REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental en la Transición Entre la Enseñanza Secundaria y la Universitaria

Catarina O. Lucas[1], Josep Gascón Pérez[2], Cecilio Fonseca Bon[3]

1) Instituto Politécnico do Porto
2) Universitat Autònoma de Barcelona
3) Universidad de Vigo

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

To cite this article: Lucas, C.O., Gascón, J. & Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. doi: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 283-306

Raison d'être of the Elementary Differential Calculus in the Transition Between Secondary school and University

Catarina O. Lucas
Instituto Politécnico do Porto

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilio Fonseca
Universidad de Vigo

(*Received: 31 May 2016; Accepted: 26 September 2017; Published: 24 October 2017)*

Abstract

This paper presents a study of the didactic phenomenon of lack of visibility and irrelevance of *functional modelling* (FM) in the transition between secondary and university, by relating it with the «official» *raison d'être* (rationale) that the curriculum documents currently assigns to the *elementary differential calculus* (EDC). Based on the analysis of the didactic transposition of the EDC, we propose general criteria which should satisfy a *reference epistemological model* that redefines the FM and assigns to the EDC an alternative *raison d'être* to the official that will be more compliant with the role that it plays in the scientific activity. In this paper we present the answers provided by the Portuguese educational system, but we have collected answers and similar data from educational systems of other countries (France, Spain and Brazil).

Keywords: Functional modelling, elementary differential calculus, reference epistemological model, *raison d'être*

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2116

REDIMAT, Vol. 6 No. 3 Octubre 2017 pp. 283-306

Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental en la Transición Entre la Enseñanza Secundaria y la Universitaria

Catarina O. Lucas
Instituto Politécnico do Porto

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilio Fonseca
Universidad de Vigo

(*Recibido: 31 Mayo 2016; Aceptado: 26 Septiembre 2017; Publicado: 24 Octubre 2017)*

Resumen

En este trabajo se estudia el fenómeno didáctico de la falta de visibilidad e irrelevancia de la *modelización funcional* (MF) en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria, relacionándolo con la razón de ser «oficial» que los documentos curriculares asignan actualmente al *cálculo diferencial elemental* (CDE). En base al análisis de la transposición didáctica del CDE, proponemos los criterios generales que deberá cumplir un *modelo epistemológico de referencia* que redefina la MF y asigne al CDE una razón de ser alternativa a la oficial que sea más acorde con el papel que este desempeña en la actividad científica. En este trabajo presentamos las respuestas que proporciona el sistema educativo portugués, pero tenemos recogidas respuestas y datos semejantes de sistemas educativos de otros países (Francia, España y Brasil).

Palabras clave: Modelización funcional, cálculo diferencial elemental, modelo epistemológico de referencia, razón de ser

2013 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2017.2116

En las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) en el que se sitúa este trabajo, se distingue entre la razón de ser «oficial» que la institución escolar asigna a un ámbito de la matemática escolar, esto es, las funciones que le asigna en la práctica, de otras posibles razones de ser alternativas. Esta distinción se debe a que, en base a una investigación didáctica en la que esté involucrado dicho ámbito, es posible que se sienta la necesidad de postular una razón de ser distinta de la que le asigna el currículo oficial, lo que comportará una modificación profunda de las cuestiones y de las tareas que habitualmente se suponía que daban sentido al estudio de dicho ámbito en determinado nivel educativo.

La nueva razón de ser provocará, inevitablemente, una reformulación y hasta una nueva definición, de la estructura de dicho ámbito y de su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares hasta el punto que, muchas de las citadas investigaciones pueden interpretarse (aunque no sea ésta la única interpretación posible) como la asignación a cierto ámbito de la matemática escolar, por parte de un *modelo epistemológico de referencia* (en adelante, MER), alternativo al modelo epistemológico dominante en la institución en cuestión, de una razón de ser distinta de la que se le asigna oficialmente. Así, por ejemplo, podemos citar los siguientes ámbitos a los que se les ha asignado, en diferentes trabajos, una razón de ser alternativa:

a) Bolea (2002) y Ruiz-Munzón (2010), para superar las limitaciones del álgebra como *aritmética generalizada*, situaron la razón de ser del *álgebra elemental* en el ámbito de la *modelización algebraica*.
b) García (2005) superó el aislamiento de la *proporcionalidad* situando su razón de ser en el ámbito del conjunto de *relaciones funcionales* elementales.
c) Sierra (2006), para articular la designación de los naturales con la economía y fiabilidad de los algoritmos, situó la razón de ser de los *sistemas de numeración* en el ámbito del *cálculo aritmético*.
d) Cid (2016) para superar las contradicciones originadas por los modelos realistas (también denominados modelos concretos) de los *números negativos*, situó la razón de ser de los mismos en el ámbito del *álgebra elemental*.

e) Licera et al. (2011) para superar el fenómeno de la ocultación escolar de la problemática en torno al uso de los *números reales* situaron la razón de ser de estos en el ámbito de las *magnitudes continuas*.

En cada caso el MER construido por los investigadores constituye una conjetura o hipótesis científica que desempeña el papel de *instrumento de emancipación epistemológica* del didacta y de la ciencia didáctica respecto de los códigos imperantes en la escuela (Gascón 2014). En particular, se puede tomar como sistema de referencia para caracterizar la razón de ser oficial de un cierto ámbito de la matemática escolar.

