REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes

Walter F. Castro[1], John D. Martínez-Escobar[2], y Luis R. Pino-Fan[3]

1) Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
2) Colegio Montessori, Medellín, Colombia
3) Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile

Date of publication: June 24th, 2017
Edition period: June 2017-October 2017

To cite this article: Castro, W.F., Martínez-Escobar, J.D., & Pino-Fan, L.R. (2017) Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: Análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT*, *6*(2), 164-191. doi: 10.4471/redimat.2017.1981

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.1981

REDIMAT, Vol. 6 No. 2 June 2017 pp. 164-191

Levels of Algebrization of the School Mathematics Activity: Text Book Analysis and Students Difficulties

Walter F. Castro
Universidad de Antioquia

John D. Martínez-Escobar
Colegio Montessori, Medellin

Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

(*Received: 24 February 2016; Accepted: 11 May 2017; Published: 24 June 2017)*

Abstract

The introduction of early algebra in the school curriculum is a topic that was proposed two decades ago as a result of manifold investigations. Such introduction faces many obstacles; one of them refers to both the type of tasks and characteristics that should be introduced gradually and systematically. This paper contrasts the algebra levels proposed in a research to the algebraic characteristics found in a collection of primary mathematics books. The results point that the algebra levels are appropriate to assign algebraic characteristics to the mathematic tasks, and that they predict some algebraic activity in the children's solutions; however, the variety of tasks proposed in textbooks and the practices that children could perform are to ample and the levels do not account for them all.

Keywords: Early algebra, algebra levels, mathematis tasks, teacher training

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.1981

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

REDIMAT, Vol. 6 No. 2 Junio 2017 pp. 164-191

Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes

Walter F. Castro
Universidad de Antioquia

John D. Martínez-Escobar
Colegio Montessori, Medellín

Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

(*Received: 24 Febrero 2016; Accepted: 5 Mayo 2017; Published: 24 Junio 2017)*

Resumen

La introducción del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles educativos es un tema que se ha propuesto desde hace casi dos décadas como resultado de diversas investigaciones. Dicha introducción en el currículo escolar se encuentra con diferentes obstáculos. Este documento contrasta niveles de algebrización tanto en las tareas propuestas en una colección de cinco libros de texto, usados en la primaria, como con los desempeños de niños cuando resuelven tareas algebraicas propuestas en tal colección. Los resultados obtenidos señalan que, si bien los niveles son útiles para asignar grados de algebrización a las tareas propuestas en la colección, y predicen cierta actividad algebraica desarrollada por los niños, la variedad de tareas en los textos y las prácticas que podrían realizar los niños son muy amplias y los criterios no dan cuenta de ellas.

Palabras clave: Álgebra elemental, niveles de algebrización, tareas matemáticas, formación de profesores

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.1981

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha dado origen a muchas investigaciones en el campo de Didáctica de las Matemáticas, las cuales han evidenciado las dificultades de los alumnos en diversos aspectos, tales como el uso del signo igual, problemas de palabras, solución de ecuaciones lineales, equivalencia de expresiones algebraicas, modelación; entre otros. Otras investigaciones (Van Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002; 2003) han resaltado las dificultades de los maestros tanto para abordar la solución de tareas algebraicas como para promover la enseñanza del álgebra (Blanton & Kaput, 2005) y para remediar las dificultades de aprendizaje por parte de los alumnos.

Kaput (2000) hizo una propuesta denominada 'algebra for all' en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. Diversas propuestas curriculares (NCTM, 2000; RS/JMC, 1997) proponen desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros grados de educación primaria (Cai & Knuth, 2011).

Desde que la propuesta de inclusión curricular del razonamiento algebraico en la escuela primaria interesó a la comunidad de investigadores (Davis, 1985; 1989), se han adelantado estudios en relación con el desempeño de los niños (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005; Carraher, & Schliemann, 2007) cuando trabajan con actividades matemáticas definidas como algebraicas, y al desempeño de los profesores para reconocer y promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños durante la actividad matemática (McGowen & Davis, 2001). La hipótesis de que una introducción temprana al razonamiento algebraico elemental es conveniente para disminuir las dificultades que los estudiantes manifiestan en la transición desde la aritmética hacia el álgebra, es coherente con algunos estudios longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Strother, 2011; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2012), cuyos resultados alientan la iniciación de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria.

Una de las dificultades para la introducción temprana del razonamiento algebraico elemental, corresponde a decidir qué ha de entenderse por álgebra y cuáles deben ser los tipos de tareas algebraicas que han de introducirse paulatina y sistemáticamente en los programas de estudio para favorecer tanto el reconocimiento como la promoción del razonamiento algebraico por parte de los profesores. Para la implementación de tal introducción temprana, parece indicado proponer *niveles de algebrización* (Bolea, Bosch

& Gascón, 2001; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014) para orientar a los profesores sobre las características algebraicas que deberían ser motivo de promoción y reconocimiento desde los primeros grados de escolaridad.

Godino, Castro, Ake y Whilhelmi (2012) formulan una propuesta sobre la naturaleza del algebra escolar, mientras que Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) publicaron una propuesta de niveles de algebrización para la actividad matemática escolar. Dichos niveles se proponen para la formación de futuros profesores de escuela elemental, con la finalidad de proporcionar herramientas que les permitan conocer las características del razonamiento algebraico elemental.

Conviene diseñar una propuesta de niveles de algebrización que no sólo señale posibles niveles progresivos escolares de algebrización, sino que ayuden a diseñar tareas con grados progresivos de algebrización a lo largo de la educación primaria. No obstante, varios interrogantes surgen frente a la propuesta de utilizar niveles de algebrización para orientar la introducción curricular del razonamiento algebraico en la escuela elemental. El primer interrogante refiere a la formación que los maestros tienen para reconocer las características algebraicas presentes y emergentes en las tareas matemáticas. Diversos estudios realizados con profesores en formación (Stephens, 2008) y con maestros activos (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007) informan sobre las dificultades que tienen los docentes para reconocer al álgebra como ‘forma de pensamiento’, opuesto a una lista de procedimientos a seguir.

El segundo interrogante se vincula con la existencia de niveles progresivos de algebrización en la literatura. Se encuentra que sólo Godino et al. (2014) proponen niveles de algebrización específicos que han sido ampliados a la educación secundaria (Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchagaray y Lasa, 2015), para ayudar a profesores en formación a reconocer la actividad algebraica en tareas desde el primer grado hasta quinto grado, iniciando con la aparición gradual de características de la actividad algebraica a lo largo de la educación primaria.

En el presente trabajo se investiga la factibilidad de extender los niveles de Algebrización propuestos por Godino et al., (2014) para ser usados para valorar la actividad algebraica tanto en libros de texto como en las tareas desarrolladas por niños. La pertinencia de una extensión de estos niveles está avalada por el hecho de que después de muchos años de investigación sobre la introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, no existe una propuesta que oriente a los profesores de matemáticas acerca de la introducción gradual y sistemática del razonamiento algebraico en dicho nivel. Las eventuales ventajas de una propuesta de introducción de actividad matemática gradual que permita introducir, reconocer y promover características de naturaleza algebraica, radican en el uso que pueden hacer los profesores para la selección pertinente de tareas, el diseño instruccional y promover la actividad matemática de los niños.

