REPORTES DE INVESTIGACIÓN

DISEÑO FORMATIVO PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS[I]

A training design to develop the epistemic and cognitive analysis competence of mathematics teachers

Godino, J. D.[a], Giacomone, B.[b], Wilhelmi, M. R.[c], Blanco, T. F.[d] y Contreras, A.[e]

[a]Universidad de Granada,[b]Universidad Nacional de La Plata,[c]Universidad Pública de Navarra,[d]Universidad de Santiago de Compostela,[e]Universidad de Jaén;

jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com

Resumen

El reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar. Esta competencia permite al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático, diseñar y gestionar tales procesos y valorarlos con estándares de idoneidad previamente fijados. Así, el formador de profesores debe diseñar procesos formativos orientados al desarrollo de la competencia profesional mencionada. En este trabajo se describen las dos primeras fases de un diseño formativo orientado al desarrollo de esta competencia con profesores de matemáticas de secundaria, resaltándose el papel de los lenguajes visuales y analíticos en la constitución de tales objetos.

Palabras clave: *conocimiento didáctico – matemático, formación de profesores, diseño didáctico, análisis epistémico, enfoque ontosemiótico*

Abstract

The explicit recognition of objects and processes involved in mathematical practices is a competence that the teacher should develop. This competence allows the teacher to understand the processes of mathematical learning, design and manage such processes and value them with the standards of suitability previously set. Consequently, the teacher educator should design training processes aimed at developing the professional competence mentioned. The first two phases of an instructional design aimed at developing this competence for secondary mathematics teachers are described. The role of visual and analytical languages in the constitution of such objects is emphasized.

Keywords: *didactic – mathematical knowledge, teachers' training, didactical design, epistemic analysis, onto-semiotic approach*

INTRODUCCIÓN

El modelo de conocimientos didáctico – matemáticos (CDM) del profesor de matemáticas (Godino, 2009) establece que el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de una tarea matemática, distinguiendo las posibles secuencias de prácticas operativas y discursivas que el resolutor podría implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes movilizados y los procesos matemáticos involucrados.

Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas. Describimos aquí un ejemplo de diseño de una intervención formativa para desarrollar la mencionada competencia en profesores de matemáticas en formación de un Máster en Educación Secundaria. En la sección 2, se describe el marco teórico y el método, así como la descripción de antecedentes de investigaciones sobre la competencia de análisis epistémico y cognitivo. Asimismo, se fundamentan aspectos propios de la visualización y del razonamiento diagramático, aspectos didáctico-matemáticos claves en la experimentación. El diseño concreto propuesto, su interés, objetivos y desarrollo previsto se muestra en la sección 3. Finalmente, se razona la importancia del estudio realizado y su implicación para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO, MÉTODO Y ANTECEDENTES

El planteamiento del problema indicado está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

La metodología aplicada se inscribe dentro del enfoque metodológico del *diseño didáctico* (Kelly, Lesh y Baek, 2008) o *ingeniería didáctica* (Godino et al., 2013), según la cual el diseño se desarrolla en cuatro fases: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. Aunque hemos realizado un diseño completo con 54 estudiantes de un Máster en Educación Secundaria, exponemos aquí, por limitaciones de espacio, únicamente las dos primeras fases. Antes, analizamos algunos antecedentes y un análisis sobre la visualización y el razonamiento diagramático, aspectos didáctico-matemáticos claves en la experimentación.

Competencia de análisis epistémico y cognitivo

En el diseño y análisis didáctico, el docente debe poseer la competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar los conocimientos didácticos existentes sobre el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe: a) tener el nivel de competencia matemática suficiente para llevar a cabo la práctica matemática, operativa y discursiva, en la etapa donde imparte; b) poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino et al., 2007), valorando su eficacia y su coste.

La tarea de análisis que proponemos a los profesores en formación en este diseño instruccional supone una evolución en la técnica de análisis ontosemiótico descrita en Godino et al. (2012). Se distinguen dos fases: a) resolución de la tarea y su descomposición en prácticas operativas y discursivas simples o elementales; b) introducción como unidades de análisis ontosemiótico de las prácticas identificadas.