En este trabajo, utilizando la metodología de investigación de la TAD, que ha sido experimentada en los casos citados anteriormente, describimos el modelo epistemológico dominante y caracterizamos la razón de ser «oficial» del cálculo diferencial en la citada institución. Paralelamente, en base a la conjetura de Ruiz-Munzón y al análisis de la *transposición didáctica* (Chevallard 1985) del CDE, proponemos los criterios generales que deberá cumplir un MER que *redefina* la MF y asigne al CDE una razón de ser alternativa a la oficial que sea más acorde con el papel que este desempeña en la actividad científica. Como culminación de este proceso, constatamos y empezamos a estudiar el fenómeno didáctico de la *falta de visibilidad escolar* de la modelización funcional y la correspondiente ausencia de una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en este ámbito, al tiempo que proponemos una alternativa para superar las limitaciones de la organización matemática institucionalizada. Estos son, en síntesis, los objetivos fundamentales de este trabajo.

Tipos de Tareas que Propone el Sistema de Enseñanza Portugués para Dar Sentido al Estudio del Cálculo Diferencial en el Paso de Secundaria a la Universidad

En esta sección describiremos con cierta precisión las funciones que el cálculo diferencial elemental (en adelante CDE) *desempeña efectivamente* en el último curso de la enseñanza secundaria portuguesa (alumnos entre 16-18 años) y el primer curso de algunos grados universitarios (alumnos entre 18-19 años).

En este trabajo, denominaremos CDE al conjunto de temas que se incluyen bajo dicho epígrafe en la última etapa de la enseñanza secundaria portuguesa y en los primeros cursos universitarios de algunas licenciaturas o grados como, por ejemplo, los de Bioquímica, Medicina Nuclear, Economía, Biología, Geología, Ingenierías, Ciencias Farmacéuticas, etc. (cf. Lucas, 2015, p. 84-85).

Aunque en este trabajo nos centraremos en el caso del sistema educativo portugués, los resultados y las conclusiones a los que llegaremos son aplicables en gran medida a otros sistemas educativos, tales como, por ejemplo, a los sistemas educativos español, francés y brasileño, entre otros. Algunos de los datos que nos permiten ampliar dichas conclusiones pueden ser consultados en Lucas (2015) y en Gascón, Lucas, Nicolás y Sierra (2016).

La metodología que vamos a utilizar para describir las funciones que el Cálculo desempeña en el último curso de Secundaria y el primer curso universitario consistirá en un trabajo de identificación y descripción sistemática (y tan exhaustiva como sea posible) de los tipos de tareas y de las cuestiones que el sistema escolar considera que requieren del uso de las nociones y las técnicas del Cálculo. La cuestión que pretendemos responder puede plantearse inicialmente mediante un enunciado general:

> **Q_1:** ¿En qué tareas escolares se utilizan los principales componentes (nociones, técnicas y discursos tecnológico-teóricos asociados) del Cálculo? ¿Qué cuestiones requieren para ser respondidas, según la organización matemática escolar, el uso de dichos componentes? Esto es, ¿qué tareas se proponen en la práctica matemática escolar para dar sentido a (o justificar el estudio de) las citadas nociones, técnicas y discursos tecnológico-teóricos?

Para precisar el alcance de la cuestión $\mathbf{Q_1}$ formularemos un conjunto de cuestiones derivadas $\mathbf{Q_{1i}}$ mucho más concretas. Para responder a estas cuestiones utilizaremos como base empírica los siguientes materiales:

De la enseñanza secundaria portuguesa:

- manuales escolares de Matemática A de la enseñanza secundaria (11.º y 12.º año de escolaridad);
- exámenes nacionales de Matemática A (del final de secundaria de cursos de *Ciências e Tecnologias* y de *Ciências Sócio-Económicas*).

Del primer curso de la enseñanza universitaria portuguesa:

- apuntes teóricos y ejercicios en fichas de trabajo de los profesores de cálculo diferencial e integral del primer curso universitario de los grados indicados anteriormente;
- exámenes.

Se reseña que, al contrario del sistema educativo español, el sistema educativo portugués es centralizado, o sea, se estudia esencialmente lo mismo en todas las escuelas y universidades del país. Así, en esta sección, las cuestiones que planteamos al sistema educativo portugués se proponen utilizando las nociones que proporciona el modelo epistemológico en torno al Cálculo *dominante en la institución*. Posteriormente introduciremos un modelo epistemológico alternativo al oficial lo que nos permitirá, al disponer de un punto de vista externo y explícito, profundizar en la caracterización de la razón de ser que se asigna oficialmente al Cálculo en dicha institución.

Q_{11}: ¿En qué tipos de tareas escolares se utiliza la noción de *límite de una función* (en un punto o en el infinito)? ¿Qué cuestiones escolares requieren para ser respondidas del cálculo de límites funcionales? En particular, ¿se utilizan los límites funcionales para fundamentar el *estudio de la continuidad de una función*?

- **R_{11}:**[1] Habitualmente se calculan límites de funciones en un punto o en el infinito sin ningún otro objetivo. En algunos casos, se utilizan para determinar las asíntotas de la función o para estudiar la continuidad de la misma. En este último caso es habitual caer en un razonamiento circular, puesto que algunos manuales y los documentos curriculares analizados recomiendan, para calcular el límite de una función en un punto de abscisa x_0, substituir x por x_0 y si este procedimiento conduce a una indeterminación, entonces se propone que se utilicen únicamente técnicas algebraicas para deshacerla. También se utilizan límites para calcular la derivada en un punto (haciendo uso de la definición) pero sólo en casos muy sencillos, lo que provoca una predominancia escolar de las técnicas de derivación algebraicas sobre la técnica del límite del cociente incremental.