Por tanto, en esta investigación se propone utilizar los niveles de razonamiento algebraico propuestos por Godino et al. (2014) para: 1) Estudiar el carácter algebraico de tareas matemáticas de los cinco libros de texto de matemáticas usados en una institución educativa privada colombiana; 2) Diseñar, con base en los niveles de algebrización propuestos por dichos autores, una prueba para ser aplicada a una muestra de niños en cada uno de los cinco grados de primaria de una institución educativa; y 3) Valorar la correspondencia entre los niveles de razonamiento algebraico elemental y los desempeños (actividad matemática) de los niños de escuela primaria, cuando resuelven tareas correspondientes a cada uno de los niveles.

Así, se pretende responder a tres preguntas: ¿Los niveles propuestos por Godino et al. (2014), favorecen la identificación y caracterización de tareas de naturaleza algebraica propuestas en libros de texto? ¿Los niveles se corresponden con los desempeños de niños de escuela elemental? ¿Los niveles predicen la actividad algebraica puesta en juego por los niños?

En los siguientes apartados se presentan los niveles de algebrización (Godino et al., 2014); posteriormente se indica cómo se usaron los niveles de algebrización para asignar carácter algebraico de las tareas matemáticas propuestas en una colección (EnVision, 2012); a continuación, se muestran y discuten los resultados de la prueba para los grados primero, tercero y quinto. La prueba se ha conformado con tareas tomadas de los libros de texto y a las cuales se les atribuyó un nivel de algebrización según los niveles propuestos por Godino et al. (2014). Se concluye con una sesión de comentarios.

La Propuesta de Niveles de Algebrización

Una tarea matemática es considerada de *naturaleza algebraica* en tanto que exhiba algunas características algebraicas atribuidas por el maestro y que tales características sean utilizadas por los estudiantes para resolver la tarea. Godino et al., (2014) proponen características que permiten definir distintos niveles o grados de algebrización en tareas propuestas en el currículo matemático en la escuela primaria. Vale resaltar que "el nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro" (Godino et al., 2014, p. 206).

Así, asignamos niveles a tareas tomadas de una colección de libros y luego se contrastan los niveles asignados con las respuestas de los niños a tales tareas.

A continuación, se transcriben los niveles de razonamiento algebraico elemental para referencia del lector.

Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0)

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización." (Godino et al., 2014, p. 9)

Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1)

> Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2)

> Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{C}$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $\mathrm{Ax} \pm \mathrm{B} = \mathrm{Cx} \pm \mathrm{D}$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Contexto de Estudio y Metodología

La investigación fue desarrollada en una institución educativa, de carácter privado, que atiende a una población de 1100 estudiantes (de primer grado hasta undécimo grado) pertenecientes a los estratos[1] 4, 5 y 6 del área metropolitana de la ciudad de Medellín, Colombia. La institución brinda educación bilingüe desde pre-escolar hasta undécimo grado, que incluye la enseñanza del inglés como segunda lengua y la instrucción en lengua inglesa en matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales. La propuesta de bilingüismo se apoya en libros de texto en inglés. En el caso de matemáticas, la colección de libros para la básica primaria es EnVision (2012), que ha sido usada durante tres años consecutivos.

La investigación se desarrolló en dos fases, durante la primera se estudiaron todos los ejercicios propuestos en los libros de texto, y se agruparon en cuatro bloques en correspondencia con los cuatro niveles de algebrización. Inicialmente se agruparon con base en las características algebraicas percibidas en su enunciación, posteriormente se resolvieron todos y se determinaron las características de naturaleza algebraica, presentes y emergentes en las tareas. Para efectuar la asignación de características algebraicas se usaron los niveles de algebrización. Posteriormente se seleccionaron aleatoriamente tareas para ser incluidas en cinco pruebas que serían aplicadas en cada uno de los grados de primaria.

Durante la segunda fase de la investigación, se diseñó una prueba piloto con tareas escogidas de manera aleatoria (Pino-Fan & Font, 2015) que se envió a expertos. Posteriormente se aplicó la prueba piloto a una muestra de estudiantes de cada uno de los grados escolares. A partir del informe de los expertos, y de las respuestas dadas por los niños en la prueba piloto, se configuró el cuestionario definitivo. Los niños que participaron en la prueba piloto no fueron incluidos en la aplicación de la prueba final.

El cuestionario se construyó mediante tareas no modificadas, tomadas de los libros de texto. Para esta investigación se consideró pertinente definir *tarea matemática* como el enunciado junto con sus diversas preguntas (ítems) según se propone en la colección de los libros de texto. Se debe resaltar que los niños no fueron instruidos en la solución de tareas de razonamiento algebraico elemental.

Para efectos de este estudio, se asumió a priori –con base en los resultados de la prueba piloto– que los niveles de algebrización propuestos se corresponden con los cinco grados de educación primaria. De esta forma, para cada grado escolar, se incluyeron tareas correspondientes a un nivel de algebrización y a niveles de algebrización superior e inferior. Por ejemplo, para el segundo grado de educación primaria se incluyeron tareas de los niveles de algebrización cero, uno y dos.

El cuestionario fue contestado por 50 niños, 10 por cada grado escolar. Una vez que los niños resolvieron las tareas, se efectuó un análisis cognitivo de las soluciones buscando elementos de carácter algebraico propuestos en las definiciones de cada uno de los cuatro niveles de algebrización. Se trabajó con 60 niños, pues fueron aquellos a quienes sus tutores concedieron permiso para participar en la indagación. Finalmente se informa sobre 50 alumnos pues diez niños no concedieron entrevistas. Se realizaron entrevistas semiestructuradas (Ginsburg, Kossan, Schwartz & Swanson, 1983) individualizadas para cada alumno, con el fin de profundizar y establecer de forma detallada los elementos de naturaleza algebraica usados por los niños en sus soluciones. Dichas entrevistas fueron audio-grabadas.

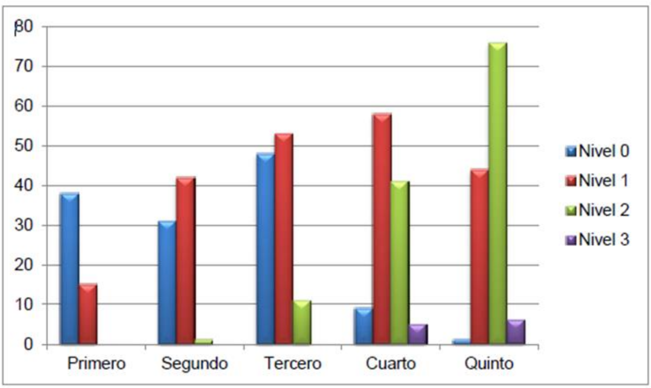


Figura 1. Cantidad de tareas de naturaleza algebraica en los libros de texto

Finalmente, para completar la información y para triangular los análisis cognitivos de las soluciones dadas por los niños, las respuestas tanto de las pruebas como de las entrevistas fueron analizadas por dos investigadores de manera independiente. Los datos y ejemplos presentados en este artículo se han seleccionado de manera que sea posible evidenciar las diferentes formas de solución de las tareas dadas por los niños. Las soluciones de los niños se valoran cuantitativamente de acuerdo con la escala que considera respuestas *incorrectas*, *parcialmente correctas* y *correctas*.

