

Enfatizamos que los participantes no están familiarizados con la resolución de este tipo de problemas y enunciados en clase. A continuación exponemos la tabla con los pseudónimos de los participantes de nuestro estudio.

Presentamos el análisis de cada uno de los problemas, estructurado en dos aspectos: I) primeras reflexiones sobre las resoluciones dadas por los alumnos, que corresponde al análisis cuantitativo y II) evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los momentos de Insight identificados, que corresponde al análisis cualitativo.

Tabla 2
Pseudónimos de los participantes

<i>Masculino</i>	<i>Femenino</i>
Antonio	Laura
Gerardo	Carla
Didac	Lola
Carlos	Marian
David	Claudia
Oscar	Janna
Juan	Verónica
Pedro	Laia
José	Mireia
Emilio	Cristina

Problema 1

El enunciado del primer problema que se utilizó es el siguiente (ver figura adjunta):

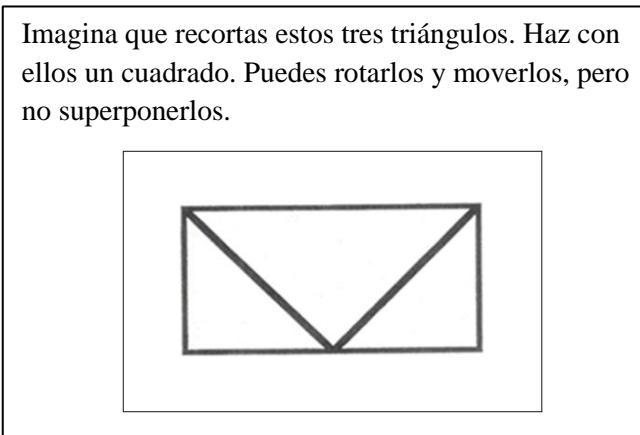


Figura 1. Primer problema geométrico de estudio

Primeras reflexiones sobre las resoluciones dadas por los alumnos

A primera vista observamos, que prácticamente $\frac{3}{4}$ partes de la muestra consiguió resolver el problema y en un 80% de participantes se identificaron estrategias basadas en alguna representación visual, en cierta manera debido a que el mismo enunciado promueve una resolución de corte visual.

Este problema geométrico, posibilita algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como la identificación visual, el reconocimiento de relaciones geométricas y el reconocimiento de posiciones geométricas que son especialmente importantes porque pueden promover este tipo de resolución.

Aspectos más creativos en la resolución

En un porcentaje considerable 70%, los estudiantes identifican y discriminan visualmente la equivalencia entre los dos triángulos menores así como reconocen las relaciones y posiciones geométricas implícitas, necesarias para descubrir la reestructuración que les permite reubicar los dos triángulos pequeños junto con el mayor formando un cuadrado. En la mitad de los participantes hemos identificado que tantean mediante uno o varios enfoques, con el objetivo de mover o rotar los triángulos hasta construir un cuadrado. En dos casos, se han dado estrategias de resolución distintas a la sugerida en el enunciado del problema, como es la fragmentación más fina o sea fragmentando en triángulos más pequeños que los triángulos dados. Con estas piezas menores y puzzleando conseguían construir el cuadrado.

Evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los momentos de Insight identificados

A continuación se adjunta la tabla 3 donde se pueden apreciar citas que ilustran las evidencias tanto explicitadas como no explicitadas que promueven los momentos de Insight.

