REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Estadios de Comprensión de la Noción Matemática de Límite Finito desde el Punto de Vista Histórico

Iván Medrano[1] y Luis Roberto Pino-Fan[1]

1) Universidad de Los Lagos, Chile

Date of publication: October 24th, 2016
Edition period: October 2016-February 2017

To cite this article: Medrano, I. & Pino-Fan, L.R. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT*, *5*(1), 287-323. doi: 10.4471/redimat.2016.1874

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1874

REDIMAT, Vol. 5 No. 3 October 2016 pp. 287-323

Stages of Understanding of the Mathematical Notion of Finite Limit from the Historical Point of View

Iván Medrano
Universidad de Los Lagos

Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

(*Received: 24 December 2015; Accepted: 4 October 2016; Published: 24 October 2016)*

Abstract

In this work an investigation about the genesis and evolution of the concept of finite limit is presented. For this purpose we performed a historical-documentary study in which elements related to the conceptual structure of this notion were considered: real numbers, the infinite, the approximation notion, the geometrical continuous and the numerical continuous. For this study, the work of the Greeks is considered as a starting point, specifically the development and use of the exhaustion method, continuing with the introduction of the indivisibles by Viéte and Cavallieri and the mathematical production generated in the beginnings of differential calculus by Newton and Leibnitz, finalizing with the stages of formalization of the limit and its metric and topological generalizations in the standard analysis. As a result of our investigation, seven stages of understanding of the mathematical object of finite limit were distinguished.

Keywords: Finite limit, infinite, real numbers, history and epistemology of mathematics

2016 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2016.1874

REDIMAT, Vol. 5 No. 3 Octubre 2016 pp. 287-323

Estadios de Comprensión de la Noción Matemática de Límite Finito desde el Punto de Vista Histórico

Iván Medrano
Universidad de Los Lagos

Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

(*Recibido: 24 Diciembre 2015; Aceptado: 4 Octubre 2016; Publicado: 24 Octubre 2016)*

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación sobre la génesis y la evolución de la noción de *límite finito*. Para tal propósito realizamos un estudio de tipo histórico-documental, en el cual se consideraron elementos relacionados con la estructuración conceptual de dicha noción: los números reales, el infinito, la noción de aproximación, el continuo geométrico y el continuo numérico. Para este estudio se considera como punto de inicio el trabajo de los griegos, específicamente el desarrollo y uso del método de exhaución, continuando con la introducción de los indivisibles por Viéte y Cavallieri y la producción matemática generada en los inicios del cálculo diferencial por Newton y Leibnitz, finalizando con las etapas de formalización del límite y sus generalizaciones métricas y topológicas en el análisis estándar. Como resultado de nuestra investigación se distinguen siete estadios de comprensión del objeto matemático límite.

Palabras clave: Límite finito, infinito, números reales, historia y epistemología de las matemáticas

2016 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2016.1874

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Como señala Anacona (2003), en los estudios histórico–epistemológicos juega un rol esencial el análisis del proceso constructivo de un concepto, sin dejar de considerar que este se desarrolla en contextos socioculturales específicos, siendo estas características las que inciden en su valor para la Educación Matemática.

Ahondando más en el análisis histórico y su importancia, se puede señalar:

> El análisis histórico cumple varias funciones: en primer lugar pone de manifiesto que las nociones matemáticas no se han desarrollado de manera aislada, sino conectadas unas con otras, en segundo lugar muestra el contexto de problemas en los que han aparecido los conceptos, y en tercer lugar, nos hace comprender que el desarrollo no ha sido lineal, sino con avances, retrocesos e indecisiones, nos da cuenta en definitiva, de las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática. (González y Sierra, 2003, p. 110)

En el análisis de la información histórica recopilada, no sólo se evidencian las características históricas de emergencia de los objetos matemáticos, sino también características de un proceso evolutivo de carácter dialéctico, en la construcción de la estructura conceptual del límite finito de una función. Así, elementos como el continuo y el infinito, introducidos en la cultura griega, son contrastados por las paradojas de Zenón, lo cual da origen, como una respuesta a las paradojas surgidas en el tratamiento de los procesos infinitos, al método de exhaución. Igual acontece con los infinitesimales, que una vez introducidos se muestran como un procedimiento más operativo e intuitivo para trabajar en cálculo diferencial e integral, que las nociones incipientes de límite. Esto lleva a la definición de límite de Weirstrass, la cual operacionaliza dicho concepto y satisface los estándares de rigor moderno matemático, que no cumple la teoría de los infinitesimales –en ese momento histórico, principalmente por el alejamiento de los matemáticos de la escuela leibniziana de los principios filosóficos que habían inspirado y eran capaces de fundamentar el análisis infinitesimal– (Brunschvicg, 1945).

Otro aspecto a considerar refiere al rigor matemático, que tiene carácter histórico y que está en directa relación con el dominio en que opera una teoría o una estructura conceptual, dejando en claro que el desarrollo de las matemáticas ha sido precedido frecuentemente por una matemática informal antes que formal (Bell, 1949).

La historia del cálculo diferencial e integral, muestra que en la construcción conceptual del límite no ha existido ni un único camino ni una única concepción, sino que han surgido varias acepciones, por ejemplo: las construcciones de los números reales en el siglo XIX por Dedekind, Cantor y Weirstrass (Boyer, 2013).

Estadios de Comprensión de la Noción de Límite

Estadio 1: La Noción de Aproximación Desarrollada por Eudoxo y Arquímedes

Los historiadores de la matemática (e. g., Bell, 1949; Boyer, 2013; Brunschvicg, 1945) coinciden en señalar que el origen de la matemática como ciencia deductiva se sitúa en Grecia. Pitágoras, quien destaca en esta etapa fundacional con sus trabajos y filosofía, da origen a la escuela pitagórica de pensamiento, cuya concepción esencial era la presencia ubicua del ‘numero’. Aristóteles lo señala de la siguiente manera:

> Los números son por su naturaleza anteriores a las cosas, y los pitagóricos creían percibir en los números, más bien que en el fuego, la tierra y el agua, una multitud de analogías con lo que existe y lo que se produce. Pareciéndoles que estaban formadas todas las cosas a semejanza de los números, y siendo por otra parte los números anteriores a todas las cosas, creyeron que los elementos de los números son los elementos de todos los seres, y que el cielo en su conjunto es una armonía y un número. (Aristóteles, s.f./2012, p. 35)

Para el pensamiento pitagórico había una asociación natural entre los números y los elementos geométricos. Como señala Brunschvicg (1945, p. 54): “….los pitagóricos habían comenzado por concebir los números como cosas; las expresiones números cuadrados o números triangulares no son metáforas; esos números son efectivamente ante los ojos y ante el espíritu, cuadrados y triángulos”. Así, la aritmética pitagórica era una aritmética geométrica, el número era una suma de puntos representados en el espacio, y las figuras formadas por esos puntos (líneas, superficies o volúmenes) eran entendidas como números.

En esta concepción pitagórica, se tiene una correspondencia entre una pluralidad discontinua aritmética y un continuo geométrico, basada en una concepción intuitiva de ambos dominios. Sin embargo, dicha correspondencia armónica, entre el dominio aritmético y el continuo geométrico, fue bruscamente interrumpida por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. El cuestionamiento de la correspondencia entre los números enteros y los puntos geométricos, produjo la separación entre la aritmética geométrica y la geometría.

Otra noción fundamental que emerge en el horizonte del conocimiento matemático griego es la idea de infinito. Una traducción literal del término refiere a algo ‘sin límites’, ‘ilimitado’. Aristóteles le atribuye el carácter de principio, tal como señala Zellini (2004, p. 12) citando a la *Física* de Aristóteles: “Toda cosa o es principio o procede de un principio: pero no hay del infinito principio alguno, que sería su límite. Además, es no engendrado e incorruptible, por cuanto es un principio…”. Así, la principal dificultad que plantea el infinito radica en su ‘inagotabilidad’, pero justamente esta característica conduce a una primera definición de él (Ibíd.): “un conjunto de objetos es ilimitado si al tratar de identificar cada uno de sus elementos no se logra formar un todo con ellos, pues siempre habrá algún elemento no considerado (infinito potencial)”.

En esta primera aproximación al concepto de infinito está implícita la noción del devenir. Para Aristóteles el infinito es potencial no actual (concepción simultánea de todos los elementos de un conjunto), pero no es ajeno a su percepción el concepto de infinito actual.

Por su parte, Anaxágoras de Clazomene concibió lo ilimitado como el caos original en que no existía nada por no ser aún originadas las formas. Anaxágoras (s.f., citado en Zellini, 2004, p.18) escribe: “también lo pequeño era ilimitado… en lo pequeño no existe un mínimo, sino siempre algo más pequeño… también de lo grande existe siempre algo más grande…”. Se puede decir que la concepción del infinito de Anaxágoras tiene en cuenta dos aspectos fundamentales: lo inagotable de lo ilimitado y la no existencia de un mínimo ni de un máximo absoluto. Dichos aspectos no sólo constituyeron fuente de reflexión y desarrollo del concepto de infinito, sino que también estuvieron presentes en la fundamentación del cálculo diferencial e integral propuesta por Cauchy y por Weirstrass.

Cabe preguntarse, como lo hace Boyer (1959), ¿Por qué la escuela pitagórica no insistió en solucionar esta desconexión entre los números enteros y los puntos de la recta? La respuesta a este interrogante, junto con el cuestionamiento a los conceptos de infinito y continuo, se identifica en las paradojas de Zenón. Investigadores de la historia de las Matemáticas (Brunschvicg, 1945; Bell, 1949) coinciden al señalar la incidencia de las paradojas de Zenón en el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Boyer (1959) señala que la respuesta al interrogante anterior está dada por la argumentación de Zenón tanto en contra de la teoría de los infinitesimales como del uso que pudieron haber intentado de ella los pitagóricos.