Visualización y razonamiento diagramático

En muchas ocasiones, para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, etc., con la presunción de que tales materializaciones constituyen modelos de los conceptos matemáticos y de

las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas, sino también para su propia construcción.
Arcavi (2003) considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles. Duval (2006) atribuye un papel esencial al tratamiento de los signos dentro de cada sistema y la conversión entre diferentes sistemas de representación semiótica. Dörfler (2003) sostiene que un amplio "inventario" de diagramas, sus propiedades y relaciones, apoya y ocasiona su uso creativo.
El profesor de matemáticas debe ser consciente de las relaciones entre las representaciones visuales, diagramáticas o de cualquier otro tipo, y los objetos matemáticos no ostensivos que les acompañan necesariamente. También debe conocer los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015). Esta hipótesis de trabajo condiciona el diseño instruccional que se muestra a continuación.

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Objetivos, contenidos y metodología

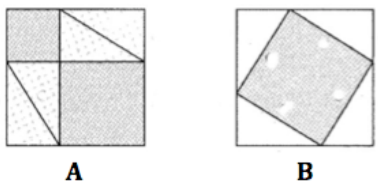
El diseño instruccional se orienta al logro de los siguientes objetivos: en primer lugar, caracterizar la visualización y el razonamiento diagramático (VRD) y analizar su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas mediante visualización y razonamiento diagramático.
Los contenidos didáctico – matemáticos implicados son: conocimientos implicados en la conceptualización y uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento diagramático.
Se propone la siguiente metodología instruccional:

1) Lectura y discusión del texto: Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco, y Contreras (2015).
2) En equipos de 3-4, resolver tareas similares a la descrita en la sección 3.2 e identificar los conocimientos matemáticos movilizados en su resolución, distinguiendo los lenguajes visual y analítico, así como los objetos no ostensivos implicados.
3) Presentación y discusión de resultados.

Tarea y análisis *a priori*

En la figura 1 aparece la tarea propuesta.

1) *¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? ¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras? Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas*.



2) *Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea.* (Enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea, los objetos implicados y sus significados)

Figura 1. Tarea

En la práctica matemática se movilizan objetos *ostensivos* (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El resolutor toma decisiones para garantizar la eficacia de la práctica, en su resolución o para su comunicación. La resolución esperada de la tarea imbrica lenguajes natural, diagramático y algebraico, según estándares de idoneidad (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Así, en la formación inicial de docentes de secundaria, se espera la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas en la tarea a):

1) Se supone que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas a, b, y c (figura 2).

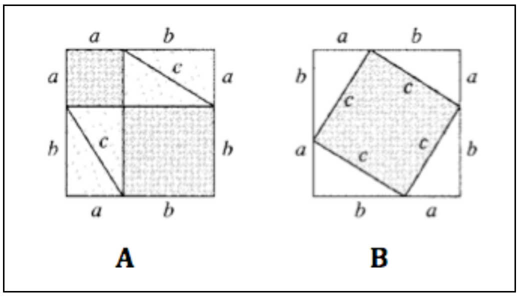
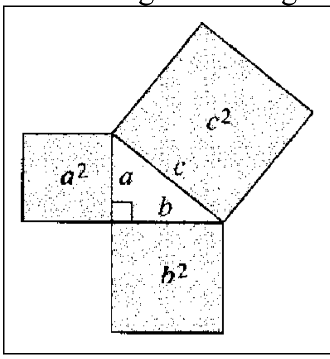


Figura 2. Hipótesis métricas necesarias

2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud ($a + b$).
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2+ b^2$.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 3).



$C^2 = A^2 + B^2$

Figura 3. Determinación del Teorema de Pitágoras

8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Como síntesis de la respuesta esperada a la parte b), en la primera columna de la tabla 1, incluimos de, manera abreviada, las prácticas textualizadas 1) a 8) mencionadas. En la segunda columna mostramos los objetos matemáticos no ostensivos, los cuales constituyen el contenido (o significado) de las palabras o expresiones que conforman las prácticas. Además de estas funciones semióticas, que relacionan de manera referencial los objetos de la primera con los de la segunda columna, es posible identificar otras funciones semióticas de carácter operacional que dan cuenta del uso y finalidad de las distintas prácticas y su secuenciación.

No es posible, por limitaciones de espacio, incluir un análisis más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo referencial (un objeto refiere a otro objeto) como operacional (uso pragmático de los objetos); p. e., los objetos no ostensivos se relacionan con sus respectivas definiciones o enunciados textuales, y desempeñan una función en el seno de las prácticas.