En la matemática escolar es muy habitual la tarea que consiste en «verificar si una función definida a trozos es continua o diferenciable», como, por ejemplo, la tarea siguiente:

5. (3,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \sqrt{x}\,, & \text{se } x > 0 \\ \log(x^2 + x + 1)\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Justifique que $f(0) = 0$ e verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

Resolução. (0.5 val.) Uma vez que f é contínua em 0, temos $f(0) = f(0^+) = f(0^-)$. Logo, por ex., $f(0) = \lim_{x\to 0^+} x \arctan \sqrt{x} = 0$.
Para vermos se é diferenciável em 0, calculamos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \arctan \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \arctan \sqrt{x} = 0,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(x^2 + x + 1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1} = 1$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeteminação $\frac{0}{0}$). Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, f não é diferenciável em 0. $\square$

Figura 1. Tarea de un examen para justificar que una función no es diferenciable

Q$_{12}$: El estudio y la *representación gráfica de funciones*, ¿qué tipo de cuestiones viene a responder en la matemática escolar?

- **R$_{12}$:** En la matemática escolar se utilizan las *representaciones gráficas de funciones* elementales para observar algunas de sus características o propiedades, tales como: el dominio y el recorrido, los ceros, el signo, la monotonía y los extremos. La gráfica de una función y la de la función derivada no se suelen considerar como modelos gráficos de un sistema. Por tanto, no se suele utilizar la gráfica de la función modelo para extraer información del sistema.

Q$_{13}$: ¿En qué tareas escolares aparece la necesidad de calcular la *derivada de una función en un punto*?

- **R$_{13}$:** Se calcula la derivada de una función en un punto para determinar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto y, en algunas ocasiones, para calcular la tasa de variación de un modelo funcional dado. La tarea de calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se considera como un objetivo en sí mismo.

Q_{14}: ¿Qué cuestiones permite responder la *función derivada* de una función? ¿Y las *funciones derivadas de orden superior*?

- **R_{14}:** La *función derivada* de una función se utiliza para determinar los intervalos de monotonía y los extremos de la función dada, en particular, en la resolución de problemas de optimización o en la construcción o identificación de un posible esbozo del gráfico de una función dada.

La *función derivada segunda* se emplea en el estudio de la concavidad/convexidad de una función y en la determinación de los puntos de inflexión. En algunos casos se utiliza la función derivada segunda para calcular la aceleración de un cuerpo. Las funciones derivadas de orden superior a 2 se utilizan en los inicios de la enseñanza universitaria portuguesa para escribir el Polinomio de Taylor, lo cual no se interpreta como un modelo funcional aproximado de cierto sistema.

Q_{15}: ¿Cuál es la razón de ser oficial de la noción de *primitiva de una función* y del *cálculo de primitivas*?

- **R_{15}:** En el sistema educativo portugués el cálculo de primitivas se desarrolla especialmente en el primer curso universitario sin atribuirle una verdadera funcionalidad, o sea, la determinación de la primitiva de una función es un objetivo en sí mismo (se utilizan las primitivas solo para calcularlas y nada más). En el último curso de Secundaria aparece únicamente la noción de *antiderivada* en algunos manuales.

Q_{16}: ¿Para qué se utiliza en la matemática escolar el cálculo de *integrales definidas* en un intervalo?

- **R_{16}:** En la Universidad se utilizan las integrales definidas habitualmente para calcular áreas bajo una curva y entre curvas. También en tareas dirigidas a calcular volúmenes de sólidos de revolución y longitudes de curvas planas.

Q_{17}: ¿En qué tipo de tareas se utiliza escolarmente el *Teorema Fundamental del Cálculo*?

- **R_{17}:** Aparece por primera vez en la enseñanza universitaria y se utiliza para definir la noción de integral como la inversa de la derivada. Se usa para mostrar que una función es diferenciable, o incluso para justificar el cálculo de la función derivada de una función dada mediante una integral definida con extremos variables como, por ejemplo, en la siguiente tarea:

4. (1.5 val.) Seja $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{t^2}}{t}\, dt$.

(a) Determine, justificando, a função derivada de F.

Resolução: Como F é da forma $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$ em que $f(t) = \frac{e^{t^2}}{t}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus 0$ e a, b são diferenciáveis (e com os mesmo sinal), temos do Teorema Fundamental do Cálculo que F é diferenciável e, para $x \neq 0$,

$$F'(x) = (2x)' f(2x) - x' f(x) = 2\frac{e^{(2x)^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^{4x^2} - e^{x^2}}{x}.$$

Figura 2. Tarea de un examen en que se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la Función Derivada de una Función.

Q_{18}: ¿Para responder a qué tipo de cuestiones se necesita resolver *ecuaciones diferenciales* (inmediatas)?

R_{18}: En los inicios de la enseñanza universitaria portuguesa aparecen muchos ejercicios en los que la resolución de una ecuación diferencial se plantea como un objetivo en sí mismo y, muy excepcionalmente, aparecen tareas cuya realización requiere resolver ecuaciones diferenciales (inmediatas) para calcular una función, conocidas sus derivadas primera y segunda y el valor de la función en un punto.

Conjetura de Ruiz-Munzón: Una Posible Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental como Alternativa a la Razón de Ser Oficial

El análisis de la razón de ser oficial del Cálculo en la transición entre la Secundaria y la Universidad, tal como se describe en la sección anterior, muestra ciertas *incoherencias.* Por ejemplo, se usa el límite para estudiar la continuidad de una función en un punto y, sin embargo, se supone que la función es continua como técnica para calcular dicho límite. Además, las respuestas que proporcionan los documentos curriculares a las cuestiones **Q_{1i}** revelan una fuerte *atomización y rigidez de las funciones* que se asignan escolarmente al CDE en el sistema portugués.