Se clasificaron todas las tareas propuestas en la colección de libros de texto EnVision (2012) para primaria, según los niveles de algebrización propuestos por Godino et al., (2014). Una vez realizada la clasificación, se determinó la cantidad de tareas de naturaleza algebraica atribuida en cada capítulo del libro, para los cinco libros de texto. La Figura 1 muestra la cantidad de tareas de naturaleza algebraica, por grado, según los niveles de algebrización. Se aprecia que los niveles propuestos aparecen gradualmente en cada uno de los grados desde el primero hasta el tercero, agrupados en niveles progresivos de algebrización.

Se observa la presencia sostenida del nivel cero de algebrización con mayor frecuencia en los primeros grados de la primaria y menor frecuencia en el grado cuarto y quinto. Algo similar sucede con el nivel Uno, su presencia desde primero hasta cuarto grado aumenta progresivamente hasta disminuir en quinto grado, donde las actividades que suponen un nivel 2 de algebrización ganan presencia. El nivel 2, en el cual se inicia el uso de simbología algebraica para representar incógnitas y variables, aparece de forma incipiente en segundo grado hasta tener la mayor frecuencia en quinto grado. Finalmente, el nivel 3 aparece sólo hasta cuarto grado y se sostiene en quinto grado, ambas apariciones con baja frecuencia en comparación con los otros niveles en cada grado.

Los resultados obtenidos permiten concluir que los niveles de Algebrización propuestos por Godino et al., (2014) son buenos predictores de los niveles de algebrización asignados, por grados, para las tareas matemáticas en la colección de libros de texto. Se encuentra además que existe una correspondencia creciente entre los niveles de algebrización (cuatro) con los grados escolares (cinco).

Resultados de la Aplicación de las Pruebas

A continuación, se discuten los resultados obtenidos de la aplicación de las pruebas para los grados primero, tercero y quinto. Por razones de espacio no se informa sobre los otros dos grados. Para cada grado, se presenta una tabla con el nivel algebraico asignado a cada tarea, y se muestran los resultados según la escala *respuestas incorrectas (R-I)*, *parcialmente correctas (R-PC)* y *correctas (R-C)*. Posteriormente se muestran las tareas y se discute sobre las soluciones de los niños y su relación con los niveles de algebrización.

Prueba para el Primer Grado

La Tabla 1 muestra las tareas incluidas en la prueba para el primer grado de educación primaria.

Tabla 1
Porcentajes de respuesta para la prueba de primer grado

	Numeración de las tareas	% de incorrectas	% de parcialmente correctas	% de correctas
Nivel Cero	1	0	10	90
	2	0	10	90
	3	10	20	70
	5	20	0	80
	6	20	30	50
	7	50	10	40
	8	80	10	10
Nivel Uno	4	10	30	60
	9	20	0	80

	10	60	0	40

La prueba incluye siete tareas de nivel cero y tres tareas de nivel uno. Las tareas 1, 2, 3 y 5 de nivel cero, tuvieron respuestas correctas por encima del 50%. Las preguntas 6 y 7, de nivel cero, tuvieron porcentajes del 50% y 40% de respuestas acertadas. La pregunta 5 tuvo 80% de respuestas correctas, y corresponde a una tipología muy estudiada de problemas aritméticos (Castro, Rico & Castro 1995).

La Figura 2 muestra las tareas de nivel cero en la prueba para primer grado.

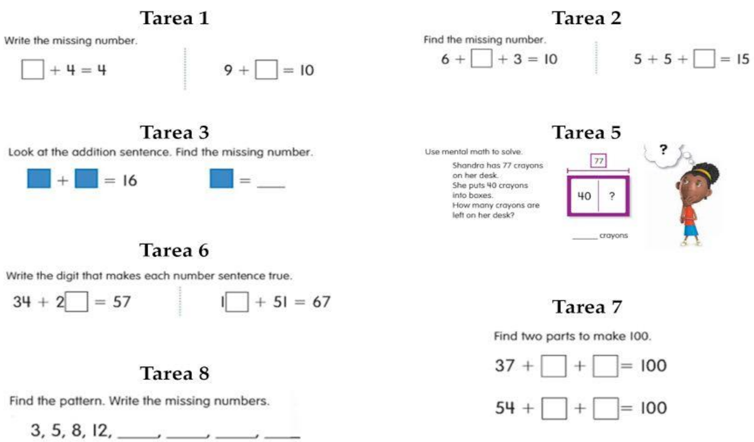


Figura 2. Tareas de nivel cero para grado primero.

Las preguntas 1, 2, 3 y 5, abordan el tema de sentencia numérica; la pregunta 6 versa sobre una sentencia numérica donde se requiere conocer el sistema posicional; la pregunta 7 requiere de la solución de una sentencia numérica con dos valores; y la pregunta 8 requiere encontrar una regla de asignación. La tarea 5 tuvo 80% de respuestas correctas. En la tarea 6 se requiere que el estudiante escriba un número para que la sentencia numérica sea correcta.

Una de las dificultades que los estudiantes manifestaron se refiere a la sintaxis que vincula el número conocido con el número desconocido, pues no es claro si se trata de notación multiplicativa o notación posicional. Con base en las respuestas de los estudiantes se aprecia que su interpretación se decanta por la notación posicional. La sintaxis de las expresiones matemáticas suele ser fuente de dificultades y errores para los estudiantes (MacGregor & Stacey,1997). La tarea 7 presenta una ecuación con dos incógnitas, lo que supone encontrar o proponer un número solución y descomponerlo para ubicar los dos sumandos en los espacios correspondientes, o poner un número y buscar el otro, o utilizar la propiedad modulativa. Este tipo de preguntas resultó ser de dificultad alta para los niños, dado que no suelen recurrir a la descomposición numérica o no reconocen las propiedades numéricas.

Cuatro niños utilizaron la propiedad modulativa para dar respuesta al problema, mientras que diez afirmaron que 'no se puede' en referencia a que los números que se deben ubicar son iguales. Los niños consideran: 'mismo cuadro, mismo número'. Si bien la tarea involucra símbolos "…que refieren a un valor desconocido… [que] se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares" (Godino et al., 2014; p. 207), la dificultad se vincula con la semántica asociada, por los niños, a los símbolos más que a las operaciones.

En una de las entrevistas en pareja, uno de los niños sugirió que el ejercicio se podía resolver 'partiendo' el número en dos; el otro niño, quien escribía, entendió 'partir' como 'dividir en partes iguales' con lo cual el problema (Tarea 7, Figura 2) no tiene solución. El uso de espacios en blanco como recurso para representar números desconocidos parece no ser adecuado para referir a números diferentes. La tarea 8, corresponde a un patrón de crecimiento (Stacey, 1989) en donde la cantidad que se suma es variable. Durante la entrevista se evidenció que los niños tienden a considerar que debe sumarse una misma cantidad, afirman que la tarea 'está mal escrita'. La respuesta de elección para los niños para la tarea 8 corresponde a una secuencia numérica cuyo patrón requiere la suma de 'tres en tres'. A partir de la entrevista se dedujo que los estudiantes tan sólo prestaron atención a la diferencia entre el segundo y el tercer número, y asumieron que esa era la cantidad que se debía sumar consecutivamente. La mayoría de los niños cumplimentaron la tabla con un patrón de suma constante de 3 (15, 18, 21, …). Diversas investigaciones reportan que los niños no tienen grandes dificultades con los patrones de crecimiento constante (Stacey, 1989). Los criterios de algebrización no distinguen entre patrones de crecimiento lineales y patrones de crecimiento no lineales.