Tabla 3

Momentos de Insight identificados en el problema 1

<i>Evidencias Explicitadas</i>	<i>Evidencias no Explicitadas</i>
Laura: Girando los triángulos te das cuenta que puedes hacer un cuadrado.	David: No sé cómo, pero he visto muy claro el cuadrado.
<i>Evidencias Explicitadas</i>	<i>Evidencias no Explicitadas</i>
Antonio: Me he dado cuenta que juntando los dos triángulos pequeños formaba uno idéntico al grande y luego si lo ponía encima de él se formaba un cuadrado.	Claudia: Ehm... o sea yo estaba buscando un cuadrado (gesticula) entonces de repente... me di cuenta... y ya fue fácil. O sea, un rombo...
Gerardo: He subido los dos triángulos pequeños arriba de tal manera que parecía un rombo, luego lo he girado y ya lo he visto.	Oscar: Ahhh! Vale! (A partir de la intervención de Laura: Hacer un rombo... (gesticulando, explicándole a una de sus compañeras)

Los resultados nos muestran 3 evidencias explicitadas de Insight. Inferimos que éstas hacen referencia al reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas, debido a que cuando los participantes Laura, Antonio y Gerardo se han dado cuenta de las traslaciones, giros y rotaciones implícitas necesarias, es cuando posiblemente han podido descubrir la reubicación adecuada de los triángulos para construir el cuadrado final que resuelve el problema, y ha tenido lugar la ocurrencia del momento de Insight.

Laura pivota los dos triángulos iguales con centro en los dos vértices correspondientes a los ángulos agudos del triángulo mayor. En cambio Antonio, explica que gira los triángulos pequeños hasta conseguir reubicarlos para formar la figura que pide el enunciado; es el que hace la resolución más estilo puzzle, es decir con las piezas separadas, mentalmente recortadas. De manera similar Gerardo sube arriba los dos triángulos de forma que le quede un cuadrado “en posición rombo” y después los gira y ve el cuadrado. Podemos interpretar que Gerardo no ve los cuatro ángulos iguales del cuadrado hasta dar una vuelta de 90 grados al cuadrilátero obtenido. Vemos más parecidas las estrategias de Antonio y Gerardo, en el

sentido que entendemos de hacer un puzle clásico: separar las figuras y recolocarlas de nuevo.

En este contexto, las evidencias explicitadas que hemos identificado, se nutren de una naturaleza convergente (Miller, 2000). Es decir su ocurrencia se origina a partir de la estrategia previa dada en el enunciado.

En cambio los resultados nos indican sólo tres evidencias no explicitadas de Insight por parte de los participantes David, Claudia y Oscar. David, explicita no saber cómo ha podido resolver el problema, pero inferimos que en la ocurrencia del momento de Insight “No sé cómo, pero he visto muy claro el cuadrado” transmite una sensación de seguridad y confianza en sí mismo.

Claudia, en la entrevista semiestructurada manifestó que la idea para resolver el problema se le ocurrió “de repente” e inferimos que fue entonces cuando consiguió ver o imaginar la posición concreta del rombo, que posiblemente le permitió identificar el cuadrado que soluciona el problema. En este caso deducimos una sensación de celeridad en la ocurrencia inesperada y súbita de la idea que ha promovido el momento de Insight. En el caso de Claudia aunque ha resuelto el problema no explica cómo lo ha resuelto, por eso hemos identificado una evidencia no explicitada.

Nos ha parecido interesante destacar la intervención del participante Oscar, en el transcurso de la entrevista semiestructurada ya que a diferencia de los otros participantes que recordaban el momento del Insight, Oscar que no resolvió el problema, fue en el transcurso de la entrevista cuando inferimos que de manera repentina descubrió la solución a partir de la estrategia que le indicó Laura. En este caso observamos que la ocurrencia del momento de Insight no está circunscrita a un período de tiempo concreto.

Problema 2

En la figura 2 se puede apreciar el enunciado del segundo problema que hemos utilizado en este estudio.