En este mismo sentido, Brunschvicg (1945, p. 181) señala, “Cuando Zenón formula el argumento de la dicotomía,… concibe la serie $1=1/2+(1/2)^2+(1/2)^3+\cdots$”. Hay que señalar aquí, que Zenón concibe el proceso que desarrolla la serie, no su convergencia, lo cual sería determinado posteriormente (siglo XVII). Brunschvicg (1945, p. 182) sigue su análisis indicando:

> Nada, en efecto, testimonia mejor la diferencia de estructura entre el pensamiento antiguo y el pensamiento moderno que el uso hecho por Zenón de Elea de esa misma serie que estaba destinada a convertirse en el modelo de la claridad intelectual. En sus manos ella es un arma dialéctica y destructiva: hace fracasar las primeras especulaciones de los matemáticos sobre las relaciones en el espacio o en el tiempo, impidiendo al espíritu humano obtener la comprensión de una cantidad total por la medida de sus partes.

La *Geometría* desarrollada por Pitágoras propone dos grandes hitos. Uno de ellos es que estaba basada en la correspondencia entre las magnitudes geométricas y los números enteros, razón por la que tenía una característica de geometría discreta. El otro refiere a la teoría aritmética de la proporcionalidad, derivada de esta correspondencia entre magnitudes geométricas y números enteros (Brunschvicg, 1945).

En este punto es necesario distinguir en el pensamiento griego entre lo que es una razón definida geométricamente y una razón numérica. El descubrimiento de magnitudes geométricas inconmensurables significó una reconsideración de los fundamentos de la geometría pitagórica. Esta reconsideración fue resuelta por Eudoxo mediante la definición de la proporcionalidad entre magnitudes geométricas. Dicha definición fue recogida y reelaborada posteriormente por Euclides en el Libro V de sus *Elementos* (Euclides, s.f./2007, p. 183-184):

> Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Lo anterior se complementa con la definición 6, del Libro V (Ibíd., p. 184): “Llámese proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón”. La propuesta de Eudoxo, además de generalizar el concepto de proporcionalidad pitagórica, amplía su ámbito de aplicación a las magnitudes geométricas inconmensurables, lo que le da un carácter más geométrico que aritmético a la definición. A partir de esta definición de proporcionalidad, se puede derivar la concepción de número real, en la forma desarrollada muchos siglos después por Dedekind mediante la teoría de las cortaduras. Esto se puede apreciar considerando dos magnitudes inconmensurables *a* y *b* homogéneas (e.g., dos trazos geométricos), el conjunto de los números racionales se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos, el conjunto *A* de los números racionales *m/n* tales que el trazo *ma* (formado por la adición de m veces el trazo a) es inferior en longitud que el trazo *nb*, y el conjunto *B* formado por los números racionales *m/n* tales que el trazo *ma* es superior en longitud que el trazo *nb*. Los conjuntos *A* y *B* satisfacen la definición de cortadura de Dedekind y se podría definir un número real al cual hacerle corresponder la razón entre las magnitudes inconmensurables *a* y *b*. Sin embargo, como señala Boyer (1959), considerar que los matemáticos griegos que trabajaron con esta definición intentaron la introducción de los números reales, es erróneo, puesto que ellos trataban justamente de evitar la definición aritmética de nuevos números.

Aunque los geómetras griegos no pudieron precisar los objetos con los cuales trabajaban, sí pudieron establecer relaciones entre ellos, como se expresa en la proposición 2 del Libro XII de los *Elementos* de Euclides (s.f./2007, p. 344): “Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros”. En terminología actual: si C1 y C2 son dos circunferencias de radios r_1 y r_2, entonces $\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2}$. El lado izquierdo de la proporción anterior es una razón entre números irracionales, que en la geometría griega correspondería a una razón entre magnitudes inconmensurables, lo que requiere para la demostración de la proposición el uso de la definición de proporcionalidad de Eudoxo, además del método de exhaución.

Como señala Brunschwig (1945), la pérdida o ausencia de escritos relativos a todo el quehacer y conocimiento matemático de los griegos, ha ocasionado que se propongan diversas interpretaciones de sus hallazgos. Entre ellas se cuenta las relacionadas con el método de exhaución o agotamiento. El fundamento del método de exhaución es el llamado *principio de Arquímedes* o *Principio Arquimidiano*:

> Y además, en las líneas desiguales y las superficies desiguales y los sólidos desiguales el mayor excede al menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón del tipo de magnitud comparada con la otra. (Hawking, 2013, p. 85)

Este principio, que el mismo Arquímedes le atribuye a Eudoxo, es presentado en los *Elementos* de Euclides, pero mientras Arquímedes lo presenta operando bajo la adición, Euclides lo señala así en la proposición 1 del Libro X de sus *Elementos* (Euclides, s.f./2007, p. 88):

> Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Esta proposición, que en la época griega correspondía a relaciones entre magnitudes geométricas, hoy en día es interpretada en términos aritméticos y representa un principio fundamental –denominado axioma de Arquímedes– en la teoría de los números reales: "Para cada par x,y de números reales tales que $0<x$, $0\leq y$, existe un entero n tal que $y\leq nx$" (Dieudonné, 1966, p. 25). Es así, que el conjunto de los números reales se caracteriza como un cuerpo ordenado arquimediano.

Con el método de exhaución arquimediano, hubo una revolución en el pensamiento matemático de los griegos. El proceso seguido por el método exhaución es semejante al proceso dicotómico de Zenón, pero permite dar soluciones aproximadas, tan exactas como sean requeridas, a problemas que implícitamente contienen procesos infinitos. Cabe señalar que los griegos consideraban procesos de iteración finita como parte del método de exhaución. La estructura del proceso justificada bajo los principios anteriormente señalados, permitía demostraciones rigurosas, de acuerdo con el estándar de rigor de la época, para teoremas relativos a superficies y a volúmenes. Los trabajos y concepciones de Aristóteles, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, permanecieron en el acervo matemático occidental por alrededor de veinte siglos sin mayores variaciones. En particular, nociones como el infinito, el continuo y los infinitesimales, fueron reconsiderados posteriormente tanto en la creación del cálculo diferencial e integral, como en su formalización.

Estadio 2: La Concepción de los Indivisibles

Con el método de exhaución introducido por Eudoxio y perfeccionado por Arquímedes, los problemas de cuadratura del círculo y de cubatura (determinación del volumen de una figura mediante el cálculo de la suma de una serie de expresiones, bien geométricas o bien algebraicas, que deben completar la figura) se sitúan en una nueva perspectiva matemática a través de la cual se accede a la construcción de aproximaciones tan finas como se quiera, mediante el uso de desigualdades. En sus estudios de cuadratura, Arquímedes crea un método heurístico con el cual obtiene importantes resultados fuera del marco geométrico. Consciente de la necesidad de validar sus resultados con la teoría geométrica lo señala expresamente en el preámbulo de su obra *Método sobre los teoremas mecánicos* dedicado a Eratóstenes (Hawking, 2013, p. 164):

> …He creído oportuno exponerte las particularidades de un método, por medio del cual te será posible iniciar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Estoy convencido, además, de que dicho método no será menos útil para demostrar los propios teoremas. Habida cuenta de que la investigación hecha por este método no comporta demostración; pues es más fácil, después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de las cuestiones objeto de investigación, dar luego la demostración, que investigar sin ningún conocimiento previo.

La distinción entre una forma empírica de obtener resultados y la validación formal de ellos mediante el modelo euclídeo, trazó una amplia huella entre los procedimientos de investigación y validación de los matemáticos de los siglos posteriores. Brunschvicg (1945, p. 187) lo expresa así:

> …a través de todo el curso del siglo XVII, aquellos que se abrirán el camino verdaderamente real de la integración, chocarán con la autoridad del nombre de Arquímedes, como con el dogma oficial de una Iglesia.

La geometría de los indivisibles

En el siglo XVI y XVII, la investigación y desarrollo de las matemáticas estuvo fuertemente influenciada por los intereses prácticos y necesidades de aplicación de las matemáticas de sus principales desarrolladores: Stevin, Viéte, Cavalieri, Galileo Galilei y Kepler. Boyer (2013, p. 408) afirma:

> Tanto Stevin como Kepler y Galileo necesitaban para sus problemas prácticos los métodos de Arquímedes, pero todos ellos querían evitar las sutilezas lógicas del método de exhaución. Fueron en gran medida las modificaciones resultantes de los antiguos métodos infinitesimales las que condujeron finalmente al cálculo infinitesimal, y Stevin fue uno de los primeros que sugirió modificaciones.

Stevin estaba particularmente interesado en las aplicaciones físicas que se podrían realizar al considerar infinitos elementos infinitamente pequeños. Por su parte, Kepler necesitaba aplicar las matemáticas a la Astronomía y también a problemas concretos. Es así como en su obra *Nova stereometría doliorum vinariorum* (1615), Kepler se propone determinar la forma que deberían tener los toneles de vino que para igual línea de aforo tienen la máxima capacidad. Lo interesante de dicha obra es el uso de un método directo, evitando deliberadamente el método de Arquímedes, que para Kepler era un método de reducción al absurdo. Es así como asume intuitivamente, sin demostración, resultados que Arquímedes admitía después de un proceso de validación deductivo.