En relación con las tareas de nivel 1 de algebrización (Figura 3), la tarea 4 tuvo un porcentaje de respuestas correctas del 60%. Esta tarea pide expresar la sentencia numérica dada de manera equivalente. Los estudiantes tuvieron dificultades con esta tarea por su formato.

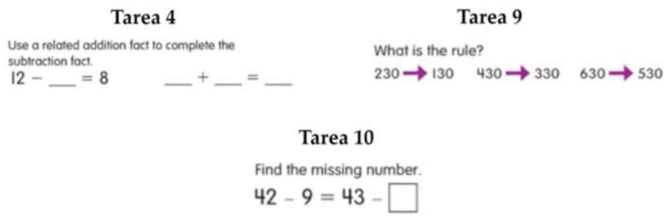


Figura 3. Preguntas ubicadas en el nivel Uno de algebrización para el primer grado

Durante la entrevista los estudiantes pudieron resolver la primera parte, pero no lograron usar su respuesta para escribir la expresión aritmética equivalente solicitada. La tarea 9 obtuvo respuestas correctas por encima del 50%. La tarea 10 tuvo un porcentaje de acierto del 40%. La tarea 4 indaga dos aspectos (2 ítems), en el primero se pide resolver un hecho numérico, que puede ser asumido como una ecuación sencilla. Sin embargo, el segundo ítem indaga por la expresión de la sentencia numérica mediante una suma, con lo cual el estudiante debe utilizar propiedades numéricas. Los niños resolvieron bien la sentencia numérica, pero no vincularon el ítem 2 con el ítem 1, con lo cual escribieron sentencias numéricas aditivas válidas.

Para la tarea 9, los niños escribieron[2] sentencias como ‘Hay que restar 100 al término de la izquierda para obtener el de la derecha…’. Los niños ofrecen una respuesta correcta, que es evidencia de la identificación de la regla de formación, cuya expresión es verbal. La pregunta 10 corresponde a una sentencia numérica, donde se pone en cuestión el signo igual en su acepción de relación de equivalencia. Para esta tarea se apreció que muchos niños responden de esta manera: ‘porque tener 42 menos 9 sería igual a tener 43 menos 8…’, que es una interpretación acertada del signo igual como relación de equivalencia. Uno de los niños argumentó '…aumento de 42 a 43 en una unidad, y disminuyo de 9 a 8 en una unidad'. Los niños manifiestan dificultades con sentencias numéricas debido al sentido operativo que confieren al signo igual (Molina, 2006). Nótese que la tarea 9 corresponde a una actividad en la que se requiere identificar una 'regla de asignación' y el 80% de los niños respondió acertadamente a la tarea.

Seis tareas fueron respondidas correctamente por más del 50% de los niños. Las tareas 7, 8 (nivel cero) y la 10 (nivel uno) tuvieron menos respuestas correctas que las otras tareas. A pesar de que las tareas 7 y 8 son de nivel cero, el grado de dificultad parece mayor. Los niños son capaces de resolver las sentencias donde se busca un número, pero la dificultad se incrementa cuando la sentencia indaga por dos números. Si bien los niños reconocen los patrones de crecimiento lineal, tan solo el 10% de los niños respondió correctamente a la pregunta del patrón de crecimiento no lineal. Podría ser que no estén acostumbrados a la solución de este tipo de tareas. Los libros de texto usados por ellos incluyen muy pocos ejercicios de este tipo.

Pruebas para el Tercer Grado

La prueba para el tercer grado constaba de 12 tareas, de las cuales seis eran del nivel cero, tres del nivel uno y tres del nivel 2 de algebrización. La Tabla 2 muestra la relación entre los niveles y los porcentajes de acierto para la prueba de grado tercero. Las tareas que tuvieron porcentaje de respuestas correctas superior al 80% son las preguntas 2, 6, 7 y 12, correspondientes al nivel cero de algebrización.

Tabla 2
Relación entre niveles y porcentajes de acierto

	Numeración de las tareas	% de incorrectas	% de parcialmente correctas	% de correctas
Nivel Cero	2	0	11	88
	6	11	0	88
	7	11	0	88
	8	33	22	44

	10	66	0	33
	12	0	11	88
Nivel Uno	1	44	22	33
	9	22	55	22
	11	22	22	55
Nivel Dos	3	0	0	100
	4	33	55	11
	5	44	44	11

La Figura 4 muestra las tareas ubicadas en el nivel cero para el grado tercero. Las tareas 8 y 10 de nivel cero tuvieron porcentajes de respuestas correctas correspondientes al 44% y al 33%. La tarea 8 versa sobre la generalización de una regla aritmética. Los estudiantes no reconocieron una regla de formación, pero desarrollaron todas las divisiones, en las que cometieron errores localizados en el proceso algorítmico de división. Por su parte, la tarea 10 que indaga por el siguiente número en una lista, tuvo un porcentaje bajo de respuestas correctas.

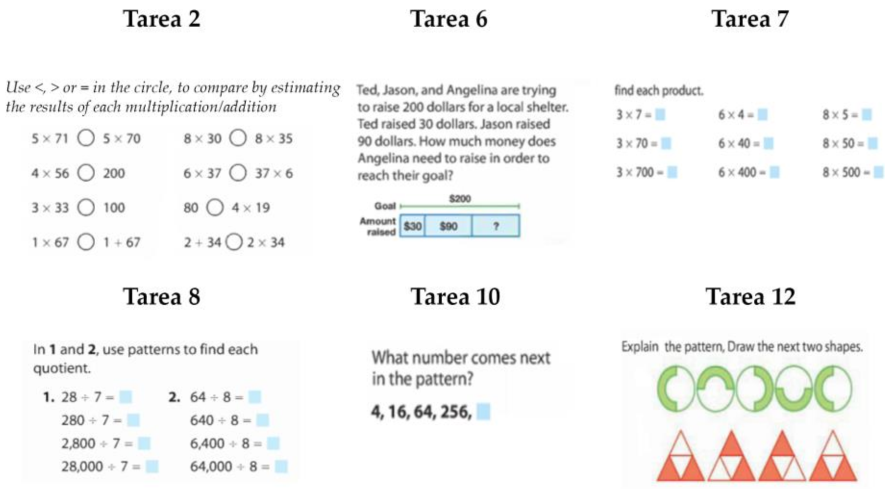
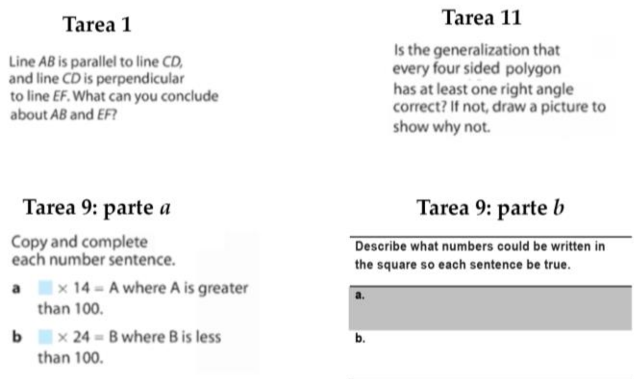


Figura 4. Tareas de Nivel Cero para el grado tercero

Se trata de una tarea de generalización cercana (Stacey, 1989). La dificultad corresponde al hecho de que la sucesión es geométrica y los estudiantes reconocen las secuencias aritméticas mucho antes que las geométricas. La estructura multiplicativa ocasiona mayores dificultades a los estudiantes y se informa de errores cuando se ve implicada en la solución tareas operativas (Brown & Burton, 1978). La Figura 5 muestra las tareas de nivel uno para el grado tercero.