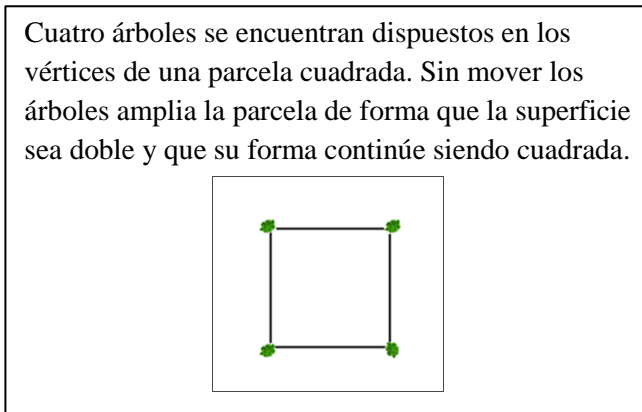


Figura 2. Segundo problema geométrico de estudio

Primeras reflexiones sobre las resoluciones dadas por los alumnos

Los resultados de la Tabla 1 nos muestran que solo el 35% de los participantes resolvió el problema. Algunas de las dificultades comunes en los estudiantes era un primer bloqueo al no disponer de datos numéricos y no poder realizar cálculos.

En un 85% de la muestra identificamos estrategias relacionadas con alguna representación visual. En una mayoría de casos, los participantes intentaban construir figuras geométricas equivalentes al cuadrado del enunciado. En este problema geométrico, existen algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como la identificación visual y la discriminación visual que han podido ser relevantes en la ocurrencia de los momentos de Insight.

Aspectos más creativos en la resolución

En un 45% de los participantes, identificamos que descubrieron la reestructuración necesaria para obtener el cuadrado de doble superficie, manteniendo los árboles del enunciado en el mismo sitio. Diferenciamos dos reestructuraciones que han podido promover momentos de Insight. Una primera cuando los estudiantes fragmentaban el cuadrado original a partir

de sus diagonales obteniendo cuatro triángulos y construyendo los triángulos simétricos respecto a cada uno de los lados del cuadrado. Y una segunda, cuando algunos estudiantes realizan una rotación del cuadrado original, estrategia que les permite visualizar el cuadrado de doble superficie.

A pesar de las dificultades iniciales, un 85% de los participantes se inventaron formas de abordar el problema. En algunos casos fragmentaban el cuadrado inicial y construían figuras geométricas equivalentes a las identificadas en el cuadrado, en otros casos estimaban la construcción aproximada del cuadrado de doble superficie aunque sin tener presente los arboles del enunciado, por ejemplo.

Hemos identificado sólo en un 15% de participantes el tanteo y error, debido a que la mayoría de estudiantes planteaban la estrategia o representación visual que consideraban para resolver el problema, pero sin explicitar intentos o errores, que dieran lugar a un nuevo tanteo.

Evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los momentos de Insight identificados

Exponemos las evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los cinco momentos de Insight identificados en este segundo problema.

Los resultados nos indican tres evidencias explicitadas de Insight que comparten la misma naturaleza. Identificamos dos evidencias de los participantes Verónica y Juan que se basan en la identificación de la rotación del cuadrado. Esto nos facilita la estrategia que les ha posibilitado descubrir o visualizar la forma del cuadrado de doble superficie. Inferimos que Juan ha reconocido la relación y posición geométrica de los árboles, en la mitad de los lados del cuadrado de doble superficie. En cambio de Verónica entendemos que a partir de rotar mentalmente el cuadrado y ampliarlo, puede visualizar el cuadrado final y que de manera implícita ubica los arboles en sus lados. En esta línea, la evidencia explicitada que hemos identificado en Pedro hace referencia a la ocurrencia de un cuadrado en posición rombo. De manera implícita, Pedro gira el cuadrado y asocia la figura resultante a un rombo, que ampliándola le permite construir, de forma parecida a Verónica la superficie, que pide el enunciado.

Tabla 4

Momentos de Insight identificados en el problema 2

<i>Evidencias Explicitadas</i>	<i>Evidencias no Explicitadas</i>
Verónica: Me pensaba que era imposible porque no se podían mover los árboles hasta que se me ha ocurrido rotar el cuadrado.	José: Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro... intuición.
Juan: Se me ha ocurrido girar el cuadrado y en lugar de que sean los árboles los vértices... sean el centro de las aristas del nuevo cuadrado y me ha salido.	José: Esta ha sido un plas; pum y ya está.
Pedro: He conseguido ver que se podía poner como un rombo desde los lados y me ha salido el cuadrado.	Claudia: Lo he visto.