> Desde el comienzo, él [Kepler] ve en el círculo una infinidad de triángulos que tienen cada uno por base un punto de la circunferencia; la cuadratura del círculo consistirá, pues, en determinar la superficie del triángulo total que tiene por base el número infinito de los puntos de la circunferencia. (Brunshvigg, 1945, p. 189)

A partir de esta suposición, Kepler aborda la solución de problemas mediante un uso intuitivo de principios fundacionales de la matemática infinitesimal. Uno de tales principios se refiere a que las variaciones de las magnitudes son casi imperceptibles en las proximidades de un valor máximo. Esta forma de presentar su trabajo le acarreó fuertes críticas de los geómetras contemporáneos, sin embargo, es reconocida la importancia de *Nova stereometría doliorum vinariorum* por su intención de promover la disciplina geométrica y por presentar un método alternativo de trabajo en Matemáticas. Boyer (2013, p. 412) afirma,

> Kepler renuncia a la típica doble *reductio ad absurdum* que era el núcleo del razonamiento arquimidiano, y en esta manera de proceder fue seguido por la mayor parte de los matemáticos, desde su época a la actual.

Cavalieri, que fue discípulo de Galileo, motivado por la *Nova Stereometría*, decidió exponer su concepción de los indivisibles en el libro *Geometría indivisibilibus*. El punto de partida de las consideraciones geométricas de Cavalieri fue una nueva concepción de la generación de las figuras geométricas, particularmente de los sólidos. Es usual considerar que la rotación de un paralelogramo genera un cilindro y la rotación de un triángulo un cono; pero si se tiene un paralelogramo y un triángulo con la misma base y la misma altura, mientras el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, el volumen del cono generado por el triángulo es un tercio del volumen del cilindro generado por el paralelogramo. Cavalieri se propuso resolver esta aparente paradoja mediante una nueva forma de entender la generación de los sólidos: los elementos generadores se consideran como obtenidos por el corte de los sólidos por planos paralelos a las bases y equidistantes de ellas, así, los volúmenes del cilindro y el cono se encontrarán en la misma proporción que sus elementos generadores. De este principio emerge una técnica nueva, los problemas de cuadratura y cubatura consistirán en componer las superficies o los sólidos mediante los elementos característicos generadores obtenidos por rectas paralelas a las bases o planos paralelos a las bases, todos ellos equidistantes de las bases, para determinar la relación de magnitudes desconocidas comparándolas con magnitudes conocidas. Este método de comparación permite eliminar de los cálculos el trabajo con el infinito, Cavalieri lo señala de la siguiente manera:

> Mientras considero que en todas las líneas o en todos los planos de alguna figura no comparo su número –que ignoramos– sino sólo su magnitud que se iguala al espacio ocupado por las mismas líneas, concuerde con él; y puesto que ese espacio está comprendido dentro de límites, la magnitud de ellas está comprendida dentro de los mismos límites. Por eso se le puede hacer una adición o sustracción, aunque ignoremos el número de ellas: lo cual afirmo que basta para que sean recíprocamente comparables. (Cavalieri, citado en Brunshvigg, 1945, p. 192)

En relación con lo anterior, Brunshvigg (1945, p. 192) señala:

> Pero como, a falta de poseer el instrumento analítico que le hubiera podido liberar, Cavalieri se mantuvo en el terreno de la intuición geométrica, inevitablemente hacía surgir el problema cuya consideración quería evitar. La imaginación no puede detenerse sobre esos elementos de comparación, sin tratar de representarse al mismo tiempo que esos elementos, la figura total que ellos

> componen; sin exigir ver cómo se comportan esos elementos con respecto al todo que constituyen. La cuestión clásica de la composición del continuo se impone pues a Cavalieri, a pesar del propio Cavalieri.

Es decir, la teoría de los indivisibles enfrenta uno de los problemas centrales en el desarrollo y fundamentación del cálculo diferencial e integral: 'la definición del continuo'. La algebrización de la idea de los indivisibles dio origen a una nueva clase de entes matemáticos: los infinitesimales.

Las investigaciones matemáticas mediante el método de los infinitesimales, aunque tuvieron una calurosa acogida por gran parte de los matemáticos de esa época, no estuvieron exentas de una fuerte oposición tanto religiosa –debido a la concepción filosófica que implicaba la teoría de los infinitesimales– como matemática –por parte de fieles seguidores de la geometría griega y de sus métodos–. Es en este escenario donde destaca la figura de Blas Pascal, quien asume la defensa de la teoría del cálculo de los indivisibles. En el marco de la polémica con el caballero de Mére, Pascal le responde:

> Si fuese verdad que el espacio estuviese compuesto por un cierto número finito de indivisibles, se deduciría que dos espacios, cada uno de los cuales fuera cuadrado, es decir igual y semejante por todos lados, siendo doble uno del otro, uno contendría un número de indivisibles doble del número de indivisibles del otro. Recuérdese bien esta consecuencia, y trátese luego de ordenar puntos en cuadrados hasta que se hayan encontrado dos cuadrados que contenga uno doble número de puntos que el otro y entonces les reconoceré como los mejores geómetras del mundo. (Pascal, citado en Brunschvicg, 1945, p. 197)

Además de su defensa de la teoría de los indivisibles, Pascal destacó por otros trabajos matemáticos, como el *Tratado de los senos del cuarto de círculo*, el cual inspiró a Leibniz para crear su versión del cálculo infinitesimal, según relato del propio Leibniz.

Descartes y sus contribuciones

El aporte de Descartes al desarrollo del conocimiento matemático, se realiza en tres vertientes: la filosofía, la ciencia en general y la matemática en particular. Su gran aporte en esta última vertiente, fue la creación de la Geometría Analítica –aunque para ser más precisos debemos decir una de las versiones de ella, puesto que la otra corresponde a Fermat–. Los fundamentos de la Geometría Analítica cartesiana –presentados en La geometría que aparece como uno de los apéndices del *Discurso del método* para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias de 1637–, reflejan una concepción universal de la ciencia y la búsqueda de la verdad científica, de acuerdo con el concepto introducido de ella y con base a un método general. Podríamos decir que la geometría analítica cartesiana es la obra de un filósofo de las ciencias, más que de un matemático. En cambio, los principios de la geometría analítica de Fermat –expuestos en *Isagoge ad locos planos et solidos*–, reflejan el trabajo de un matemático de vasto saber, que reconsidera y perfecciona procedimientos prácticos anteriores, para llevarlos a un nivel máximo de simplicidad y elegancia. Pino-Fan (2014, p. 80) señala que "….se puede decir que la geometría analítica de Descartes es la aplicación sistemática y completa del álgebra a la geometría y viceversa". Una importante consecuencia que se puede desprender de la *Geometría* (en la visión cartesiana), con respecto a la concepción de las matemáticas, es la siguiente:

> …la idea de la ciencia matemática es transformada: la cantidad no es más como en Euclides, una determinación sacada por abstracción de la observación de los objetos, la ciencia de la cantidad ya no es comparable a una ciencia natural. La noción de cantidad es puramente intelectual: se establece a priori por la sola capacidad que tiene el espíritu de conducir y proseguir hasta el infinito largas cadenas de razones. (Brunshvigg, 1945, p. 150)

Aunque la producción matemática de Descartes no se limitó a la creación de la geometría analítica, y participó activamente en la solución de problemas que fueron fundamentales para el desarrollo del cálculo infinitesimal –problemas de máximos y mínimos, y problemas de tangentes y cuadraturas–, no se evidencia en su trabajo una concepción o el uso de algún procedimiento análogo al concepto de límite, tal como lo señala Pino-Fan (2014, p. 80):

> Aunque Descartes manifestó cierto interés por los métodos infinitesimales, no participó en su desarrollo porque sus trabajos no eran más que una ejemplificación en el desarrollo de su filosofía; de hecho su método es puramente algebraico y no recurre a los conceptos (noción intuitiva) de límite o infinitésimo, él evitaba el uso de métodos infinitesimales a causa de los riesgos que

> presentaban y debido a la ausencia de fundamentación teórica para el razonamiento infinitesimal.

Los aportes de Fermat

Poco después de haber publicado Descartes la *Geometría*, recibe de parte de Fermat el escrito titulado *Methodus ad disquirandam maximan et miniman*, en el cual presenta un método general de resolución de problemas de máximos y mínimos en la forma siguiente:

> Planteo la ecuación del problema, supongo que en esta ecuación una cantidad A es aumentada en una cierta cantidad que represento por E; y formo la ecuación en A+E. El secreto del método reside en igualar o, según la notable expresión empleada por Fermat, en ad-igualar la ecuación en A y la ecuación en A+E. Después de efectuar la reducción, se anula la cantidad auxiliar E, y se obtiene la expresión de A que da el *maximun* o el *minimun* buscado. (Brunschvicg, 1945, p. 206)

En la propuesta de Fermat hay que distinguir:

1. Un algoritmo de cálculo, que la mayoría de los historiadores matemáticos señalan equivalente al procedimiento $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; sustituyendo *A* por *x* y *E* por *h*; pero hay que precisar que el algoritmo de Fermat es de carácter algebraico, basado en la teoría de ecuaciones de Viéte.
2. El uso de un resultado establecido mediante la observación y la experiencia –en las proximidades de un punto que es un valor máximo o mínimo de la función, las variaciones de la función son casi imperceptibles, por lo tanto $f(x+h)-f(x)$ es casi cero, *y* es cero en el valor de *x* en que se alcanza un máximo o un mínimo.