En un ámbito más general, diversas investigaciones analizan la contraposición entre la *rigidez* de la actividad matemática escolar y su necesaria *flexibilidad* para que los alumnos puedan llevar a cabo una actividad matemática «genuina» (Dreyfus 1991; Sfard 1989; Tall 1996; Ponte y Matos 1996). Esta rigidez y atomización de la organización matemática escolar se pone especialmente de manifiesto cuando la comparamos con la actividad científica. En efecto, el cálculo diferencial ha desempeñado históricamente (y sigue desempeñando) un papel muy relevante en la actividad científica, especialmente, en la construcción, utilización y comparación de *modelos funcionales*. En Lucas (2015), para estudiar el fenómeno específico de la *desarticulación escolar* entre el CDE y la *modelización funcional* (MF), hemos indagado la evolución histórica del papel del Cálculo en la enseñanza secundaria portuguesa, el origen *transpositivo* de dicho fenómeno, las condiciones que lo mantienen y sus principales consecuencias didácticas.

Para indagar los resultados obtenidos por las diferentes investigaciones didácticas, hemos llevado a cabo un estudio panorámico del tratamiento que ha recibido el problema didáctico del cálculo diferencial en Educación Matemática (Kaput 1992; Dubinsky y Harel 1992; Asiala et al. 1997; Cantoral y Montiel 2003; entre otros).

En particular, Michèle Artigue, en 1998, al estudiar la evolución de los programas del Cálculo en los currículos franceses, constató que, en el currículo de 1982:

> La actividad matemática se organiza en torno a la resolución de problemas: problemas de optimización, aproximación de números y funciones, modelos de variaciones discretas y continuas... La noción de derivada, sobre todo la de función derivada, instrumento esencial para la resolución de tales problemas, se vuelve la noción central.
>
> El orden lógico 'límites-continuidad-derivadas' se rompe: Se ha introducido un lenguaje mínimo intuitivo de los límites para fundamentar la introducción de la derivación, luego la noción de función derivada se vuelve la pieza maestra del edificio; la noción de continuidad casi desaparece, ya que, con la definición elegida para la noción de límite, cualquier función que tiene un límite en un punto de su dominio de definición es necesariamente continua en este punto. (Artigue, 1998a, p. 48).

En el mismo año, Artigue relata que, en los años 80, en la Universidad de París, fue detectado un problema didáctico relativo al conflicto entre las matemáticas y la física alrededor del cálculo diferencial. Un estudio del proceso de transposición didáctica de las matemáticas y de la física tuvo la ambición de conducir a la elaboración de productos eficaces de ingeniería didáctica considerando *modelizaciones diferenciales e integrales*. Este estudio mostró que en matemáticas predomina la *función de aproximación local* (cálculo de errores, determinación de las tangentes, plano tangente,...), mientras que en física impera la *función de aproximación lineal local* (con el paso de local a global) para buscar una ley de variación o para definir y calcular ciertas cantidades de magnitud (por ejemplo, el concepto de trabajo de una fuerza variable en una trayectoria no rectilínea, a partir de la noción de trabajo de una fuerza constante en un camino recto). Muchos de los comportamientos observados entre los estudiantes y los profesores se hacen comprensibles si se tiene en cuenta el hecho de que estas dos funciones no están, en el proceso de transposición didáctica habitual, claramente identificadas ni distinguidas. Asociada a esta brecha didáctica está la diferente forma de representar la derivada en las matemáticas y la física (Artigue, 1998b).

En Lucas (2015) también analizamos las relaciones que las diversas investigaciones didácticas propugnan entre el CDE y la MF, en el paso de Secundaria a la Universidad (Schneider 1991; Winsløw 2007; Galbraith 2011; Bravo y Cantoral 2012; Trigueros 2009; entre otros). En este estudio se concluyó que muchas de las investigaciones didácticas analizadas tienden a asumir la *razón de ser oficial* del CDE y, en consecuencia, no se reformula la actividad de MF mediante una estructura articulada de tareas matemáticas coordinadas entre sí, lo que origina que el papel del cálculo diferencial quede *fragmentado* en aplicaciones puntuales.

En este mismo sentido, y en relación con el problema didáctico del cálculo diferencial elemental, Noemí Ruiz-Munzón conjeturó que la razón de ser del CDE podría situarse en el ámbito de la *modelización funcional*, esto es, en el ámbito de la actividad de modelización matemática en la que los modelos se expresan mediante funciones:

> […] la modelización funcional, tal como se caracteriza en este trabajo, debería constituir la razón de ser del cálculo diferencial del Bachillerato y de los primeros cursos universitarios. Pero hemos de reconocer que se necesita un estudio más detallado para contrastar

> empíricamente dicho postulado lo que requerirá, en particular, desarrollar el MER propuesto para la modelización algebraico-funcional de tal manera que integre la actividad matemática elemental en torno al cálculo diferencial e integral. (Ruiz-Munzón 2010, p. 379, vol. 1).

En coherencia con esta conjetura y en base a los análisis citados, enunciaremos los *rasgos fundamentales* o *criterios generales* que deberá cumplir un *modelo epistemológico de referencia* (MER) que redefina la modelización funcional y permita asignar al CDE una razón de ser alternativa más acorde con el papel que desempeña en la actividad científica. Delinearemos únicamente las principales características de este modelo cuya construcción detallada puede consultarse en Lucas (2015).

En este trabajo utilizaremos dichos criterios generales que debe cumplir el MER a modo de *sistema de referencia* provisional para formular cuestiones a los documentos curriculares escolares cuyas respuestas nos permitirán, en primer lugar, caracterizar el *modelo epistemológico dominante* en torno a la MF. Y, una vez situados en el ámbito de la modelización funcional así redefinida por el modelo epistemológico de referencia, podremos plantear cuestiones para indagar las relaciones entre la MF y el CDE. Las respuestas a estas nuevas cuestiones nos permitirán profundizar en la caracterización de la razón de ser «oficial» que se asigna actualmente al CDE y en el análisis de la desarticulación escolar entre él y la MF.