Algunas veces los alumnos hablan de rombo, al referirse a un cuadrado cuyas diagonales están una horizontal y otra vertical. Dado que esta forma de hablar aparece con una cierta frecuencia, interpretamos que visualmente los dos ángulos, superior e inferior, se ven ligeramente menores que los otros dos ángulos rectos.

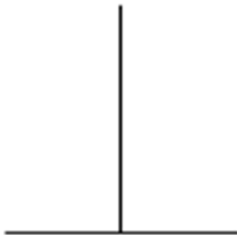


Figura 3. Ilusión óptica de Wundt

En este contexto, entendemos la percepción no sólo como una función directa de los sentidos, sino que debe pasar necesariamente por una interpretación de los estímulos y dotarlos de significado. Es aquí, donde los esquemas mentales, experiencias, motivaciones, necesidades e intereses de cada individuo influyen en cómo explica la

figura que ve mentalmente. Relacionado con este caso tenemos en la Fig. 3 una de las ilusiones ópticas de Wundt. El segmento vertical parece más largo que el horizontal, cuando en realidad ambas líneas son iguales.

El reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas, así como el giro o rotación del cuadrado son factores que consideramos han podido facilitar a estos tres estudiantes, la ocurrencia del momento de Insight, al descubrir el cuadrado de doble superficie.

Los resultados nos muestran tres evidencias no explicitadas. En el caso del participante José hemos identificado dos evidencias no explicitadas que convergen unilateralmente en la ocurrencia del mismo momento de Insight: “Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro... intuición” y “Ésta ha sido un plas, pum y ya está”. Evidencias que por un lado denotan que el descubrimiento o la reestructuración que permitió a José resolver el problema, ocurrió de manera repentina. Es decir, de forma inesperada comprendió súbitamente la idea que le facilitó poder resolver el problema. Por otro lado, inferimos una cierta componente emocionalmente positiva de confianza en sí mismo, cuando ha visto la solución con claridad y una componente afectiva de motivación, sorpresa y satisfacción al conseguir resolver el problema.

Problema 3

A continuación se expone el enunciado del tercer problema discutido en este artículo.

Tenemos tres círculos iguales de radio 1. Uniendo los centros obtenemos un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el área sombreada?

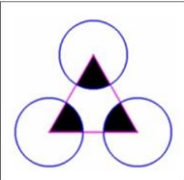


Figura 4. Tercer problema geométrico de estudio

Primeras reflexiones sobre las resoluciones dadas por los alumnos

En la Tabla 1 observamos que el 40% de los participantes resolvió el problema. En muchos casos los participantes explicitaban algunas dificultades como no conocer la fórmula de la superficie de las figuras geométricas sombreadas o no disponer de números en la representación dada en el enunciado para poder realizar cálculos.

En este problema sólo en un 40% identificamos estrategias relacionadas con alguna representación visual. En estos casos, la mayoría de participantes basaban su resolución en una combinación de estrategias sustentadas en la fragmentación de los círculos y en la reubicación de las figuras geométricas sombreadas. En algunas de las resoluciones del problema, la identificación y discriminación visual, así como el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas son habilidades de visualización (Del Grande, 1990) que han podido promover los momentos de Insight.

Aspectos más creativos en la resolución

Un 45% de los participantes de la muestra, descubren la reestructuración que les facilita ver la superficie resultante de la unión de las tres figuras geométricas sombreadas. Diferenciamos 3 reestructuraciones que han podido ocasionar los momentos de Insight. Una primera cuando el estudiante fragmenta uno de los círculos, identificando y discriminando visualmente seis sectores circulares equivalentes a las figuras geométricas sombreadas. Posteriormente ve el semicírculo resultante de la unión de tres sectores circulares. Una segunda cuando mediante una combinación de desplazamientos, traslaciones y giros se reubican los sectores circulares en un mismo círculo viendo el semicírculo resultante sombreado. Y por último cuando los estudiantes realizan una combinación de estrategias entre fragmentar círculos y reubicar sectores circulares.