El algoritmo de Fermat fue recibido con bastantes objeciones y críticas por parte de sus contemporáneos, uno de ellos fue Descartes. Una de las principales objeciones que recibió fue la relativa a considerar en la primera etapa del cálculo *E≠0*, para finalmente eliminar *E* considerándolo igual a cero. A lo anterior debemos agregar que Fermat trabajó mayormente con funciones polinómicas $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Si realizamos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\frac{[a_n(x+h)^n+a_{n-1}(x+h)^{n-1}+\cdots+a_1(x+h)+a_0]-[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0]}{h}$$

aplicando el teorema del binomio generalizado de Newton y reduciendo términos en el denominador se obtiene:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \frac{a_n\left[nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n\right] + a_{n-1}[(n-1)x^{n-2}h + \cdots h^{n-1}] + \cdots + a_1 h}{h}$$

Si consideramos *x* fija en un determinado valor y *h* variando, el numerador de esta fracción algebraica se puede considerar como una función de *h*, *P(h)*, y se tiene $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{P(h)}{h}$. La función $R(h) = \frac{P(h)}{h}$, no está definida en h=0, pero si realizamos la división de *P(h)* por *h*, se obtiene: $G(h) = a_n\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots h^{n-1}\right] + a_{n-1}[(n-1)x^{n-2} + \cdots + h^{n-2}] + \ldots + a_1$. Esta función *G(h)* no es igual a *R(h)*, puesto que a diferencia de *R(h)*, *G(h)* está definida en *h*=0 y es continua en *h*=0, es decir, $\lim_{h\to 0} G(h) = G(0)$. Pero si se considera una vecindad *V* en *0*, sin centro, con un radio δ>0 conveniente, entonces: $V = [\delta, 0) \cup (0, \delta]$, y se tiene: $h \in V \Rightarrow R(h) = G(h)$. Cero es un punto de acumulación del dominio de ambas funciones, y es fácil demostrar que $\lim_{h\to 0} G(h) = \lim_{h\to 0} R(h) = G(0)$. Es decir, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = G(0) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1$.

Los libros de cálculo elemental frecuentemente presentan el cálculo de derivadas, por ejemplo, de funciones polinómicas, sin distinguir entre *G(h)* y *R(h)* en *h*=0, con lo cual se genera una aparente paradoja. Al inicio del proceso de cálculo se debe suponer *h*≠0, porque se trabaja con *R(h)*, que como se ha dicho, no está definida en *h*=0. Luego se realiza el paso intermedio del algoritmo, la división por h, con lo cual se obtiene una función equivalente a *R(h)* pero no igual. Para terminar el cálculo de la derivada mediante la continuidad de *G(h)* en 0 y el álgebra de límites, se concluye finalmente en los textos que la derivada de la función *f* en el valor *x* considerado es *G(0)*, sin hacer mención ni del cambio de función ni mucho menos de las propiedades analíticas que justifican el cálculo.

Es evidente que las objeciones que pueden hacer a la justificación de este algoritmo moderno de cálculo de la derivada, son equivalentes a las que recibió Fermat en su tiempo. Hoy se tienen los elementos teóricos que justifican este proceder algorítmico, pero en los tiempos de Fermat no se disponía de las definiciones matemáticas de límite y de continuidad.

Estadio 3: La Noción Intuitiva de Límite en los Desarrollos de Newton

Desde la perspectiva histórica es indudable que el surgimiento del cálculo diferencial e integral es el producto del trabajo y el aporte conjunto de muchos destacados pensadores vinculados con las matemáticas –Pascal, Descartes, Fermat, Barrow, Mercator, Wallis, entre muchos otros–. Los aportes de estos pensadores finalmente se identifican en el trabajo creativo y original de Newton y Leibniz, considerados los fundadores del cálculo diferencial e integral (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). A continuación presentamos una síntesis de los aportes de Newton.

Fluentes y fluxiones

En su obra *The Method of fluxions and infinite series*, Isaac Newton presenta su trabajo haciendo mención a dos problemas centrales que pretende resolver:

> i) Si la longitud del espacio de referencia es continuamente (esto es, en todo tiempo) dado, encontrar la velocidad del movimiento en cualquier tiempo propuesto. ii) Si la velocidad del movimiento es continuamente dado; encontrar la longitud del espacio de referencia en cualquier tiempo propuesto. (Newton, 1736, p. 19)

En la presentación de su método de las fluxiones, desarrollado para resolver ambos problemas, señala dos conceptos fundamentales sobre los cuales basa su desarrollo: las fluentes y las fluxiones. Newton las define de la siguiente manera:

> Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…. (Collette, 1993, p. 109)

En su exposición de la resolución de los problemas anteriores, Newton primero presenta ejemplos de situaciones particulares de ellos, los cuales resuelve mediante la aplicación de un procedimiento algorítmico y alguna técnica particular, y posteriormente demuestra la validez de un método general de resolución que justifica el procedimiento algorítmico (Newton, 1736, p. 21):

> PROB. I [Problema 1]
> Dada la relación entre cantidades fluentes, determinar la relación entre sus fluxiones.
> Solución
> Reordene la ecuación, que expresa la relación dada, acorde a las dimensiones de alguna de las cantidades fluentes, supongamos que sea x, y multiplique sus términos por una progresión aritmética y por $\dot{x}/x$. Realice esta operación separadamente para cada una de las cantidades fluentes. Después haga la suma de todos los productos igual a cero, y obtendrá la ecuación requerida.
>
> Ejemplo 1.
> Si la relación entre las cantidades fluentes x e y es: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; reordene primero los términos según x, después según y, para multiplicarlos en la siguiente manera:
> Multiplique: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = \ \ 0 \quad -y^3 + axy - ax^2 + x^3$
> Por: $(3\dot{x}/x) \cdot (2\dot{x}/x) \cdot (\dot{x}/x) \cdot (0) \quad (3\dot{y}/y) \cdot (\dot{y}/y) \cdot (0) \cdot (0)$
> Calcule: $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$
> La suma de los productos es: $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$

A continuación Newton fundamenta el método de las fluxiones, el cual justifica el procedimiento algorítmico utilizado. Para ello introduce el concepto de momento de las cantidades fluentes:

> “Los momentos de las cantidades fluentes (esto es, sus partes indefinidamente pequeñas mediante las cuales ellas son continuamente aumentadas, en intervalos indefinidamente pequeños de tiempo), son las velocidades de sus flujos o incrementos. Por lo tanto el momento de una cantidad cualquiera, x, es representada como el producto de la fluxión $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña o (esto es, por $\dot{x}o$) los momentos de las otras cantidades v, y, z, estarán representadas por $\dot{v}o, \dot{y}o, \dot{z}o$; porque $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$ están relacionados como $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.
> Puesto que los momentos, como $\dot{x}o, \dot{y}o$, son incrementos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y, mediante los cuales dichas cantidades son incrementadas en intervalos infinitamente pequeños de tiempo, se sigue que estas cantidades, x e y, después de cualquier intervalo infinitamente pequeño de

> tiempo, llegarán a ser $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$. Por lo tanto, la ecuación que expresa sin variaciones, en todo instante de tiempo, la relación entre las cantidades fluentes; expresará la relación entre $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ de la misma forma como lo hace entre x e y. Así, $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ pueden reemplazar a x e y en la ecuación que relaciona ambas cantidades.
> Sea una ecuación cualquiera dada, como: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, sustituyendo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$, se obtendrá: $x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0$.
> Ahora por hipótesis, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, por lo cual puede ser eliminado, y si los restantes términos son divididos por o, quedará: $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0$.
> Pero como o es supuesto que es infinitamente pequeño, para que pueda estar en la representación de los momentos de las cantidades, los términos que son multiplicados por él serán cero con respecto a los restantes. Por lo tanto los elimino, y lo que queda: $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$. Es lo que se obtenía anteriormente en el ejemplo 1. Se puede observar que no sólo los términos que son multiplicados por se anularán, sino también aquellos términos que son multiplicados por más de una dimensión de o”. (Newton, 1736, p. 24-25).

En la demostración de su método para calcular las fluxiones de una relación dada entre cantidades fluentes se pueden distinguir dos fases:

1. Una fase algebraica de reemplazo de las cantidades fluentes por las suma de las fluentes con sus respectivos momentos, donde se supone que las cantidades fluentes varían continuamente en el tiempo y que la ecuación que representa la relación entre las fluentes, la representa en todo instante de tiempo, por lo que también la representará si se realizan estos reemplazos. Esta fase termina con la reducción de términos y con la división de la ecuación por *o*, que representa un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.
2. En los términos resultantes de la fase primera, se consideran nulos todos aquellos donde aparecen múltiplos de potencias de *o*.

Es la segunda fase de este procedimiento general, y su justificación, lo que derivó en una fuerte crítica al método de Newton. Las críticas y el carácter perfeccionista de Newton, lo llevaron a reformular las bases de su método de las fluxiones, mediante dos lemas que presenta en la sección primera de los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. Con dichos lemas, en los cuales está implícita una preconcepción del concepto moderno de límite, Newton fundamenta el método de las fluxiones –que ahora es denominado 'método de las razones primeras y últimas'–.

Una preconcepción de límite en Newton

En el primer Lema del libro primero de sus *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, Newton establece:

> Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales. Si lo niegas, sean al final desiguales y sea su diferencia final D. Luego no pueden acercarse a la igualdad más que hasta una diferencia dada D. Contra la hipótesis. (Newton, 1726/2011, p. 157)

Analizando el lema anterior, y considerando tanto distintos contextos como diferentes estándares de rigor matemático, se puede apreciar una estrecha similitud conceptual en la forma de establecer la 'igualdad final' entre dos cantidades variables que tienden la una a la otra constantemente en el tiempo, y la definición formal del límite de una función real propuesta por Weirstrass más de dos siglos después.