Las tareas 1, 9 y 11 de nivel uno tuvieron respuestas correctas en porcentajes correspondientes a 33%, 22% y 55% respectivamente. La tarea 1 versa sobre la posición relativa de dos rectas. Durante la entrevista los niños dibujaron los segmentos de recta correctamente pero no reconocieron que se pedía concluir sobre la posición relativa de dos de las rectas, a pesar de que las dibujaron, pero afirman mayoritariamente que AB y EF son rectas.


Tarea 1

Line *AB* is parallel to line *CD*, and line *CD* is perpendicular to line *EF*. What can you conclude about *AB* and *EF*?

Tarea 11

Is the generalization that every four sided polygon has at least one right angle correct? If not, draw a picture to show why not.

Tarea 9: parte *a*

Copy and complete each number sentence.

a ▢ × 14 = A where A is greater than 100.

b ▢ × 24 = B where B is less than 100.

Tarea 9: parte *b*

Describe what numbers could be written in the square so each sentence be true.

a.

b.

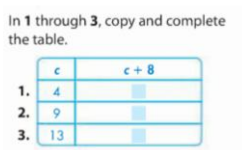
Figura 5. Tareas nivel uno para el grado tercero

Para la tarea 11 los niños realizaron dibujos de 'polígonos de cuatro lados', la mayoría de ellos incluía un ángulo recto. Durante la entrevista, realizada en español, los estudiantes manifestaron la misma dificultad. Asumieron la sentencia '…todo polígono de cuatro lados tiene un ángulo recto' como una afirmación verdadera, y dibujaron polígonos de cuatro lados que cumplían la sentencia.

La parte b de la tarea 9 resultó ser difícil en tanto que no pudieron describir la condición, en términos de 'mayor o menor'. Todos pudieron obtener un número solución, sin embargo, no lograron describir la condición sobre todos los posibles resultados. Se identificó durante la entrevista que la redacción de la pregunta influenció negativamente el desempeño de los estudiantes (Anghileri, 1995).

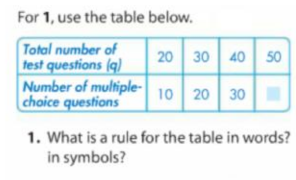
La Figura 6 muestra las tareas de nivel 2 para el grado tercero. Las tareas 3, 4 y 5 tuvieron un porcentaje de respuestas correctas correspondiente al 100%, 11% y 11%, respectivamente. Se aprecia que, en el grado tercero, a medida que se asciende en los niveles de algebrización, el porcentaje de respuestas correctas decrece. Se aprecia que las tareas 3 y 4 requieren elementos algebraicos vinculados con el uso de variables (Tall, 2001), mientras que la tarea 5 versa sobre modelación (Barbosa, 2006).

Tarea 3


In **1** through **3**, copy and complete the table.

	c	c + 8
1.	4	
2.	9	
3.	13	

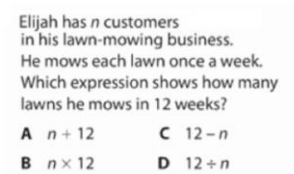
Tarea 4


For **1**, use the table below.

Total number of test questions (q)	20	30	40	50
Number of multiple-choice questions	10	20	30	

1. What is a rule for the table in words? in symbols?

Tarea 5


Elijah has *n* customers in his lawn-mowing business. He mows each lawn once a week. Which expression shows how many lawns he mows in 12 weeks?

A $n + 12$ **C** $12 - n$

B $n \times 12$ **D** $12 \div n$

Figura 6. Tareas nivel dos para el grado tercero

Las respuestas dadas a la tarea 3 ponen de manifiesto que los estudiantes exhiben comprensión de la notación algebraica, en tanto que reemplazan la letra ‘c’ por los números, sin embargo, no realizan la operación. Parece que no requieren que la operación se ‘cierre’ (Collis, 1974). Los estudiantes reconocen la letra en su acepción de variable, en tanto que la reemplazan sistemáticamente por los números que se les ofrece.

La tarea 4 que trata sobre la manifestación verbal y simbólica de una relación funcional entre el número de opciones de escogencia múltiple y el número de tareas. Los estudiantes identifican que tanto el número de preguntas como el número de opciones varía de diez en diez, así como la relación entre el número de preguntas y el número de opciones, pero no representan la regla simbólicamente. Esta tarea tiene un índice alto de dificultad en tanto que involucra simultáneamente la generalización de una regla, su representación verbal y su representación simbólica. Los estudiantes deben asignar una variable para el número de preguntas y una variable para el número de opciones, y relacionar a partir de la información numérica que se deriva de la tabla.

Las tareas fueron difíciles de responder para los niños, pues se requiere de la generalización de rasgos reconocidos en unos pocos intensivos –casos particulares para pasar a los extensivos–. Se reconoce además que los estudiantes se enfrentan a tres problemas: fenomenológico, epistemológico y semiótico. El problema fenomenológico se refiere a la atención que presta el estudiante sobre los objetos, es decir, la caracterización de un objeto y la identificación de sus semejanzas y diferencias con otros objetos a partir de atributos como la forma, la cantidad. Una dificultad de orden fenomenológico consiste en que los alumnos tienden a centrarse en la dimensión numérica (Radford, 2006). El problema epistemológico está relacionado con la comprensión del objeto y con la decisión o selección sobre aquello que se considera y aquello que se descarta. También se caracteriza por la identificación de una propiedad común entre los términos de la secuencia y generación de una estrategia para encontrar algún término, esto ocurre cuando se pregunta por términos remotos de una secuencia, por ejemplo, el término 25. El problema semiótico está vinculado con la denotación del objeto, denotación que puede tomar varias formas de representación. Para Radford (2013), la generalización algebraica no necesariamente está vinculada al simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación. La tarea 5 tuvo un porcentaje muy bajo de respuestas correctas. Los estudiantes, durante las entrevistas, manifestaron dificultades para relacionar el enunciado con la expresión algebraica.

Prueba para el Quinto Grado

La prueba para quinto grado está compuesta por diez tareas: una tarea (7) de nivel cero, una tarea (4) de nivel uno, tres tareas (3, 5 y 6) en el nivel dos, y cinco tareas (1, 2, 8, 9 y 10) del nivel tres de algebrización. La Tabla muestra la numeración de las tareas ubicadas en cada nivel, así como los porcentajes de desempeño.

La prueba aplicada al grado quinto incluye tareas de todos los niveles de algebrización. Para mantener la prueba corta, se decidió incluir sólo una tarea de nivel cero y una tarea de nivel uno.

Tabla 3
Respuestas para el cuestionario de grado quinto

	Numeración de las tareas	% de incorrectas	% de parcialmente correctas	% de correctas
Nivel Cero	7	20	10	70
Nivel Uno	4	10	40	50
Nivel Dos	3	80	10	10
	5	20	0	80
	6	20	20	60
Nivel Tres	1	0	40	60
	2	20	30	50
	8	40	0	60
	9	90	10	0
	10	20	60	20

La Figura 7 muestra las tareas de nivel cero y nivel uno. La tarea de nivel cero indaga sobre la interpretación del signo igual en su sentido de equivalencia. El valor desconocido se encuentra como resultado de operar con números conocidos. El porcentaje de respuestas correctas es del 70%. Los niños tuvieron dificultad con las dos últimas sentencias, pues no entienden si deben poner números u operaciones en ambos espacios para obtener una expresión numérica válida.