En un 60% los participantes se inventan formas de abordar el problema, basadas principalmente en la fragmentación y la reubicación, aunque solo en un 10% hemos identificado que tantean, mediante ensayo y error a partir de uno o varios enfoques.

Evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los momentos de Insight identificados

Las evidencias explicitadas y no explicitadas que promueven los siete momentos de Insight identificados en este problema:

Tabla 5
Momentos de Insight identificados en el problema 3

<i>Evidencias Explicitadas</i>	<i>Evidencias no Explicitadas</i>
David: Me he dado cuenta que si juntas las tres zonas sombreadas te da media circunferencia, luego he calculado la circunferencia entera y después lo he dividido entre dos.	Gerardo: Pues ha sido ir probando, he probado... y pum! Y de repente ya está.
Emilio: He movido las tres sombras y me he dado cuenta que era media circunferencia.	Verónica: He visto que la solución era la mitad del círculo.
José: Ah pues, me he dado cuenta que sumando los tres triángulos es la mitad de una circunferencia y entonces he hecho el área de toda la circunferencia dividida entre dos.	Laura Yo es que estaba aburrida... (risas) He empezado... y después lo he visto (gesticula)
	Laura: No lo sé, pero me he dado cuenta que el área sombreada es la mitad de la circunferencia.

Los resultados nos indican que las evidencias explicitadas de Insight identificadas en los participantes David, Emilio y José están basadas en la reestructuración que les permite reubicar adecuadamente los tres sectores circulares sombreados en uno de los tres círculos. En las expresiones identificadas, cuando Emilio explicita que “He movido las tres sombras...”, David “que si juntas las tres zonas sombreadas” y José “que sumando los tres triángulos...”, deducimos que éstas hacen referencia a una combinación implícita de desplazamientos y rotaciones. Es decir que han reconocido las posiciones y relaciones geométricas implícitas entre la unión de los sectores

circulares y los círculos. Las evidencias nos muestran que de esta forma los estudiantes han podido descubrir una nueva reestructuración que resuelve el problema, basada en la equivalencia entre la figura resultante de la unión de los tres sectores circulares y la mitad del círculo. Inferimos que en estos casos los estudiantes han discriminado visual y adecuadamente los sectores circulares respecto al semicírculo.

Los resultados nos muestran cuatro evidencias no explicitadas. Las evidencias no explicitadas de los participantes Gerardo y Laura, nos sugieren que después de un periodo de ensayo y error en el que se tantea, avanza y retrocede con posibles intentos, los participantes sin explicar ninguna estrategia concreta, llegan a ver o imaginar la figura que les proporciona la solución final del problema. En el caso de Gerardo, la evidencia “he probado... y pum! y de repente ya está” nos denota una cierta comprensión súbita en la resolución del problema y celeridad en la ocurrencia. En cambio en el caso de Verónica, la evidencia “He visto que la solución era la mitad del círculo”, nos sugiere una sensación de seguridad y confianza por parte de la alumna, en el momento del Insight.

Nos ha parecido interesante, el caso de Laura, en el que hemos identificado dos evidencias no explicitadas de Insight. Una primera en la que explicita “Yo, es que estaba aburrida.... He empezado.... y después lo he visto”. Aunque consigue ver la solución final, al observar la segunda evidencia “No lo sé, pero me he dado cuenta que el área sombreada es la mitad de la circunferencia” inferimos que ella misma parece desconocer o tener dificultades en explicar cómo ha resuelto el problema, por el tipo de comentarios, las palabras utilizadas, su actitud displicente, denota tener la seguridad y la plena confianza de haber visto la solución resultante. Corroboramos la existencia de dos evidencias no explicitadas en un mismo participante que promueven la ocurrencia de un momento de Insight en un período determinado de la resolución del problema.