Asimismo, es preciso señalar que en todo el proceso explicativo – demostrativo analítico los procesos de *particularización* (concreción de los conceptos a las figuras particulares) y *generalización* (las figuras concretas son representantes de la clase de figuras semejantes) están presentes.

Tabla 1. Conocimientos implicados en las prácticas

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	**Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos**	**Uso e intencionalidad de las prácticas**
Enunciado: *¿qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?* ...	- conceptos: área; suma y comparación de áreas; figura geométrica.	El texto, con lenguaje natural y diagramático, significael *enunciado* de la tarea. Se pretende una prueba visual del teorema de Pitágoras.
1) Aceptación de que las figuras trazadas en A y B son, respectivamente, cuadrados y triángulos rectángulos de lados las indeterminadas a, b, y c (figura 2).	- conceptos: cuadrado; triángulo rectángulo; lado; longitud; cantidad indeterminada.	Se establecen las hipótesis geométricas y métricas necesarias. El uso de indeterminadas confiere generalidad al razonamiento.
2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a + b).	- proposiciones: los cuadrados exteriores (triángulos) son congruentes. - argumentos: los cuadrados exteriores tienen el mismo lado (a+b); los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.	Se justifica que los cuadrados A y B son congruentes. (a+b) refiere a la suma de las medidas de los segmentos a y b.
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.	- proposiciones: los triángulos son congruentes. - argumentos: los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.	Se justifica que los triángulos son congruentes. Es una condición necesaria para la práctica 4.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro	- concepto: adición de áreas. - proposición: dos áreas son iguales si representan la misma extensión de superficie, aunque	Se justifica la igualdad de las áreas sombreadas. Es una respuesta a la cuestión

triángulos iguales.	las superficies tengan distinta forma.	a).
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2 + b^2$.	- concepto: adición de áreas; - proposición y su justificación: basada en la aditividad del área y en el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado.	Se pretende relacionar la parte sombreada en A con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos . Se expresa esta relación de manera algebraica para darle generalidad.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.	- concepto: cuadrado y su área. - procedimiento: cálculo del área del cuadrado a partir de su lado	Se pretende relacionar la parte sombreada en B con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 3).	- conceptos: cateto, hipotenusa y área de un triángulo rectángulo. - proposición: es posible establecer una relación entre las áreas de los cuadrados de lados el triángulo rectángulo - argumento: gráfico a partir de los diagramas de la figura 2.	Identificación del teorema de Pitágoras.
8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$	- concepto: triángulo rectángulo. - proposición: teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$ - argumento: relación entre medidas de áreas de figuras geométricas y valores numéricos de longitud.	Enunciado con lenguaje natural del teorema de Pitágoras y con lenguaje algebraico la fórmula como expresión sinóptica del teorema.

El análisis incluido en la tabla 1 corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo). La tabla 1 muestra en particular que existe una estrecha imbricación entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales, los objetos ostensivos y no ostensivos y los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

Nuestro análisis ha revelado que el uso de diagramas apoya la formulación de conjeturas, pero la intuición y visualización debe completarse con el reconocimiento de la trama de objetos matemáticos no ostensivos implicados en la deducción de las proposiciones geométricas. Así mismo, el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas y el progreso en la tarea. Además es preciso observar que los medios de expresión son “artefactos” (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos, que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

Consideramos que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica matemática escolar. Además, debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

A MODO DE CONCLUSIÓN: UTILIDAD E INTERÉS DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES

El diseño instruccional descrito, basado en el análisis de prácticas, objetos y procesos, lo estamos experimentando con diversos grupos de estudiantes y diferentes problemas matemáticos. La actividad es un reto para los profesores en formación, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de diseñar e implementar situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central sea el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

Siguiendo la propuesta de Font, Planas y Godino (2010), el ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y del análisis de las relaciones duales epistémico-cognitivas, otros tres tipos de análisis: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Dörfler, W. (2003).Diagrams as means and objects of mathematical reasoning.Developments in mathematics education in German-speaking countries.Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010).Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(2), 89-105.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7(2), 1-21.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013) Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 2810-2819). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (En revisión).

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 359-361.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). Handbook of design research in methods in education.Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching. New York: Routledge.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. Educaçao Matematica Pesquisa, 16(4), 1089-1110.

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).