Tarea 7: ***Nivel Cero***

Complete the equations.

12 + 15 = 27	57 − 9 = 48
12 + 15 + 6 = 27 + □	57 − 9 − 7 = 48 − □
□ = □	□ = □

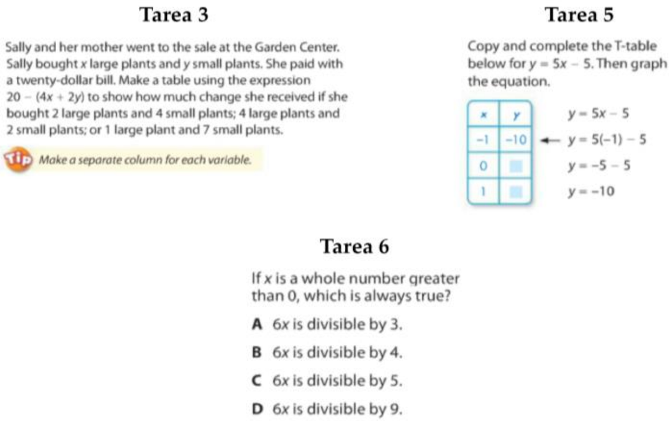
Tarea 4: ***Nivel Uno***

Test these conjectures. Explain whether they are correct or incorrect.

1. The difference of two odd numbers is always even.
2. The sum of a negative integer and a positive integer is always negative.

Figura 7. Tareas Nivel Cero y Nivel Uno para el grado quinto.

Si bien los aspectos algebraicos requeridos para resolver la tarea son dominados por los estudiantes, la expresión 'complete las ecuaciones' no es comprendida por los niños. Los aspectos lingüísticos vinculados con la redacción de las preguntas afectan la solución. El uso ambiguo de las expresiones lingüísticas afecta la comprensión de las consignas (Anghileri, 1995).


Tarea 3

Sally and her mother went to the sale at the Garden Center. Sally bought x large plants and y small plants. She paid with a twenty-dollar bill. Make a table using the expression $20 - (4x + 2y)$ to show how much change she received if she bought 2 large plants and 4 small plants; 4 large plants and 2 small plants; or 1 large plant and 7 small plants.

Tip *Make a separate column for each variable.*

Tarea 5

Copy and complete the T-table below for $y = 5x - 5$. Then graph the equation.

x	y
−1	−10
0	
1	

$y = 5x - 5$
$y = 5(-1) - 5$
$y = -5 - 5$
$y = -10$

Tarea 6

If x is a whole number greater than 0, which is always true?

A $6x$ is divisible by 3.

B $6x$ is divisible by 4.

C $6x$ is divisible by 5.

D $6x$ is divisible by 9.

Figura 8. Tareas Nivel Dos para el grado tercero.

Aunque los aspectos algebraicos requeridos para resolver la tarea son los mismos, el aspecto lingüístico afecta la dificultad de las consignas. Por tanto, el nivel algebraico de una tarea puede ser el mismo, pero la dificultad puede ser diferente en correspondencia con las consignas.

La tarea de nivel uno de algebrización requiere la verificación de dos "conjeturas" numéricas. Esta tarea tiene un porcentaje de 50% de respuestas correctas y 40% parcialmente correctas. La tendencia identificada en las soluciones es dar ejemplos numéricos para aprobar o refutar. Ningún estudiante produjo una expresión algebraica como recurso para probar la conjetura verdadera, ni se intentó un argumento basado en varios ejemplos.

La Figura 8 muestra las tres tareas de nivel dos de algebrización. Los porcentajes de respuestas correctas para cada una fueron 10%, 80% y 60% respectivamente. Para solucionar la tarea 3, se requiere cumplimentar una tabla donde ‘y’ no dependía de ‘x’ (había que evaluar en la expresión para valores previamente dados).

Entre las tareas valoradas como de nivel dos de algebrización, la tarea 3 tuvo un nivel menor de razonamiento algebraico y fue la que tuvo un índice menor de respuestas correctas. Las dificultades exhibidas por los estudiantes fueron indagadas en algunas entrevistas. Se encontró que los estudiantes manifestaron dificultades vinculadas con: a) la longitud del texto del enunciado; b) la repetición de números dentro y fuera la de fórmula; c) el desconocimiento del uso de las letras para el contexto del problema; y d) la falta de experiencia en la presentación de resultados en una tabla.

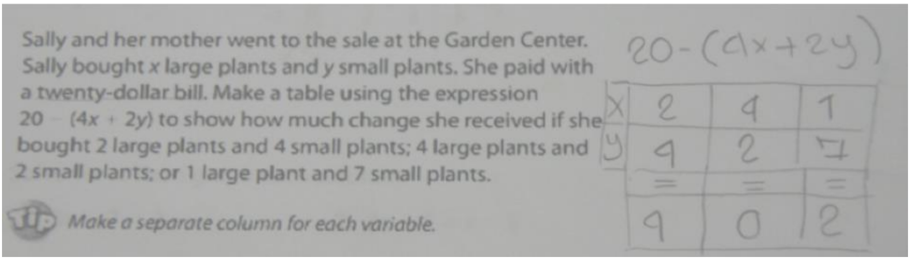


Figura 9. Respuesta de un estudiante a la tarea 3, de nivel dos, para grado quinto

Aunque en este ejercicio, las letras ‘x’ e ‘y’ tienen un significado declarado en el contexto del problema, los niños no identificaron su uso en referencia a cantidades de plantas grandes y pequeñas respectivamente. Sólo un estudiante se percató que el coeficiente de ‘x’ e ‘y’, representaba el costo de cada tipo de planta, y que la yuxtaposición entre el número y la variable correspondía a una multiplicación. Las peculiaridades de la sintaxis del álgebra son difíciles de encajar en la asignación de niveles de algebrización pero deben ser tenidas en cuenta cuando se valora el trabajo de los niños. La Figura 9 muestra la solución de uno de los estudiantes.

La Figura 10 muestra las cinco tareas de nivel tres de algebrización incluidas en la prueba. Las tareas de nivel tres están enfocadas al trabajo con funciones lineales y a sus representaciones analíticas, gráficas y tabulares. El porcentaje de respuestas correctas en cada ejercicio fue del 60%, 50%, 60%, 0% y 20% respectivamente. La tarea 9, que requiere resolver una inecuación y luego graficar la solución, obtuvo un porcentaje nulo de aciertos. Parece una tarea inapropiada para ser propuesta en un libro de texto de primaria de grado quinto. Es, sin embargo una tarea cuyo nivel de algebrización, Tres, está ampliamente justificada en tanto que se generan objetos intensivos representados de manera simbólica, se opera con ellos, además que se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. La tarea 9, con un 0% de respuestas acertadas y sólo un 10% de respuestas parcialmente correctas, fue la tarea de menor índice de aprobación de esta prueba.