Es curioso constatar que en este problema, 4 alumnos utilizan circunferencia en lugar de “círculo”, aunque esto no impide que se entienda lo que quieren explicar.

Comparativa entre los Problemas de Estudio y la Investigación Actual

Observamos que en un 70% el problema 1 fue el más resuelto con éxito. Aproximadamente el doble que el segundo y tercero que obtuvieron un

35% y 40% de éxito en la resolución. Sin embargo, no identificamos relación con el hecho de promover en mayor medida evidencias que promuevan momentos de Insight.

Identificamos un 80% y un 85% de estudiantes que empleó alguna estrategia basada en una representación visual en el primer y segundo problema respectivamente. En cambio en el tercer problema solo un 40%, debido a que muchos participantes solo dieron la solución final sin explicitar la estrategia empleada.

Posiblemente a priori, el indicio IOO1, descubrir reestructuraciones o relaciones no triviales, debería ser el más relacionado con la ocurrencia de los momentos de Insight. Aunque el estudio empírico, no aporta información concluyente al respecto. En cierta manera esto es debido, a que podemos identificar que los participantes en un 70%, 45% y 45% respectivamente descubren reestructuraciones no triviales y en cambio no identificamos expresiones que denoten evidencias explicitadas o no explicitadas de momentos de Insight. Probablemente se debe a que los participantes no consideran esas reestructuraciones no triviales como tal. Y por no considerarlas importantes, no las explican.

En el problema 2 se ha identificado el porcentaje más alto 85% de participantes que se han inventado nuevas formas de abordarlo. Posiblemente esto es debido al hecho de que en el primer problema se orienta a los participantes en la posible resolución y el tercer problema es de naturaleza más convergente.

Finalmente observamos que sólo en un 50%, 15% y 10% respectivamente, los participantes tantean, prueban, avanzan y retroceden mediante uno o varios enfoques. Esto nos sugiere que han podido tener dificultades en cambiar de enfoque o en buscar perspectivas de resolución de otra naturaleza.

A nivel cualitativo, hemos identificado algunas características relevantes: una cierta celeridad y premura en la ocurrencia de la idea que promueve el momento de Insight, acompañada de una sensación de confianza por parte del estudiante conforme a haber encontrado la solución, denotando también una componente emocionalmente positiva de satisfacción.

Respecto a la comparativa con la literatura vigente, los resultados obtenidos en este artículo están en la línea de otras investigaciones como Liljedahl (2013a, 2013b). Dicho autor concluye, en su investigación que

aquello que diferencia la experiencia del Insight en matemáticas y concretamente en la resolución de problemas, no son las ideas en sí mismas, sino más bien la forma en que las ideas aparecen, de repente y sin previo aviso, o sea la ocurrencia súbita y no anticipada de una idea o solución. Concluye que lo que diferencia la experiencia del Insight en matemáticas de otras experiencias matemáticas, aquello que la hace extraordinaria, es la componente afectiva de una respuesta, idea o solución súbita e inesperada. Cuando la ocurrencia inesperada de la idea te llena de emociones positivas. Con esto no quiere decir que no intervengan otros aspectos cognitivos que pueden ser importantes en la ocurrencia de la idea o solución que promueve el Insight, pero que el factor diferenciador parece ser especialmente la componente afectiva (Liljedahl, 2013a).