Seguidamente Newton enuncia el Lema II (Figura 1):

> Si en una figura AacE comprendida entre las rectas Aa, AE, y la curva acE se inscriben varios paralelogramos Ab, Bc, Cd, etc., construidos sobre bases iguales AB, BC, CD, etc., y con lados Bb,Cc, Dd paralelos al lado Aa de la figura; y se completan los paralelogramos aKbl, bLcm, cMdn, etc., si entonces se disminuye la anchura de estos paralelogramos y se aumenta infinitamente el número de ellos: digo que las razones últimas que se dan entre la figura inscrita AKbLcMdD, la circunscrita AalbmcndoE y la curvilínea AabcdE son razones de igualdad. (Ibíd., p. 157)

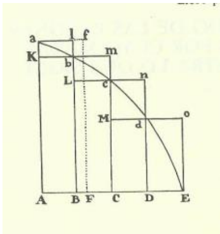

Figura 1. Razones últimas entre las figuras inscrita, circunscrita y la curva

En el escolio de la sección primera, se explica la razón de estos lemas y los conceptos de razón última y razón primera: [extracto del escolio]

> He adelantado estos Lemas para evitar tediosas y largas deducciones *ad absurdum* al estilo de los antiguos geómetras, pues las demostraciones se hacen más breves por el método de los indivisibles. Pero como la hipótesis de los indivisibles es más difícil y además, tal método se considera menos geométrico, he preferido reducir las demostraciones de las cosas que siguen a las sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, y a la suma y razones primeras de cantidades nacientes, esto es, a los límites de las sumas y de las razones… Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los Lemas precedentes.
>
> Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. Pero por la misma razón podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que se acaba su movimiento no tendría una velocidad última, puesto que dicha velocidad no sería última antes de que dicho cuerpo alcance el punto final de su movimiento y cuando le haya alcanzado ya no tendrá velocidad alguna. La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza,

> esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que se desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. De igual modo ocurre con la razón primera de cantidades nacientes, que es aquella con la que nacen… Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Esta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico.
>
> También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles… Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum*". (Ibíd., p. 169-171)

Se puede apreciar en el extracto anterior, que a pesar de que no se disponía ni de las herramientas conceptuales ni del simbolismo adecuado, Newton sí que disponía de una noción intuitiva de límite, de una visión de un continuo geométrico dinámico –donde las cantidades variables (fluentes) asumen valores en forma continua–, y de un vestigio conceptual de lo que sería en el futuro el álgebra de límites.

Estadio 4: La Idea de los Infinitesimales en los Desarrollos de Leibniz

Varias décadas después de la muerte de Pascal, Gottfried Wilhelm Leibniz, tuvo la oportunidad de acceder a los escritos originales de Pascal, en particular al *Tratado de los senos del cuarto de círculo*. El estudio de este tratado le conduciría a descubrir un elemento fundamental en su posterior desarrollo del cálculo diferencial. Pascal en el mencionado trabajo enuncia y demuestra la proposición siguiente:

> Sea ABC un cuarto de círculo [Figura 2], cuyo radio AB será considerado como eje, y el radio perpendicular AC como base; sea

> D un punto cualquiera del arco, desde el cual sea trazado el seno DI sobre el radio AC; y la tangente DE, en la cual se han tomado los puntos E donde se quiera, desde los cuales sean trazados las perpendiculares ER sobre el radio AC: digo que el rectángulo comprendido entre el seno DI y la tangente EE, es igual al rectángulo comprendido entre la porción de la base (encerrada entre las paralelas) y el radio AB. (Pascal, citado en Brunschvicg, 1945, p. 201)

Se desea demostrar que el área del rectángulo formado por los segmentos EE y DI, es igual al área del rectángulo formado por los segmentos RR y AB, es decir, EE:RR=AB:DI. El resultado es un paso intermedio en la demostración de un teorema sobre el seno de un ángulo. El triángulo EEK es un elemento de la geometría euclidiana utilizado por la geometría de los indivisibles para demostrar el teorema.

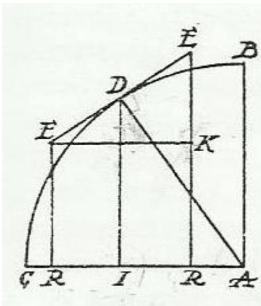

Figura 2. Triángulo característico de Leibnitz

Para Leibniz el triángulo EEK tiene una gran importancia: sus lados se pueden disminuir hasta hacerse infinitesimales, sin embargo, por la semejanza de éste con el triángulo DAI, el triángulo EEK sigue siendo un elemento a considerar, debido a la relación de semejanza. Aún más, la reflexión sobre este triángulo, induce a Leibniz a pensar que este triángulo formado por una parte infinitesimal de la tangente, y partes infinitamente pequeñas de las paralelas a la abscisa y la ordenada, puede ser referido como un elemento característico de una curva. La consideración de este ‘triángulo característico’ es un primer aporte de Leibniz al método de los indivisibles, que permitirá restituir en la aplicación del método, la homogeneidad dejada de lado por las consideraciones de Cavalieri. Nuevamente se podrá considerar una superficie como constituida por pequeñas superficies, una línea como formada por pequeñas líneas, o el cuerpo por corpúsculos.

La concepción de Newton, está marcada por lo práctico y por lo algorítmico. Por su parte, la invención de Leibniz tiene su origen en una concepción filosófica, como lo señala en una misiva dirigida a uno de sus corresponsales [carta a Fardella, 1696]:

> …Quizá no será inútil, que te ocupes algo en este nuestro análisis del infinito, derivado de la más profunda fuente de la filosofía, por el cual las matemáticas mismas se elevaron más allá de las cosas imaginables, en las cuales, casi exclusivamente, estaban hundidas hasta ahora la geometría y el análisis… (Leibniz, citado por Brunschvicg, 1945, p. 226)

En su concepción filosófica, Leibniz considera que hay una ciencia universal que trasciende a la aritmética, a la geometría y al álgebra, y de la cual podrían derivarse aquellas [carta a Bayle, 1698]:

> He insinuado en otra parte que hay un cálculo más importante que los de la aritmética y de la geometría, y que depende del análisis de las ideas. Este sería una Característica universal cuya formación me parece una de las tareas más importantes que podría emprenderse. (Ibíd., p. 227)

Como un resultado de esta ciencia de la 'Característica universal', se tiene un algoritmo conveniente para el trabajo con las nociones del cálculo diferencial e integral lo que haría, para Leibniz, tan innovador y fecundo el cálculo diferencial. El elemento algorítmico fundamental, en el desarrollo del cálculo infinitesimal por Leibniz, es el concepto de diferencial de una variable, para el cual establece reglas para operar con él: suma, multiplicación y división de diferenciales. Leibniz también hace uso de diferenciales de un orden *n* cualquiera. La definición dada de diferencial no hace uso de una noción explícita o implícita de límite, posición que la matemática moderna ha dejado de lado (Boyer, 1959) alineándose con la postura posterior de Cauchy, quien subordina dicho concepto al del límite, definiéndolo mediante la derivada.

En la fundamentación del cálculo, uno de los conceptos centrales usado por Leibniz es el continuo, y su composición. En su concepción del continuo y sus componentes se pueden distinguir tres momentos (Raffo, 2014):

1. El primer momento se sitúa en 1671, con su presentación de *Theoria motus abstract*, concibe el continuo como formado por infinitas partes dadas en acto, infinito actual, las partes del continuo son los

indivisibles. Leibniz, para probar la existencia de los indivisibles, asume tácitamente la realidad del movimiento (en contraposición a una de las paradojas de Zenón). Otra característica importante del continuo de Leibniz es que existen partes del continuo que son mayores que otras. Esta característica se mantendrá en el transcurso del tiempo en su pensamiento, lo que variará será su concepción de las partes que componen el continuo.

2. Un segundo momento, se sitúa en 1673 con la publicación *"De mínimo et máximo"*, en la cual niega la existencia de los indivisibles y afirma que el continuo está compuesto de partes infinitamente pequeñas.
3. Un tercer momento se manifiesta en la edición de un conjunto de textos unificados por el título *De summa rerum*; en los cuales se presenta un cambio en la concepción de la división del continuo y se niega la existencia de componentes últimos. Leibniz, no pudo finalmente elaborar una concepción definitiva del continuo y se le atribuye referirse a él como "el laberinto del continuo".

Estadio 5: Las Concepciones Pre-Formales del Límite

Hay un consenso prácticamente generalizado (Bell, 1949; Boyer 2013) sobre que los conceptos fundamentales del cálculo (función, límite, continuidad, diferenciación e integración) empezaron a ser elementos debidamente formalizados para un desarrollo deductivo del cálculo, con los trabajos de Cauchy en el siglo XIX. En relación con el tiempo transcurrido entre la fundación del cálculo y su posterior formalización, Bell (1949) plantea una interesante cuestión:

> ¿Cómo se las arreglaron los grandes analistas del siglo XVIII, los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, para obtener resultados consistentemente correctos en casi toda su obra tanto de matemática pura como aplicada? Lo que esos grandes matemáticos tomaron equivocadamente como razonamientos correctos en los comienzos del cálculo, se considera ahora universalmente como sin fundamentos. (p. 162)

Intentando responder este complejo interrogante este autor señala que en la historia de las matemáticas se ha dado frecuentemente el fenómeno de que la parte fundamental y aplicada de una teoría matemática se haya comprendido intuitivamente mucho antes de que se haya dispuesto una base de fundamentos teóricos consistentes de dicha teoría. Los matemáticos del siglo XVIII habían tratado infructuosamente de dar un fundamento sólido al cálculo infinitesimal, en particular al escurridizo concepto de infinitesimal. Asumir la existencia de los infinitesimales, implicaba reconocer que estos no podían cumplir la propiedad arquimidiana, de la geometría euclidiana, lo cual impedía su representación.