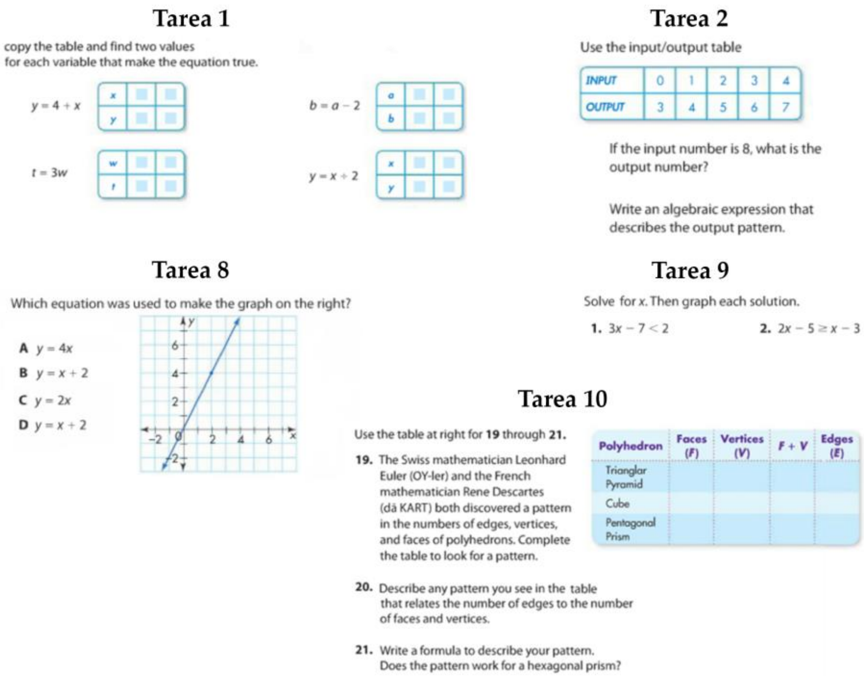
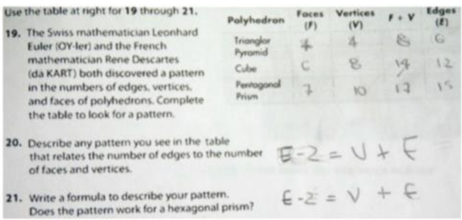


Figura 10. Las cinco tareas de nivel tres de algebrización incluidas en la prueba

La configuración de los elementos que definen un nivel de algebrización, afecta la dificultad de una tarea. Si bien la definición del nivel tres refiere a 'ecuaciones' y no a inecuaciones, la tarea propuesta requiere que se trabaje con el significado de variable que podría ser un vínculo epistémico entre la resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales. El 50% de los niños utilizaron 'ensayo y error' para encontrar soluciones a la inecuación, con lo cual la presencia de la variable en conjunción con el signo 'menor que' convoca la búsqueda de valores particulares, pero en ningún caso llegaron a una 'generalización' o a una regla para todos los números que satisfacen la expresión. Los estudiantes resolvieron la inecuación por ensayo y error, recurriendo a pruebas numéricas, pero fallaron en la representación gráfica. Si se descarta la graficación como requisito para valorar como correcta las respuestas, entonces el porcentaje de respuestas correctas aumenta notablemente hasta un 65%. En el caso de la ecuación la solución está dada por un valor, mientras que, en las inecuaciones lineales, la solución refiere a un conjunto infinito de valores. La ampliación del conjunto de soluciones es un aspecto que podría configurar un nivel superior de algebrización. Parece ser que la comprensión del significado de una inecuación, y por ende del proceso para su solución, requiere cierto nivel de razonamiento algebraico superior en los estudiantes, por lo que, a pesar de no haber una descripción en ningún nivel para este tipo de tareas (con inminente naturaleza algebraica), se clasifica como de nivel tres.

Estudiante A



Use the table at right for 19 through 21.

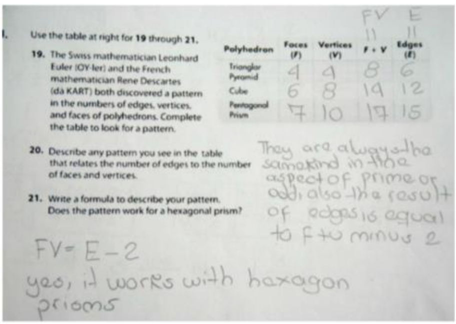
19. The Swiss mathematician Leonhard Euler (OY-ler) and the French mathematician Rene Descartes (da KART) both discovered a pattern in the numbers of edges, vertices, and faces of polyhedrons. Complete the table to look for a pattern.

Polyhedron	Faces (F)	Vertices (V)	F + V	Edges (E)
Triangular Pyramid	4	4	8	6
Cube	6	8	14	12
Pentagonal Prism	7	10	17	15

20. Describe any pattern you see in the table that relates the number of edges to the number of faces and vertices. E-2 = V + F

21. Write a formula to describe your pattern. Does the pattern work for a hexagonal prism? E-2 = V + F

Estudiante B



FV E
11 11

Use the table at right for 19 through 21.

19. The Swiss mathematician Leonhard Euler (OY-ler) and the French mathematician Rene Descartes (da KART) both discovered a pattern in the numbers of edges, vertices, and faces of polyhedrons. Complete the table to look for a pattern.

Polyhedron	Faces (F)	Vertices (V)	F + V	Edges (E)
Triangular Pyramid	4	4	8	6
Cube	6	8	14	12
Pentagonal Prism	7	10	17	15

20. Describe any pattern you see in the table that relates the number of edges to the number of faces and vertices.

21. Write a formula to describe your pattern. Does the pattern work for a hexagonal prism?

They are always the same kind in the aspect of prime or odd, also the result of edges is equal to F+V minus 2

FV= E-2

yes, it works with hexagon prisms

Figura 11. Dos respuestas correctas para la tarea 10, nivel tres, para grado quinto.

Las tareas 1, 2 y 8, en las cuales los niños tuvieron buen desempeño, son tradicionalmente postergadas hasta la secundaria, donde se trabaja de manera formal la definición de función lineal. En contraste, Blanton & Kaput (2001) proponen el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros grados de escolaridad, con actividades que ofrezcan cierto de tipo experiencia algebraico-funcional a los estudiantes, en tanto que el aprendizaje de las funciones es complejo y se desarrolla a lo largo del tiempo. Para resolver la tarea 10 se ofreció sólidos a los niños, ubicados en una mesa a la que los niños podían recurrir. La Figura 11 muestra dos soluciones correctas. Tan sólo uno de los niños escribo una regla simbólica para representar la relación entre el número de 'edges' y el número de 'faces', y la representó como 2xF=E.

Como conclusión parcial podemos decir que el nivel atribuido a una tarea no necesariamente se corresponde con los objetos matemáticos de naturaleza algebraica puestos en juego por el estudiante. Por ejemplo, la tarea 10 de la prueba de grado quinto, indaga por la descripción de una regularidad observada en una tabla, y en la Figura 11 el estudiante A escribe la expresión válida E-2= V+F. Este estudiante exhibe un nivel superior al demandado.

Consideraciones sobre los Niveles de Algebrización

Podemos afirmar que los niveles catalogan, progresivamente, el carácter algebraico de las tareas que se proponen en la colección de libros de texto que se analizó. Los niveles inferiores de algebrización propuestos se corresponden con los grados escolares inferiores, y; a medida que se avanza en los grados escolares, los niveles inferiores aparecen con menos frecuencia y aparecen los niveles superiores. La asignación de niveles de algebrización a las tareas no siempre es una actividad que se logre con facilidad, en tanto que se da el caso que dos tareas pueden compartir el nivel de algebrización, pero la actividad matemática requerida para resolverla es diversa.