Enunciamos a continuación los criterios que proponemos para caracterizar la modelización funcional y que también pueden considerarse como condiciones que imponemos al modelo alternativo que tomaremos como sistema de referencia.

- En el MER que proponemos se deben explicitar detalladamente diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el Cálculo en los mismos.
- Dicho modelo deberá tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y, por tanto, completar relativamente el presentado en Ruiz-Munzón (2010).
- En algunos casos, y como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, se partirá de datos discretos y, por

tanto, se trabajará inicialmente con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.

- Si se parte de datos discretos, se utilizarán diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos ya sea partiendo, en función de la naturaleza del sistema a modelizar, de los datos brutos, de la tasa de variación media (TVM) o la tasa de variación media relativa (TVMR), para construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.
- Se justificará y evaluará el proceso de aproximación de los modelos discretos, (formulados en términos de ecuaciones en diferencias finitas), mediante modelos continuos (dados mediante ecuaciones diferenciales).
- Se mostrará que, dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, la aproximación por regresión sobre la TVM o la TVMR (sucesiones que se obtienen a partir de los datos brutos) proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.
- Se pondrá de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del Cálculo son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta.
- Se construirán y articularán diferentes tipos de variación tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas[4]. Cada uno de estos tipos se caracterizará imponiendo condiciones (hipótesis) sobre la TVM o sobre la TVMR. Se delimitará de esta forma un cierto universo de tipos elementales de variación.
- Se interpretará, utilizando las técnicas del Cálculo, el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema.
- Se utilizará el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos del sistema modelizado).
- Si se parte de datos continuos, se construirá con técnicas algebraicas la propia función modelo o bien su derivada. En este

último caso, el modelo funcional se construye integrando una ecuación diferencial.

- En todos los casos, los procesos de modelización funcional se desarrollarán con el objetivo de dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente general y relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión formulada con «parámetros» abiertos que sólo progresivamente deben convertirse en datos concretos.
- Los procesos de modelización funcional (MF) que forman parte del MER deben estar encaminados a estudiar la variación de cierta magnitud (longitud, área, volumen, trabajo, energía, etc.) respecto de otra u otras.

Este conjunto de condiciones permite precisar la noción de *modelización funcional* tal como la conceptualizamos en este trabajo. Esta caracterización permitirá clarificar el significado de la conjetura de Ruiz-Munzón (2010) según la cual la razón de ser (o una posible razón de ser) del CDE se sitúa en el ámbito de la MF.

Para terminar, digamos que estructuramos la MF mediante los *cuatro estadios* de cualquier proceso de *modelización matemática* (Chevallard 1989; Gascón 2001), sin prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos:

- *Primer estadio*: Delimitación o construcción del sistema (matemático o extramatemático) a modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.
- *Segundo estadio:* Construcción del modelo matemático del sistema y reformulación de las cuestiones iniciales.
- *Tercer estadio:* Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.
- *Cuarto estadio:* Necesidad de un nuevo proceso de modelización para responder a nuevas cuestiones.

Caracterización de la Modelización Funcional Escolar y del Papel del Cálculo en Dicho Ámbito a la Luz del Modelo Epistemológico de Referencia

La metodología que utilizaremos en esta sección está basada completamente en el MER puesto que se trata de indagar cuáles de los componentes que constituyen la MF, tal como ha sido redefinida por el modelo de referencia, están presentes en la práctica matemática escolar y qué papel desempeña el Cálculo en dicho ámbito. Una forma de sistematizar esta indagación consiste en responder a un conjunto de cuestiones derivadas de la siguiente cuestión general:

$\mathbf{Q_2}$**:** ¿Cómo vive la modelización funcional en el tránsito de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria?, esto es, ¿cuál es el *modelo epistemológico dominante* en torno a la MF en dicha institución? ¿Qué tipo de actividades contiene y en qué estadios de la modelización matemática se sitúan dichas actividades? ¿Qué papel desempeña el CDE en cada uno de los estadios de la MF?

De nuevo, para precisar el alcance de la cuestión $\mathbf{Q_2}$ formularemos un conjunto de cuestiones derivadas $\mathbf{Q_{2i}}$ mucho más concretas. Para responder a estas cuestiones utilizaremos la misma base empírica citada en el caso de la cuestión $\mathbf{Q_1}$. Plantearemos las cuestiones $\mathbf{Q_{2i}}$ al sistema educativo portugués.

$\mathbf{Q_{21}}$**:** ¿Se asigna a los estudiantes la responsabilidad de *construir modelos funcionales*? En particular, ¿se propone la construcción de *modelos numéricos o gráficos* a partir de *datos discretos*?

- $\mathbf{R_{21}}$**:** Casi todos los modelos funcionales que aparecen en la matemática escolar están dados de antemano. En algunas tareas se propone excepcionalmente la construcción de modelos *funcionales* a partir de datos *continuos* expresados en términos de relaciones entre variables. Está prácticamente ausente la construcción de modelos numéricos o gráficos a partir de datos discretos y nunca se formulan hipótesis sobre la variación (TVM o TVMR). Consecuentemente no se construyen modelos en términos de ecuaciones en diferencias finitas.

$\mathbf{Q_{22}}$**:** ¿Se utiliza la *integral definida* para construir modelos funcionales? ¿Se construyen o, al menos, aparecen modelos en términos de *ecuaciones diferenciales* de integración elemental?