Entre los matemáticos que destacan en este esfuerzo de fundamentación, ocupan un lugar especial Euler y D'Alembert. Euler integró el cálculo diferencial y el método de las fluxiones en el Análisis, una rama más general de las Matemáticas (Boyer, 2013) que versa sobre el estudio de los procesos infinitos. Dos conceptos fundamentales de esta naciente disciplina son: función y continuidad.

D'Alembert se oponía a la posición de Euler sobre considerar los diferenciales como símbolos para indicar cantidades que se pueden considerar como cero, pero que su naturaleza las hace cualitativamente diferentes del cero. Para D'Alembert, la denominada *Metafísica del cálculo* había que encontrarla en la idea de límite. Es así como en el volumen 9 de la *L'Enciclopédie*, presenta una definición de límite:

> Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que una magnitud dada, tan pequeña como uno pueda suponer, sin embargo la magnitud que se aproxima no puede sobrepasar la magnitud a la cual ella se aproxima; si bien que la diferencia entre dicha cantidad y su límite es totalmente indeterminable. (D'Alembert, 1766, p. 542)

Se puede valorar la importancia de esta definición, a pesar de la falta de una simbología apropiada y de la imprecisión de los conceptos usados en ella –la aproximación a la primera cantidad, ¿Es con valores mayores o menores que ella? ¿Cómo se compara la diferencia entre la aproximación y la magnitud límite con la magnitud 'tan pequeña como uno pueda suponer'?, ¿Esta última expresión se refiere solamente a cantidades positivas?–. Dicha definición será un valioso antecedente respecto a la definición formal de límite elaborada por Weirstrass un siglo después.

D'Alembert prosigue su artículo con un ejemplo de límite y dos proposiciones sobre una incipiente álgebra de límites:

> "Por ejemplo, supongamos dos polígonos, uno inscrito y el otro circunscrito a un círculo, es evidente que uno puede multiplicar los lados tanto como quiera; en ese caso, cada polígono se aproximará

> más y más a la circunferencia del círculo, el contorno del polígono inscrito aumentará y el del circunscrito disminuirá; pero el perímetro o el contorno del primero no sobrepasará jamás la longitud de la circunferencia y el del segundo no será jamás más pequeño que esta misma circunferencia; la circunferencia del circulo es pues el límite del aumento del primer polígono y de la disminución del segundo.
>
> 1. Si dos magnitudes son el límite de una misma cantidad, estas dos magnitudes serán iguales entre sí.
> 2. Sea AxB el producto de dos magnitudes A, B. Supongamos que C sea el límite de la magnitud A y D el límite de la cantidad B; yo digo que CxD, producto de los límites, será necesariamente el límite de AxB…”. (Ibíd., p. 542)

En otro artículo sobre la noción de diferencial escrito para la *Encyclopedie*, D’Alembert (citado en Boyer, 2013, p. 567) señala: “la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación”.

En el mencionado artículo, D’Alembert se refiere a la obra *De quadratura curvarum* de Newton, interpretando las concepciones de Newton sobre ‘razones primeras y últimas’ como límites, y no como razón primera o última de dos cantidades que están ‘naciendo’ o ‘desvaneciéndose’ respectivamente (D’Alembert, 1752, p. 986).

En el primer cuarto del siglo XIX, con base en los trabajos matemáticos de Agustín Cauchy y Bernhard Bolzano, se consolida el proceso de fundamentación rigurosa de conceptos esenciales del cálculo diferencial e integral. Este camino de precisión y rigurosidad se basa en la aritmetización del concepto de límite (Pino-Fan, 2014). Cauchy en su “Cours d’Analyse” introduce las siguientes definiciones:

> Se llama cantidad variable aquella que uno considera que recibe sucesivamente muchos valores diferentes los unos de los otros, se llama en contrario cantidad constante toda cantidad que recibe un valor fijo y determinado. Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera de terminar de diferir tan poco como uno quiera, este último es llamado el límite de todos los otros. (Cauchy, 1833, p. 17)

Otro concepto fundamental en el cálculo, la continuidad, es también objeto de una revisión y redefinición. Las ecuaciones de propagación del calor, condujeron a Fourier a fórmulas análogas a las asociadas a la ecuación de las cuerdas vibrantes.

Fourier indicó que en la serie trigonométrica

$$f(x) = \begin{cases} a_1 senx + a_2 sen2x + \cdots \\ +\frac{1}{2}b_0 + b_1 cosx + b_2 cos2x + \cdots \end{cases},$$

los coeficientes pueden ser determinados mediante las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sennxdx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx$$

Vio que esta forma de determinación permanece aplicable aun cuando la función f(x) sea dada en forma totalmente arbitraria; sustituyó f(x) por una función de las llamadas discontinuas (de ordenada una línea quebrada para la abscisa x) y obtuvo así una serie que de hecho daba siempre el valor de la función”. (Riemann, 1854/2000, p. 46)

Este resultado indicaba que una función definida de tal manera que una determinación en un cierto intervalo de la variable no implicaba la determinación en otro intervalo, es representable por una serie trigonométrica. La generalidad que Fourier otorgaba a su resultado, más la suposición de la convergencia de la serie, provocó que la comunidad matemática lo sometiera a un meticuloso examen. De estas dificultades técnicas, extrajo Cauchy un problema teórico, tal como lo señala Lesbegue (1904, citado en Brunschvicg, 1945, p. 363):

…las dificultades que resultan de las investigaciones de Fourier, se presentan aun cuando no se utilicen más que expresiones muy simples, es decir que según el procedimiento empleado para dar una función ésta aparece como continua o no. Cauchy cita, como ejemplo, la función +x para x positivo, y –x para x negativo. Esta función no es continua, está formada por partes de dos funciones continuas +x y –x; pero por el contrario aparece como continua cuando se la escribe $+\sqrt{x^2}$.

De esta problemática surge una nueva definición de función continua. En vez de ser una propiedad de una función o de una curva tomada en su totalidad, pasa a ser una propiedad local de una función:

Sea f(x) un función de la variable x, y supongamos que para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite

> constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor x comprendido entre esos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α la función tendrá por incremento la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor x. La función f(x) permanecerá siendo continua con relación a x entre los límites dados, si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la propia función. Se dice también que la función f(x) es, en el entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esta variable, siempre que ella sea continua entre dos límites de x, aún muy próximos, que encierren el valor de que se trata. (Cauchy, 1821, p. 34-35).

En cuanto al concepto de infinito, Cauchy admitía solamente el infinito potencial. Un concepto central en su exposición del cálculo diferencial e integral fue el concepto de límite. Cauchy dedicó una parte apreciable de su trabajo a demostrar un resultado sobre un tipo especial de sucesiones (sucesiones de Cauchy y criterio de convergencia de Cauchy): una sucesión *Sn* converge a un límite si y sólo si la diferencia entre *Sp* y *Sq* para valores cualquiera de *p* y *q* mayores que *n* es menor en valor absoluto que cualquier valor dado, considerando *n* suficientemente grande. La condición necesaria de esta proposición sigue directamente de la definición de convergencia, pero la suficiencia (i.e., si la sucesión cumple la condición señalada entonces es convergente) requiere una construcción formal previa del sistema de los números reales en dónde exista previamente el supuesto límite.

Cauchy en su *Cours d'analyse* define un número irracional como el límite de una sucesión de números racionales. Esto no puede ser, porque si se define $\sqrt{2}$ como el límite de la sucesión: 1, 1.4, 1.41, 1.414,…, para probar la existencia del límite de esta sucesión se debe asumir, de acuerdo con las definiciones de límite y convergencia, la existencia de este número como previamente dado o definido (Boyer, 2013). Cauchy aparentemente no percibió esta circularidad en su definición de los números irracionales, que fue resuelta por los matemáticos posteriores a él, quienes entendieron que una fundamentación rigurosa del cálculo debía basarse en el sistema, convenientemente axiomatizado, de los números reales (aritmetización del análisis).

En relación con su definición del concepto de infinitésimo, se tiene:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable disminuyen indefinidamente, de manera tal que decrecen por debajo de todo número dado, esta variable se denomina un infinitesimal, o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero por límite. (Cauchy, 1833, p. 17)

Cabe destacar que muchos de los resultados obtenidos por Cauchy fueron obtenidos en forma independiente por otro gran matemático contemporáneo, Bernhard Bolzano. Las definiciones de conceptos como límite, convergencia, continuidad, y derivada realizada por ambos, registran una sorprendente semejanza. Bolzano también logró resultados notables que se adelantaron a su época, pero que no fueron suficientemente reconocidos por sus contemporáneos y fueron replanteados por matemáticos posteriores a él. Bolzano fue el primero en dar un ejemplo de una función continua en un intervalo pero no diferenciable en ningún punto. Varias décadas después, Weirstrass presentó otro ejemplo de función con la misma característica, atribuyéndosele a él este resultado. Así mismo, el criterio de convergencia de Cauchy, fue primeramente formulado por Bolzano (Boyer, 2013). Más fortuna tuvo con otro importante resultado del Análisis Matemático: Todo subconjunto infinito y acotado de $\mathcal{R}^k$ tiene un punto de acumulación en $\mathcal{R}^k$.Teorema hoy conocido como teorema de Bolzano-Weirstrass. Otro importante y original avance en Matemáticas, fue su trabajo con el concepto de infinito, él lo concibe como infinito actual y distingue el infinito de los números naturales del infinito de los números reales, adelantándose a las concepciones cantorianas.