Por otro lado, coincidimos con algunas investigaciones (De Nicolás, 1999, Guilera 2002) en que la resolución de problemas de Insight nos muestra que una de las dificultades comunes de los estudiantes al intentar resolverlos son las limitaciones autoimpuestas en la interpretación del enunciado. Por otro lado existen las autolimitaciones de naturaleza conceptual que pueden producirse por ejemplo porque no hay números que les permita realizar cálculos o pensar que para resolver un problema concreto es necesario una fórmula. Estos bloqueos pueden autoimponer elementos como esenciales cuando no lo son o disminuir la tolerancia a lo desconocido, impidiendo por tanto estrategias de tanteo con éxito.

Conclusiones

Recordemos que el objetivo en este trabajo es identificar, describir y caracterizar los momentos de Insight, en una muestra de estudiantes de 4º de ESO y en tres problemas geométricos muy concretos. A partir de los distintos datos analizados, tanto a nivel cuantitativo como cualitativo, podemos realizar una descripción y caracterización de los momentos de Insight identificados.

En primer lugar, los indicios identificados en la resolución de los problemas son: el éxito en la resolución, la utilización de representaciones visuales, la identificación del descubrimiento de reestructuraciones no triviales o del inventar nuevas formas de resolución así como tantear mediante ensayo y error.

En la experiencia matemática de los momentos de Insight no intervienen sólo elementos cognitivos, sino también otros factores como el conocimiento general y específico de los estudiantes, la motivación en la resolución de problemas geométricos empleando métodos visuales, etc.

En segundo lugar y a nivel cualitativo hemos identificado en la exploración de las expresiones que hacen referencia a los momentos de Insight, una componente emocionalmente positiva de sorpresa y satisfacción. Hemos identificado también 9 evidencias explicitadas de Insight y 10 evidencias no explicitadas de Insight. En cualquiera de las dos clases de evidencias, nos encontramos con que la identificación de la componente efusiva y de sorpresa agradable, con una cierta celeridad, seguridad y confianza de los participantes es especialmente significativa en el descubrimiento de una nueva reestructuración que origina un momento de Insight y posibilita poder continuar con la resolución del problema.

Entre otros aspectos que son influyentes en la ocurrencia de un Insight, destacamos el hecho de que el Insight es único e irrepetible y depende del participante en concreto. Una determinada reestructuración de las relaciones o elementos que intervienen en un problema geométrico potencialmente de Insight perceptivo puede llegar a posibilitar la ocurrencia de un momento de Insight en algunos estudiantes pero no en otros. Algunos ejemplos así lo corroboran.

En el primer problema geométrico, los participantes que identifican una reubicación de los triángulos de la figura geométrica, posiblemente tendrán por primera vez la ocurrencia de la comprensión súbita de la superficie cuadrada final. Sin embargo, con los datos de que disponemos actualmente no se puede afirmar que un momento de Insight pueda ser facilitador de otros momentos de Insight en otras situaciones problemáticas, dados enunciados con cierta semejanza en estructura y nivel de dificultad. Esta es una posible línea de investigación (Guilera, 2000), estudiar cómo y cuando la resolución de un problema ayuda a la resolución de otro problema, que en cierta forma presenta una estructura equivalente en enunciado y posible resolución al inicial.

En el segundo problema geométrico de Insight sucede algo similar. La estrategia de rotar, girar el cuadrado o aplicar una imagen dinámica ha podido promover en algún participante como en el caso de Verónica, Juan o Pedro un momento de Insight que le ha permitido continuar o resolver el problema. Aunque quizás en otros participantes, rotar el cuadrado o aplicar

una imagen dinámica no les ha promovido la ocurrencia del momento de Insight que les hubiese permitido ver la solución del problema, posiblemente porque se centran en buscar una estrategia reproductiva.

Constatamos que un aspecto que define y diferencia la ocurrencia del momento de Insight de otras experiencias matemáticas, es la componente afectiva de agrado al darse la experiencia de una precipitada ocurrencia de una nueva reestructuración que puede resolver una situación problemática. Por otra parte, la vivencia del momento de Insight viene determinada no sólo por el problema, sino especialmente por el propio estudiante, por toda la complejidad de factores que se expresan en él a través de sus acciones como son: conocimientos, transversalidad, estrategias que pone en marcha y agrado frente a la tarea.