- $\mathbf{R_{22}}$**:** En la matemática escolar no se utiliza la integral definida para construir modelos funcionales y sólo excepcionalmente aparece alguna ecuación diferencial desempeñando el papel de modelo de un sistema.

$\mathbf{Q_{23}}$**:** ¿Los modelos funcionales que aparecen en la matemática escolar vienen dados por *familias de funciones*?

- **R$_{23}$:** En los documentos analizados aparecen muy pocas tareas que impliquen un trabajo dentro de modelos funcionales que vengan dados mediante una familia de funciones que depende de uno o más parámetros. En dichas tareas se fija rápidamente el valor de los parámetros reduciendo el modelo a una única función. Además, nunca se solicita al estudiante que conjeture sobre una posible construcción de tales modelos.

> Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por
>
> $$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$
>
> a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição.
> Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$
> Considere agora $b = 0,05$ e $a = 10$
> Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.
> Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Figura 3. Tarea de apuntes de profesor en que solo se trabaja el modelo ya construido

Q$_{24}$: ¿En qué *estadios del proceso de modelización* (cf. final de la sección 3) se sitúan prioritariamente las actividades de MF que aparecen en los materiales escolares analizados?

- **R$_{24}$:** En la matemática escolar, las actividades de MF que se llevan a cabo se sitúan esencialmente en el *tercer estadio* del proceso, lo que significa que el modelo ya está dado de antemano y únicamente se solicita el trabajo técnico dentro del mismo y, en algunos casos, la interpretación de los resultados de dicho trabajo en términos del sistema.

Q$_{25}$: ¿Se plantean cuestiones problemáticas iniciales relativamente genéricas y abiertas como punto de partida de un proceso de modelización funcional a largo plazo? ¿Se lleva a cabo o se propone explícitamente, la delimitación o construcción de un sistema mediante la elección de ciertas variables y la formulación de ciertas hipótesis sobre el sistema? ¿Cuál es el *grado de autonomía* del que disfrutan los alumnos en estos procesos de estudio?

- **R$_{25}$:** En la matemática escolar no se plantean cuestiones problemáticas abiertas generadoras de procesos de MF ni se asigna a los estudiantes la responsabilidad de delimitar los sistemas a modelizar mediante la elección de variables y la formulación de hipótesis.

Q$_{26}$: En la organización matemática escolar del bloque de *cálculo diferencial e integral*, ¿qué papel se asigna a la MF?

- **R$_{26}$:** En los diferentes materiales curriculares analizados se observa que las actividades de modelización funcional se consideran como meras *aplicaciones* de ciertas nociones y técnicas matemáticas estudiadas previamente. Se trata de una forma de interpretar la relación entre las matemáticas y las otras disciplinas que hemos denominado *aplicacionismo* y es una consecuencia de la epistemología de las matemáticas dominante en ciertas instituciones universitarias. Para el aplicacionismo, las matemáticas no son constitutivas de los fenómenos científicos, solamente *se aplican a posteriori* para cuantificarlos (Barquero et al. 2014).

Q$_{27}$: ¿Se estudia la relación entre los *modelos discretos y los continuos* y, en particular, se utilizan diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los continuos?

- **R$_{27}$:** Se construyen muy pocos modelos a partir de *datos empíricos discretos*. Por lo tanto, no se utiliza el Cálculo como instrumento para transformar un modelo discreto en un modelo continuo ni, tampoco, se utilizan las técnicas de «discretizar» para pasar de trabajar con un modelo funcional continuo a trabajar con modelos numéricos discretos. En general, no se relacionan los modelos continuos con los discretos.

Q$_{28}$: ¿Se trabaja con *ecuaciones en diferencias finitas* mostrando que *una de las razones de ser de la noción de derivada* en este nivel educativo no es otra que su *economía técnica* (en comparación con las técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas) cuando se trabaja con modelos funcionales?

- **R$_{28}$:** Está prácticamente ausente la técnica de aproximar una *ecuación en diferencias finitas* por una *ecuación diferencial*, así como la técnica recíproca. Además, no se trabaja con diferencias finitas. En consecuencia, está completamente ausente la comparación en términos de *economía y fiabilidad* de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas con las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales elementales.

Q$_{29}$: En la matemática escolar, ¿cómo se estudia la variación de una magnitud respecto de otra (u otras)? En particular, ¿cómo se estudia la variación del área de una región plana, de la longitud de un arco de curva o de un volumen de revolución?

- **R$_{29}$:** En el paso de Secundaria a la Universidad no se estudia propiamente la *variación de las magnitudes área, longitud y volumen.* Este estudio se podría hacer perfectamente con las técnicas y la tecnología del CDE de la que se dispone, lo que requeriría simplemente llevar a cabo un proceso de modelización funcional para obtener conocimientos sobre el sistema modelizado. En lugar de eso, el sistema escolar aunque *construye la función que podría hacer el papel de modelo*, reduce el problema a calcular el valor concreto que toma dicha función para determinados valores de la variable independiente.

En general, podemos decir que en el estudio escolar de la variación de magnitudes continuas se ocultan diversas tareas y técnicas matemáticas que constituyen componentes esenciales de la MF y del papel del CDE en el ámbito de la MF. Además, en los casos en que se construye (aunque sea implícitamente) un modelo funcional, se suelen proporcionar los datos para poder construir la función $F'(x)$ (y, en algunos casos, dicha derivada es un dato explícito del problema) evitando así la necesidad de aproximar una ecuación en diferencias finitas mediante una ecuación diferencial (puesto que ésta se puede construir directamente).