Estadio 6: La Concepción Formal de la Noción de Límite

Es ilustrativo reproducir parte de la introducción del libro *Continuidad y números irracionales* (Dedekind, 1888/2014, p. 87):

> …Me encontraba entonces por vez primera,…, en la situación de tener que exponer los elementos del cálculo diferencial, y al hacerlo sentí más claramente que nunca la carencia de una fundamentación verdaderamente científica de la aritmética. En la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, y especialmente en la demostración del teorema que establece que toda magnitud que crece constantemente, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite, tuve que apoyarme en evidencias geométricas. Aun hoy considero extraordinariamente

> útil, desde el punto de vista didáctico, ese recurso a la intuición geométrica en una primera enseñanza del cálculo diferencial; me parece incluso indispensable si no se quiere perder un tiempo excesivo. Pero nadie negará que ese tipo de introducción en el cálculo diferencial no pueda tener ninguna pretensión de cientificidad… Se dice tan a menudo que el cálculo diferencial se ocupa de las magnitudes continuas, y sin embargo nunca se da una definición de esa continuidad, e incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones en la continuidad, sino que apelan con mayor o menor consciencia a representaciones que son geométricas o bien motivadas por la geometría, o se apoyan en teoremas que no han sido nunca demostrados de forma puramente aritmética.

En el desarrollo de su proyecto de aritmetización del cálculo infinitesimal, Dedekind procede a estructurar el conjunto de los números racionales como un cuerpo ordenado, en el cual se satisfacen las siguientes leyes:

> I. Si a>b y b>c, entonces a>c. Siempre que a, c sean dos números distintos (o desiguales) y que b sea mayor que uno de ellos y menor que el otro, queremos expresarlo,… diciendo: b está entre los números a y c.
>
> II. Si a y c son números distintos, existen siempre infinitos números b que están entre a y c.
>
> III. Si a es un número determinado, todos los números del sistema R se descomponen en dos clases, A1 y A2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A1 abarca todos los números a1 <a, la segunda clase A2 abarca todos los números a2 >a; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es o bien el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la división del sistema R en las dos clases A1 y A2 es tal que todo número de la primera clase A1 es menor que cada número de la segunda clase A2. (Ibíd., p. 90)

A continuación, Dedekind procede a relacionar las propiedades enunciadas anteriormente de los números racionales con las relaciones de lugar que se dan en los puntos de una línea recta cualquiera *L*:

> Si distinguimos las dos direcciones opuestas que en ella [la línea recta] existen como ‘izquierda’ y ‘derecha’, y si p y q son dos puntos distintos, entonces o bien p está a la derecha de q, y a la vez

> q a la izquierda de p, o bien inversamente q está a la derecha de p, y a la vez p a la izquierda de q. Es imposible un tercer caso si p y q son realmente puntos distintos. Con respecto a estas diferencias de lugar valen las siguientes leyes.
>
> I. Si p está a la derecha de q, y q a la derecha de r, entonces también p está a la derecha de r, y se dice que q está entre los puntos p y r.
>
> II. Si p y r son dos puntos distintos, hay siempre infinitos puntos q que están entre p y r.
>
> III. Si p es un determinado punto de L, todos los puntos de L se descomponen en dos clases, P1 y P2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase P1 abarca todos los puntos p1 que están a la izquierda de p, y la segunda clase P2 abarca todos los puntos p2 que están a la derecha de p; el punto p puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase. En cada caso, la descomposición de la recta L en ambas clases o partes, P1 y P2, es tal que todo punto de la primera clase P1 está a la izquierda de cada punto de la segunda clase P2. (Ibíd., p. 90)

Prosiguiendo con su desarrollo, Dedekind recuerda que a cada número racional se le puede asociar un punto de la recta y así establecer una correspondencia entre las leyes formuladas anteriormente para los racionales y las leyes propuestas para los puntos de la recta L. Pero a su vez, recuerda que existen infinitos puntos de una recta no asociados a ningún número racional, por lo cual, para representar aritméticamente las propiedades de una recta es necesario completar el cuerpo de los números racionales $\mathcal{R}$:

> Si ahora pretendemos, seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, los números racionales no bastan para ello, y por tanto es imprescindible refinar esencialmente el instrumento R…, mediante la creación de nuevos números tales que el dominio numérico adquiera la misma completitud…., la misma continuidad que la línea recta. (Ibíd., p. 91)

Dedekind también presenta la propiedad de la continuidad de la línea recta y su justificación, en estos términos:

> Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición, este corte de la recta en dos partes. La suposición de

> esta propiedad de la línea no es más que un axioma, mediante el cual introducimos la continuidad en nuestra idea de la línea. Si el espacio tiene una existencia real, sin duda no es necesario que sea continuo; innumerables propiedades suyas seguirían siendo las mismas aunque fuera discontinuo. Y si supiéramos con certeza que el espacio es discontinuo, sin duda nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, que lo hiciéramos continuo…; pero esta complexión consistiría en una creación de individuos-punto, y habría de realizarse de acuerdo con el principio anterior. (Ibíd., p. 93)

Continuando con su exposición, Dedekind indica la manera de completar el dominio discontinuo de los números racionales $\mathcal{R}$, para obtener uno continuo. El concepto central para lograr esto es denominado cortadura: "…dada cualquier partición del dominio $\mathcal{R}$ en dos clases A_1 y A_2, que sólo tienen la propiedad característica de que todo número a_1 de A_1 es menor que todo número a_2 de A_2, queremos denominar a tal partición una cortadura y denotarla mediante (A_1 , A_2)" (Ibíd., p. 93). Con base en este concepto se muestra que todo número racional produce una cortadura, pero que también existen infinitas cortaduras que no están producidas por un número racional. Este resultado, identifica tanto la discontinuidad del dominio de los racionales, como el camino para obtener un dominio numérico completo –el conjunto de los números reales $\mathcal{R}$– que satisfará la propiedad de continuidad:

> En esta propiedad de que no todas las cortaduras son producidas por números racionales consiste la incompletitud o discontinuidad del dominio R de todos los números racionales. Ahora, cada vez que encontramos una cortadura (A1 , A2) que no es producida por ningún número racional, creamos un nuevo número irracional α, que consideramos completamente definido mediante esa cortadura (A1 , A2) ; diremos que el número α corresponde a esa cortadura, o que produce esa cortadura. Por tanto, a partir de ahora corresponde a cada cortadura un y sólo un número racional o irracional determinado, y consideramos que dos números son diferentes o desiguales siempre y sólo cuando corresponden a cortaduras esencialmente diferentes. (Ibíd., p. 95)

Constituido el conjunto de los números reales, se establece una relación de orden en ellos que cumple ciertas propiedades que caracteriza este conjunto como bien ordenado:

> El dominio $\mathcal{R}$ de todos los números reales constituye un dominio bien ordenado de una dimensión; lo único que se quiere decir con esto es que se cumplen las siguientes leyes:
>
> I. Si α>β y β>γ, entonces también α>γ. Diremos que el número β está entre los números α y γ.
>
> II. Si α y γ son dos números diferentes, hay siempre infinitos números distintos β que están entre α y γ.
>
> III. Si α es un número determinado, todos los números del sistema $\mathcal{R}$ se descomponen en dos clases $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase $\mathfrak{A}_1$ abarca todos los números $\alpha_1 < \alpha$, la segunda clase $\mathfrak{A}_2$ abarca todos los números $\alpha_2 < \alpha$; el propio número α puede asignarse a voluntad a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cualquier caso la descomposición del sistema $\mathcal{R}$ en ambas clases $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ es tal que todo número de la primera clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número de la segunda clase $\mathfrak{A}_2$, y decimos que esta descomposición ha sido producida por el número α". (Ibíd., p. 98)

Finalmente, se prueba que el conjunto de los números reales además de las propiedades señaladas anteriormente, posee la propiedad de continuidad:

> …el dominio $\mathcal{R}$ posee también continuidad, es decir que se cumple el siguiente teorema: Si el sistema $\mathcal{R}$ de todos los números reales se descompone en dos clases $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ tales que todo número α_1 de la primera clase es menor que todo número α_2 de la segunda clase, existe un y sólo un número α mediante el cual se produce esa división. (Ibíd., p. 98)

El trabajo de construcción del conjunto de los números reales no sólo fue abordado por Dedekind, sino también por otros dos matemáticos alemanes: George Cantor y Karl Weirstrass. Dedekind fue contemporáneo de Cantor y Weirstrass, con quienes se reunió a menudo y compartió correspondencia sobre este tema y muchos otros de la teoría de conjuntos. En su construcción de los números reales, Weirstrass los denomina magnitudes numéricas y considera a los irracionales como sumas de series compuestas por números racionales. Sin embargo, no define un número real como la suma de una serie de números racionales, porque esto supondría, a priori, la convergencia de la serie.