Si bien los niveles proponen una graduación de las características algebraicas que pueden surgir en la solución de tareas matemáticas escolares, se ha encontrado que es posible valorar una tarea como de un nivel o de otro, en función del tipo de solución que se proponga, con lo cual la posible actividad matemática, de carácter algebraico, que un estudiante puede desarrollar, se predice en un rango aproximado. La tarea uno de nivel tres de algebrización, fue resuelta por 60% de los niños, mientras que la tarea nueve no fue resuelta por ninguno de los niños. Una posible explicación es que los niños están habituados al reconocimiento de patrones en tablas de doble entrada, mientras que no lo están tanto con la solución de inecuaciones o con desigualdades. Esto remite a que los niveles de algebrización dependen de cierta manera del diseño curricular propio de cada institución. Un estudiante de quinto puede resolver tareas de nivel tres, pero no resolver tareas de nivel dos.

Los niveles son progresivos entre grados en tanto que involucran el uso de aspectos algebraicos en orden creciente, pero no lo son en el grado de dificultad. Este último puede depender de aspectos verbales vinculados con la redacción de las tareas. En otros casos, el nivel de algebrización asignado a la tarea no se corresponde con la actividad matemática que el niño desarrolla, y los niveles propuestos por Godino et al. (2014), en este caso, no son buenos predictores del desempeño de los niños.

Los niveles se aplican bien a las tareas matemáticas y proponen niveles de actividad algebraica presentes en las tareas a lo largo de los grados, pero no son progresivos cuando se trata de la actividad que desarrollan los niños. En algunos casos se puede hablar de una actividad algebraica regresiva. El nivel algebraico parece depender fuertemente del currículo propuesto y consecutivamente, de los libros que se utilicen. La tendencia a incluir varias preguntas en una misma tarea dificulta la asignación del nivel a toda la tarea. Los niveles de algebrización son genéricos, pero los libros de texto son particulares y obedecen a estándares curriculares nacionales o internacionales. Así, el nivel de algebrización es relativo al grado.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta investigación son parciales por naturaleza, en tanto que los niveles de algebrización se utilizaron con una colección específica de textos escolares en una institución particular. Sin embargo, los resultados de la indagación ofrecen información interesante tanto sobre la adecuación de los niveles de algebrización para atribuir carácter algebraico a tareas matemáticas propuestas en los textos escolares, como sobre la adecuación de los mismos para predecir el desempeño de los niños en tareas valoradas como de carácter algebraico.

De acuerdo con los resultados aquí obtenidos, los niveles de algebrización propuestos por Godino, et al. (2014) podrían ser refinados mediante la aplicación de pruebas con tareas de naturaleza algebraica a poblaciones amplias de niños en diversos contextos. Lo anterior con la finalidad de hacer la propuesta de los niveles de algebrización, más operativa y útil para los profesores en su día a día en el ámbito escolar. Además, parece que el contexto o entorno social en el cual se ubique la institución educativa tiene un efecto en los desempeños matemáticos de los niños, con lo cual los niveles de razonamiento algebraico no podrían tomarse como predictores absolutos de la actividad matemática emergente de los niños. Para el caso que nos compete (contexto colombiano), si bien no se ha investigado, parece plausible afirmar que niños de una institución pública obtendrían resultados sensiblemente inferiores de respuestas correctas. Actualmente los niveles, como propuesta teórica-general, tan sólo pueden tomarse como predictores de cierta actividad matemática donde características algebraicas están presentes y como tal, pueden regular y orientar la actividad matemática de los niños. Se requiere investigar la pertinencia de los niveles de algebrización en procesos de desarrollo profesional de maestros activos, para valorar su pertinencia como herramienta de desarrollo profesional para que los maestros activos reconozcan y promuevan la naturaleza algebraica presente y emergente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado parcialmente en el marco del Proyecto Fondecyt 11150014, financiado por el CONICYT de Chile.

Notas

[1] Los estratos están determinados por el poder económico e inmueble, y ayudan a determinar el monto de los impuestos a pagar, las tarifas de los servicios públicos domiciliarios, el acceso a los servicios de salud, las matrículas a pagar en los colegios y universidades estatales. Los estratos 1 y 2 están catalogados como nivel bajo.

[2] Los estudiantes podían escribir en inglés o en español.

Bibliografía

Anghileri, J. (1995). Language, arithmetic, and the negotiation of meaning. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 10-14.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers´ knowledge of students´ understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249-272. doi: http://dx.doi.org/10.1080/10986060701360910

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, *38*(3), 293-301. doi: 10.1007/BF02652812

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, pp. 57-94). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Bolea, M. P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)*, *21*(3), 247-304.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*(2), 155-192. doi: 10.1207/s15516709cog0202_4

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37*(1), 53-59. doi : 10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning : A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, NC : Information Age Publishing.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. *Una Empresa Docente, Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.*, Bogotá.

Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. Paper prepared for the Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, University of London, England Culture and Mathematical Thinking (pp. 7-21 y 103-129).

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 195-208.

Davis, R. B. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how humans think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4: 266-274). Reston, VA: NCTM y Laurence Erlbaum Associates.

EnVision. (2012). Scott Foresman-Adisson Wesley. enVision Math. Pearson.

Ginsburg, H. P., Kossan, N.E., Schwartz, R., & Swanson, D. (1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. In H.P. Ginsburg (Ed.). *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 7-47). London: Academic Press.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2.3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA 26*(42B), 483-511.

Godino, J. D., Neto, T; Wilhelmi, M. R Aké, L. P., Etchegaray, S., y Lasa, A (2015). Niveles de algebrización de las practicas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Implicaciones para la formación de maestros. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 117-142.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA.: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11 - 15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1 - 19. doi: 10.1023/A:1002970913563

McGowen, M. A., & Davis, G. E. (2001). Changing pre-service elementary teachers'attitudes to algebra. In H. L. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 2, pp. 438-446). Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada (España).

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells. (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

Radford, L (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, número especial, 103-129.

Radford, L (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT*, *2* (1), 7-44. doi: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.19

RS/JMC. The Royal Society and Joint Mathematical Council of the United Kingdom. (1997). *Teaching and learning algebra pre-19.* London: Royal Society/JMC Working Group.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange & J. –P. Drouhard (Eds.). *Enseignement de I'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives.*

Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM), 109-122.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2): 147-164. doi: 10.1007/BF00579460

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 33-47. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.12.002

Strother, S.A. (2011). *Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability*. Ph.D. dissertation. Faculty of the College of Arts and Sciences of the University of Louisville, Louisville, Kentucky.

Tall, D. (2001). Reflections on early algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME25)* (Vol. 1, pp. 149-152). Utrecht, The Netherlands.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers´ content knowledge on their evaluation of students´ strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 319-351. doi: 10.2307/4149957

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Pre-service teachers´ preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6(1)*, 27-52. doi : 10.1023/A:1022109006658

Walter F. Castro es profesor en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

John D. Martínez-Escobar es profesor en el Colegio Montessori.

Luis R. Pino-Fan es profesor-investigador del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.

Dirección de Contacto: La correspondencia directa sobre este articulo debe ser dirigida al primer autor. **Dirección postal**: Cl. 67 #53 - 108, Medellín, Antioquia, Colombia; Oficina 9-427.
Email: wfcastro82@gmail.com ; walter.castro@udea.edu.co