Así, por ejemplo, en la matemática escolar no se explicita en ningún momento que se está construyendo un modelo funcional dado por la función:

$$F(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Análogamente, algunos libros de texto, para modelizar la variación continua de la magnitud *longitud de arco de curva* utilizan la *variación infinitesimal*, dF de dicha longitud entre dos abscisas «muy próximas» x y $x + dx$.

$$(dF(x))^2 = (dx)^2 + (df(x))^2$$

de donde se deduce directamente el modelo matemático expresado en términos de una ecuación diferencial elemental:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}$$

En este ejemplo (y en muchos otros como es el caso de la variación del volumen de un sólido de revolución) la derivada $\frac{dF}{dx}$ de la función incógnita se puede construir con los datos del problema, pero no está dada directamente. A pesar de lo cual, tampoco en este caso se suele considerar que la incógnita sea la función F, ni se trabaja con esta función como modelo para responder a cuestiones que surgen en el sistema que modeliza (más allá de calcular un valor de la longitud de un segmento de curva concreto).

Estrictamente podría decirse que se utiliza el Cálculo para pasar de $\frac{dF}{dx}$ a calcular $F(x)$, en el bien entendido que $\frac{dF}{dx}$ o bien es un dato, o bien puede obtenerse a partir de los datos, aunque sea de una forma no justificable en la institución en cuestión.

En resumen, dado que en la práctica matemática escolar no se considera en ningún momento que se esté llevando a cabo un proceso de MF, no se considera que exista un sistema que se está modelizando para utilizar el modelo matemático como instrumento para responder a cuestiones problemáticas que surgen en dicho sistema. Tampoco se considera que la incógnita sea una función ni una familia de funciones, sólo interesa (escolarmente) determinar algunos de los valores concretos $F(c)$ de dicha función.

A Modo de Conclusión: El Fenómeno Didáctico de la Falta de Visibilidad Escolar de la Modelización Funcional y la Correspondiente Ausencia de una Posible Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental

Las tareas que el sistema de enseñanza portugués plantea como razón de ser oficial del CDE, según se desprende de las respuestas a las cuestiones derivadas de $\mathbf{Q_1}$ son tareas bastante aisladas entre sí y poco relacionadas explícitamente con la MF por lo que, en principio, no podrían considerarse como componentes manifiestos de los procesos de MF. Se trata de tareas que, en la práctica escolar, se llevan a cabo para responder a cuestiones que generalmente demandan una cantidad concreta de cierta magnitud o, en su defecto, un número concreto. En los pocos casos en que la incógnita es una función no se requiere trabajar con ella para obtener nuevos conocimientos. Así, por ejemplo, la tarea relativa a la determinación de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, se propone en la práctica matemática escolar para responder a una cuestión relacionada con la *variación instantánea* de una función en un punto determinado o con la *aproximación local* de ésta mediante una función lineal. Se trata, por tanto, de responder a una cuestión muy particular relacionada con un aspecto concreto de dicha función cuya respuesta requiere el uso de las técnicas del CDE. Pero si interpretamos la función de partida como un *sistema* en el que ha surgido la citada cuestión problemática, es posible plantear una pregunta más general relativa a la *variación de la función* y, en ese caso, la respuesta que se requiere es, a su vez, una función (la derivada de la función de partida) que podemos considerar como un *modelo funcional* de esta y que, en particular, permitirá responder a otras muchas cuestiones relativas a la variación de la función de partida.

Otro ejemplo lo constituyen las tareas relativas al cálculo de primitivas elementales. Aunque éstas podrían utilizarse para la *construcción* de modelos funcionales (como punto de partida de procesos de MF), ni el currículo portugués actual del último curso de Secundaria ni el del primer curso universitario proponen esta funcionalidad para dicho tipo de tareas.

En general, puede mostrarse que los tipos de tareas que constituyen efectivamente la razón de ser oficial del CDE se pueden reinterpretar como parte de procesos de MF aunque, en la práctica escolar, la relación de estas tareas con los procesos de MF es en unos casos totalmente inexistente y, en otros, sólo alcanza una pequeña parte de uno de los estadios de dichos procesos.

Por otra parte, las respuestas a las cuestiones derivadas de $\mathbf{Q_2}$ ponen claramente de manifiesto que la MF, tal como la hemos caracterizado en la sección 3, está prácticamente ausente en el paso de Secundaria a la Universidad. Esta ausencia se pone especialmente de manifiesto si consideramos que un *proceso de modelización funcional* constituye un *recorrido matemático indivisible* que parte de una cuestión problemática y culmina en una respuesta provisional a dicha cuestión. Desde este punto de vista, las tareas que podrían constituir componentes de procesos de MF y que, de una u otra forma, están presentes en la práctica matemática escolar, son muy escasas y, además, aparecen aisladas.

Además, los datos empíricos recogidos en los documentos analizados muestran que en los pocos casos en que se utiliza el Cálculo para estudiar algunos aspectos de un sistema mediante el trabajo en un modelo funcional que lo describa, el modelo suele estar dado de antemano o, en el mejor de los casos, es construible mediante técnicas algebraicas. Prácticamente en ningún caso la construcción del modelo parte de datos discretos obtenidos empíricamente y, en todos los casos, el papel del CDE es muy limitado a lo largo de todo el proceso de modelización, concentrándose esencialmente en el tercer estadio de dicho proceso. Las tareas relacionadas con la resolución de *problemas de optimización* son prácticamente las únicas en las que se lleva a cabo el estudio de un sistema a partir de un modelo funcional. En estas tareas, el papel del Cálculo no va mucho más allá del cálculo de los extremos y el estudio de la monotonía del modelo funcional.