La construcción de los números reales por Cantor, alumno de Weirstrass, se basa en el concepto de sucesiones fundamentales –sucesiones de Cauchy– y en la introducción del importante concepto de punto de acumulación o punto límite. Cantor utiliza conceptos estrechamente relacionados con los usados por su maestro: a toda serie se le puede hacer corresponder una sucesión, la formada por las sumas parciales de la serie y toda serie sumable o convergente es una sucesión de Cauchy.

Las construcciones de los números reales de Cantor y Weirstrass se basan en conceptos tradicionales del análisis: sucesiones y series, en cambio, la de Dedekind utiliza como idea central el concepto de conjunto. En la aplicación de su teoría sobre los números reales al análisis infinitesimal, Dedekind utiliza una definición de límite muy cercana a la propuesta por Weirstrass:

> Decimos que una magnitud variable x, que recorre sucesivamente determinados valores numéricos, se aproxima a un valor límite fijo α cuando en el curso del proceso x viene a quedar finalmente entre cualquiera dos números entre los cuales se encuentra el propio α, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia x-α tomada en valor absoluto desciende finalmente por debajo de cualquier valor dado distinto de cero. (Ibíd., p. 101)

Aunque como se ha señalado, el trabajo de formalización y desarrollo sistemático del cálculo diferencial e integral, empieza con Cauchy y su definición de límite, los vacíos y carencias conceptuales en temas tales como la construcción de los números reales, la continuidad y completitud geométrica y numérica con las relaciones entre ella, además del insuficiente desarrollo lógico-formal, hacían que la comunidad matemática buscase una definición rigurosa pero a la vez suficientemente operativa del concepto de límite. Esta formulación fue presentada y usada por Weirstrass en sus clases, y recogida por uno de sus alumnos, Heine, en una de sus publicaciones de 1872, Elemente: “Si dado cualquier ε, existe un η_0, tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x=x_0$”. (Boyer, 2013, p. 696).

La definición de Weirstrass traduce en operaciones aritméticas sobre cantidades finitas, ideas asociadas al concepto de límite como: ‘aproximarse a un valor límite dado’, ‘incremento infinitamente pequeño de la variable’, ‘el valor numérico de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de α’, etc. En esta formulación aritmética, lógico-simbólica, adquieren rigor y se precisan estas percepciones del límite. Pero más allá de la importancia particular de esta definición, para el cálculo diferencial e integral, en ella hay implícitas posiciones transcendentes con respecto a temáticas esenciales en la fundamentación de las matemáticas: a) el concepto de infinito; b) la construcción de los números reales; c) la continuidad geométrica y la completitud numérica; y d) la estructuración de las matemáticas como un sistema deductivo euclidiano, con base en la axiomatización de los números naturales.

Estadio 7: Generalizaciones de la Noción de Límite

La definición de Weirstrass del límite de una función real de una variable, se generalizó con base en los elementos operacionales usados en ella –e.g., distancia y desigualdades entre reales–, y conceptos como completitud y punto de acumulación. Los conceptos de distancia y completitud llevaron a las definiciones de espacio métrico y de conjunto perfecto (Rudin, 1966). Definiendo sucesión convergente y sucesión de Cauchy, se llega al importante concepto de espacio métrico completo (Ibíd.), el cual es una generalización de la propiedad de completitud del cuerpo de los números reales.

Una generalización del concepto de espacio métrico, son los “espacios topológicos” (Dugundji, 1989, p. 62). A todo espacio métrico se le puede asociar una topología y por lo tanto, con esta topología, considerarlo como un espacio topológico. La propiedad inversa no es cierta, no todo espacio topológico es metrizable. Considerando un espacio métrico, como un espacio topológico, la definición de límite en un espacio métrico se puede expresar en forma conjuntista usando los elementos de un espacio topológico.

La idea de límite en el Análisis Matemático aparece en variadas formas, y tradicionalmente son tratadas en formas separadas, por ejemplo, el límite de las sucesiones en un espacio métrico se considera separado del límite de una función definida de un espacio métrico a otro. Sin embargo, un tratamiento unificado del límite se puede desarrollar en términos de una nueva definición: el “concepto de filtro” (Burkill y Burkill, 1970, p. 100).

Reflexiones Finales

En esta indagación histórica en busca de la génesis y desarrollo epistemológico del concepto de límite, se observa que éste emerge de la relación entre varios conceptos matemáticos: el infinito, el continuo, aproximación, función y número real. Esta relación conceptual se va desarrollando gradualmente en un contexto multidisciplinario creciente, de disciplinas como: la geometría, la aritmética, el álgebra, la geometría analítica, el análisis matemático, la teoría de conjuntos y la lógica matemática. El origen del límite se encuentra en la Grecia antigua con el problema de las magnitudes inconmensurables y la consiguiente crisis de fundamentos de la matemática griega. La solución generada por los griegos, mediante la redefinición del concepto de proporción, condujo a una concepción geométrica del continuo, fuertemente influenciada por lo visual, aunque disociada de una correspondencia uno a uno con el dominio numérico; pero que permitió la creación de un nuevo dominio geométrico donde se incorporaron las magnitudes inconmensurables, con la consiguiente operacionalización de ellas.

Otra herramienta desarrollada para el trabajo con las magnitudes inconmensurables fue el método de exhaución. Este método incluye elementos que constituyen una estructura conceptual que se puede considerar como antecesora a la definición de límite propuesta por Weirstrass.

En definitiva, la emergencia del cálculo diferencial e integral, no fue un proceso lineal, ni tampoco estuvo circunscrito a lo algorítmico, ni a lo 'propiamente matemático'. En él intervienen también, concepciones filosóficas y otras disciplinas. En su fundamentación, y en particular en la formalización del concepto de límite, hay distintos caminos de formalización –Dedekind, Cantor, Weirstrass–, pero matemáticamente equivalentes.

Esta conclusión tiene un gran valor para la Didáctica de las Matemáticas, en tanto que muestra que hay variedad de caminos alternativos para la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. En la actualidad conceptos como el continuo y el infinito, no tienen una determinación conceptual agotada, y tampoco se puede esperar una determinación futura absoluta de ellos. La Matemática se crea, se inventa y se contrasta la teoría con sus desarrollos, a la manera que señala Lakatos (1987), o como indica Chaitin (1994): el valor de un axioma está dado más que por el grado de verosimilitud, por su grado de conveniencia. Lo cual incide también en el grado de libertad que se puede conferir a la Didáctica de las Matemáticas en la presentación de los contenidos matemáticos (matemática institucional) en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de investigación Fondecyt de iniciación Nº 11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

Referencias

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Aristóteles (2012). *Obras selectas: Metafísica, Ética (la gran moral).* Madrid: Edimat Libros. (Trabajo original s.f.).

Hawking, S. (Ed). (2013). *Dios creo los números* (M. Ortiz, P. González, J. Vaqué, Trads.). Barcelona, España: CRÍTICA.

Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas.* México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications.

Boyer, C. (2013). *Historia de la matemática* (M. Martínez, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Brunschvicg, L. (1945). *Las Etapas de la Filosofía Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Lautaro.

Burkill, J. C., & Burkill, H. (1970). *Mathematical Analysis.* London, Great Britain: Cambridge University Press.

Cauchy, M. A. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale.

Cauchy, M.A. (1833). *Résumés Analytiques.* Turin: De l'imprimerie royale.

Chaitin, G. (1994). Aleatoriedad en aritmética y la declinación y caída del reduccionismo en matemáticas puras. En J. Cornwell (Ed.), *La Imaginación de la Naturaleza. Las Fronteras de la Visión Científica* (J. Estrella, Trad.). Cambridge, EE.UU.: Editorial Universitaria.

Collette, J. (1993). *Historia de las Matemáticas II* (3ª ed. en castellano). Madrid: Siglo XXI.

D'Alembert, J. (1751). *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences des Arts et des Métiers* (Vol. 4, pp.985-989). Paris, France: Boiasson, David, Le Breton, Durand.

D'Alembert, J. (1766). *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences des Arts et des Métiers* (Vol. 9, pp.542). Paris, France : Boiasson, David, Le Breton, Durand.

Dedekind, R. (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática* (J. Ferreiros, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial. (Traducción del trabajo original publicado en 1888).

Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno* (E. Linés, Trad.). Zaragoza, España: Editorial Reverté.

Dugundji, J. (1989). *Topology*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Publishers.

Euclides (2007). *Elementos* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid: Gredos. (Traducción del trabajo original, s.f.)

González, M. T., & Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada, España: Universidad de Granada.

Lakatos, I. (1987). *Matemáticas, ciencia y epistemología* (D. Ribes, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series* (Translated from the Author's Latin original by John Colson). London: Henry Woodfall.

Newton, I. (2011). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (E. Rada, Trad.). Madrid: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1726).

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Raffo, F. (2014). El laberinto del continuo del joven Leibnitz y la paradoja de Aquiles y la tortuga. *Revista de Filosofía y Teoría Política,* 45, 1-22.

Riemann, B. (2000). *Riemanniana Selecta. Edición y Estudio Introductorio de José Ferreirós*. Madrid, España: Consejo superior de investigaciones científicas. (Trabajo original publicado en 1854).

Rudin, W. (1966). *Principios de Análisis Matemático* (2ª Ed., M. Baratech, Trad.). Madrid, España: Ediciones del Castillo.
Zellini, P. (2004). *Breve historia del infinito* (J. Martín, Trad.). Madrid, España: Ediciones Siruela.

Iván Medrano es estudiante de es estudiante del Programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Luis R. Pino-Fan es Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Profesor-Investigador del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Dirección de Contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: Calle Lord Cochrane 1039, Osorno, Chile. **Email**: luis.pino@ulagos.cl