Notas

¹ Fermat's Last Theorem: <http://www.youtube.com/watch?v=7FnXgprKgSE>

Referencias

- Albertí, M. (2010). *La Creatividad en Matemáticas. Cómo Funciona una Mente Maravillosa*. Barcelona: RBA.
- Barnes, M. S. (2000). Magical moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 33-43.
- Blumm, I. (2014). *El Libro de Inspiraciones*. España: Creative Commons Blurb.
- Callejo, M.L. (1994). *Un Club Matemático para la Diversidad*. Madrid: Narcea.
- Corry, L. (2006) El teorema de Fermat y sus Historias. *La Gaceta de la RSME*, 9(2), 387-424.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- De Nicolas C. J. (1999). *El Insight Creativo*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.
- Gardner, M. (1989). *¡Aja! Paradojas: Paradojas que Hacen Pensar*. Barcelona: Labor.

- Guilera, L. (2002). *Vías de Acceso Conceptual en la Resolución de Problemas: Importancia de los Estímulos Sensoriales*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Jade, L.C. (2012). *Perceiving and Pursuing Novelty: A Grounded Theory of Adolescent Creativity*. PhD thesis. Queensland University of Technology.
- Liljedahl, P. (2008). *The AHA! Experience: Mathematical Contexts, Pedagogical Implications*. Saarbrücken. Germany: VDM Verlag.
- Liljedahl, P. (2013a). Illumination: An affective experience? *The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 253–265. doi: [10.1007/s11858-012-0473-3](https://doi.org/10.1007/s11858-012-0473-3)
- Liljedahl, P. (2013b). Illumination: Cognitive or affective?. *Proceedings of the 18th International Conference on Mathematical Views (MAVI)*, (pp.1-10). Helsinki, University Simon Fraser.
- Miller, A. I. (2000) Metaphor and scientific creativity. In F. Hallyn (ed.), *Metaphor and Analogy in the Sciences* (pp.147-164). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ohlsson, S. (1984). Restructuring revisited: Summary and critique of the Gestalt Theory of problem solving. *Scandinavian Journal of Psychology*, 25, 65-78. doi: [10.1111/j.1467-9450.1984.tb01001.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9450.1984.tb01001.x)
- Punset, E. (2011). *Viaje al Optimismo. Las Claves del Futuro*. Barcelona: Destino.
- Sequera, G.E.C. (2007). *Creatividad y Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas para la Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.
- Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. New York: Harcourt Brace
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper and Brothers.

Francisco Sánchez es doctor en didáctica de las matemáticas, en la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Maria Luisa Fiol es Profesora Titular en Educación Matemática, en la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Dirección de Contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: c/Travesía Tibidabo, 6A, Canovelles 08420, Barcelona, España. **Email:** fsanch56@xtec.cat

Annexo 1

Cuestionario de respuestas (R1)

Nombre:	Curso:
Apellidos:	Grupo:
Fecha:	Número problema:

1. ¿Cómo has resuelto el problema? Explícalo con el máximo detalle.
2. Explica qué dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema.
3. Ahora mismo, ¿se te ocurre alguna otra forma de resolver el problema?

Entrevista Semiestructurada (E1)

Nombre:	Curso:
Apellidos:	Grupo:
Fecha:	Número problema:

1. ¿Cómo has resuelto el problema? Explícalo con el máximo detalle.
2. Explica qué dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema.
3. Ahora mismo, ¿se te ocurre alguna otra forma de resolver el problema?
4. ¿Cómo crees que se te ha ocurrido la idea para resolver el problema?
5. Qué destacarías justo en el momento de descubrir la idea para resolver el problema. ¿Qué sentiste?

6. De los siguientes factores: la casualidad, la visualización y la inspiración, ¿cuál crees que ha sido más importante o te ha influenciado más en la resolución del problema?