Dejando aparte los problemas de optimización, algunas prácticas matemáticas escolares que se acercan a lo que podría ser un verdadero proceso de MF no aparecen como tales. Un ejemplo muy evidente de la existencia de estos *modelos funcionales ocultos* en la práctica matemática escolar está relacionado con el cálculo del área de regiones planas, de longitudes de arcos de curvas y de volúmenes de revolución tal como muestra la respuesta $\mathbf{R}_{29}$.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que, incluso en los casos en que el Cálculo se utiliza efectivamente como instrumento imprescindible para *construir un modelo funcional*, el sistema escolar no reconoce que se trate de un proceso de MF, ni que el resultado del mismo sea un modelo (funcional). En consecuencia, en la práctica matemática escolar no se explotan las posibilidades del modelo construido como instrumento de producción de conocimientos del sistema modelizado. Este hecho constituye otro indicio claro del *fenómeno de falta de visibilidad* escolar de la actividad de modelización funcional y de la correspondiente ausencia de la razón de ser del CDE que el MER que proponemos le asigna, en coherencia con el papel que desempeña el CDE en la actividad científica.

Postulamos, en resumen, que la forma como se trata en el paso de Secundaria a la Universidad el estudio de la variación de diversas magnitudes continuas *no deja ver que se está construyendo un modelo* *funcional* (utilizando el Cálculo como instrumento de construcción del mismo) puesto que lo que se toma como incógnita, explícitamente, esto es, el objeto matemático que se pretende construir, no es una función (o familia de funciones) sino una fórmula algoritmizada para calcular valores concretos del área de cierta región plana, la longitud de cierta porción de curva o el volumen de un determinado cuerpo de revolución.

En definitiva, podemos afirmar que la razón de ser que el MER asigna al CDE, en el ámbito de la MF, es una ampliación (o generalización) radical de la razón de ser oficial que le asigna el sistema educativo portugués actual. En consecuencia, el modelo de referencia que proponemos, al asignar al cálculo diferencial elemental una nueva *razón de ser* que explicita el papel que puede desempeñar a lo largo de todos los estadios de la modelización funcional, permite *sacar a la luz e interpretar un fenómeno didáctico-matemático* que actualmente permanece oculto y que está profundamente ligado a la irrelevancia escolar de la MF.

Sin pretender buscar las «causas» de este fenómeno, el trabajo que hemos desarrollado hasta aquí nos permite afirmar en efecto que la languidez de la vida escolar de los procesos de MF depende en gran medida, más allá del fenómeno de la rigidez, atomización e incompletitud de las organizaciones matemáticas escolares (Fonseca 2004, Lucas 2010), de la desarticulación escolar entre el CDE y la MF, fruto de una transposición didáctica que debemos seguir estudiando.

Notas

[1] Indicaremos mediante el símbolo Rij la respuesta que aporta el sistema educativo portugués a la cuestión designada previamente mediante Qij.
[2] En la matemática escolar (en el tránsito de Secundaria a la Universidad) está prácticamente ausente la problemática ligada a la caracterización y construcción de un universo de tipos de variación. En particular, no se caracterizan los tipos de relaciones funcionales que se toman en consideración ni se indica el por qué se excluyen otros tipos de relaciones funcionales posibles.

Referencias

Artigue, M. (1998a). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M. (1998b). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-261.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16* (4), 399-431. doi: S0732312397900158

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32* (1), 83-100. doi: 10.5565/rev/ensciencias.933

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.

Bravo, S. & Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de Cálculo y el fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática 24*(1), 5–36.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números* 55, 3–22.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage (2ª édiction 1991).

Chevallard, Y. (1989)*: Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes, En David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. & Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes num. 25. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Vigo.

Galbraith, P. (2011). Models of modelling: Is there a first among equals? In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), Mathematics: Traditions and [new] practices. *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the Australian Association of Mathematics Teachers*, 279-287. Adelaide: AAMT and MERGA.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, número especial, XXV aniversario, marzo de 2014, 143-167.

Gascón, J.; Lucas, C.; Nicolás, P; Sierra, T. (2016). Une possible « raison d'être » du calcul différentiel élémentaire dans le domaine de la modélisation fonctionnelle lors du passage de l’enseignement secondaire à l’enseignement supérieur. En Matheron, Y. et al. (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 441-456). Grenoble, France : La Pensée Sauvage, Éditions.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Licera, R.M., Bastán, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 695-718). Centre de Recerca Matemàtica.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas.* Tesina no publicada (Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus

Aplicaciones). Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Vigo.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-137). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11*(2/3), 241-294.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII*. (pp. 151-158). Paris.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9* (46), 75-87.

Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 12,* 189-204.

Algunas Fuentes Consultadas

Enseñanza Secundaria

http://bi.gave.min-edu.pt/exames/exames/eSecundario/761/?listProvas

http://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios#matemática-a

Enseñanza Universitaria

http://paginas.fe.up.pt/am1/

http://ltodi.est.ips.pt/am1/

http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~mabreu/CI/

https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/disciplinas/CDI30/2012-2013/1-semestre/testes-e-exames

http://w3.ualg.pt/~mgameiro/Celeste-112.htm

http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/analisematematica1/

http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/coursenotes/Biomatematica.pdf

Caterina Oliveira Lucas es profesora asistente convidada, en la Escola Superior de Educaçao, Instituto Politécnico do Porto, Portugal.

Josep Gascón Pérez es profesor agregado en el Departamento de Matemáticas, de la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Cecilio Fonseca Bon es profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada, de la Universidad de Vigo, España.

Contact Address: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: Edifici C, carrer dels Til·lers, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallés), Spain. **Email**: Josep.Gascon@uab.cat