

SESGOS Y ESTRATEGIAS PARA LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES REVELADAS POR ANÁLISIS DE GRUPOS EN SEGUNDO CICLO BÁSICO¹

Middle schoolers's biases and strategies for comparing fractions revealed by clustering analysis

Gómez, D. M.^a, y Dartnell, P.^b

^aCentro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE), Universidad de Chile,

^bCentro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE),
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA (DIM),

CENTRO DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO (CMM), UNIVERSIDAD DE CHILE;

CORREOS ELECTRÓNICOS: DGOMEZ@CIAE.UCHILE.CLA, DARTNELL@DIM.UCHILE.CLB

Resumen

Aprender fracciones es un desafío matemático considerable del segundo ciclo de enseñanza básica. Los estudiantes muchas veces usan, intuitivamente, sesgos y estrategias para la realización de tareas como la comparación de fracciones. En el presente trabajo, investigamos la variedad de sesgos y estrategias usadas por 490 estudiantes de segundo ciclo básico para responder a una tarea computarizada de comparación de fracciones. Los resultados promedio indican la presencia de un fuerte sesgo hacia razonar basados sólo en los numeradores y denominadores de las fracciones. Los resultados de un análisis de grupos complejizan esto, revelando que el razonamiento sesgado es sólo uno de al menos cinco diversos modos de razonar en la comparación de fracciones. Finalmente, argumentamos que el descubrimiento de estas diferencias entre grupos de estudiantes es una contribución tanto para la investigación como para la práctica pedagógica.

Palabras clave: *fracciones, comparación, sesgo, estrategia, razonamiento.*

Abstract

Learning fractions is one important mathematical challenge in middle school. Students often intuitively deploy biases and strategies for tasks like fraction comparison. In the present work, we investigated the variety of biases and strategies used by 490 middle schoolers to answer to a computerized fraction comparison task. Average results indicate the presence of a strong bias towards reasoning based on the fractions' numerators and denominators only. Clustering results enrich this picture by revealing that biased reasoning is only one of at least five distinct manners of reasoning in the fraction comparison task. We argue that discovering these differences between groups of students is a relevant contribution for both research and teaching practices.

Keywords: *fractions, comparison, bias, strategy, reasoning.*

INTRODUCCIÓN

Un elemento importante de la competencia matemática es la capacidad para hacer un uso flexible de los conceptos y procedimientos durante el razonamiento matemático, e incluso la ejecución de las operaciones aritméticas básicas está sujeta al uso de una variedad de estrategias (e.g. Ashcraft, 1990). Estas estrategias pueden ser aplicadas por distintos estudiantes en diverso grado. En ocasiones, ciertos estudiantes aplican estrategias incorrectas que reflejan problemas profundos de

concepto, los cuales requieren importantes esfuerzos por parte de los educadores para su identificación y corrección. La relevancia de esta variabilidad en las concepciones y estrategias que poseen los estudiantes crece en modo importante cuando éstos disponen de múltiples representaciones posibles, como es en el caso del aprendizaje de fracciones y números racionales. Los racionales pueden ser comprendidos como razones (ratios), operadores, cuocientes, o medidas, entre otras posibilidades (Kieren, 1976). Se vuelve entonces necesaria, para un correcto aprendizaje de las fracciones, la habilidad para distinguir entre las magnitudes de las fracciones como un todo en sí mismas y las magnitudes de los números naturales que las forman (i.e. sus numeradores y denominadores). Investigaciones con estudiantes en edad escolar muestran que esta distinción está muchas veces ausente (e.g. Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, y Dartnell, 2014), e incluso trabajos con participantes adultos y con matemáticos profesionales revela evidencia de una interferencia entre ambos tipos de magnitud (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof, y Verschaffel, 2013; Vamvakoussi, Van Dooren, y Verschaffel, 2012). Para estudiar el conflicto entre las magnitudes de las fracciones y aquéllas de sus componentes, estos y otros estudios han utilizado tareas de comparación de fracciones en donde el concepto de *congruencia* juega un rol crucial. Decimos que un par de fracciones (de ahora en adelante, un *ítem*) representa una comparación *congruente* cuando las magnitudes numéricas de la fracción, del numerador y del denominador se maximizan todas en la misma fracción. Los ítems *incongruentes*, en tanto, son aquéllos en los cuales el numerador y el denominador mayores son los que conforman la fracción menor. En la Figura 1 se puede apreciar ejemplos de un ítem congruente y uno incongruente. La idea de base detrás de esta noción de congruencia es la siguiente: la fracción que uno seleccionaría como mayor, en el caso de fijarse sólo en las magnitudes de sus numeradores y denominadores, es la correcta en el caso de los ítems congruentes y la incorrecta en el caso de los ítems incongruentes. Este patrón (ítems congruentes correctos e ítems incongruentes incorrectos) es exactamente el que se observa en ciertos estudios con escolares (e.g. Gómez et al., 2014). Sin embargo, los análisis realizados por estos investigadores se enfocaron principalmente en los resultados promedio a nivel de grupo en lugar de en las estrategias usadas por los estudiantes. En este artículo, presentamos los resultados de un análisis de grupos (*clustering analysis*) realizado a los datos recolectados por Gómez et al. (2014), buscando agrupar a los estudiantes de acuerdo a sus estrategias para comparar fracciones.

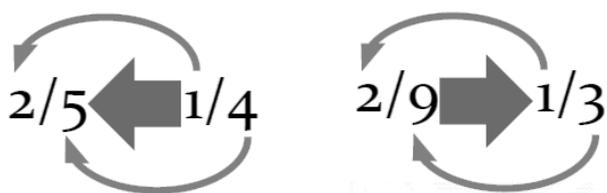


Figura 1. Ejemplos de pares de fracciones representando una comparación congruente (izquierda) y una incongruente (derecha). En el caso congruente, la fracción mayor posee además el numerador y el denominador mayores. En el incongruente, en cambio, la fracción mayor posee el numerador y el denominador menores.

MÉTODO

Participantes

Quinientos dos escolares de 5º, 6º y 7º básico participaron en este estudio, pertenecientes a cinco colegios de comunas periféricas del Gran Santiago.

Tarea de comparación de fracciones

La tarea consistió en 24 pares de fracciones que debían ser comparados, la cual fue presentada a los estudiantes por computador. Siguiendo estudios previos en la materia (e.g. Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi et al., 2012), los ítemes se dividían en congruentes e incongruentes (doce de cada uno). Junto a esto, dentro de cada categoría la mitad de los pares tenía una componente en común (numerador o denominador) mientras que en la otra mitad no había componentes comunes a ambas fracciones.

Los estudiantes tenían que responder, en cada ítem, cuál de las dos fracciones presentadas era la mayor. Para esto disponían de un máximo de 10 segundos por ítem, después de los cuales el ítem se consideraba omitido y el computador pasaba al ítem siguiente. No había lápiz y papel disponible, y se le indicó a los estudiantes que, en caso de dudas, respondieran siguiendo su intuición. Para más detalles sobre la tarea y la lista completa de ítemes, referimos al lector a Gómez et al. (2014).

Análisis de grupos

Del total de estudiantes, descartamos a doce de ellos quienes se demoraron más del tiempo permitido en tres o más ítemes del total de 24. Para los otros 490 estudiantes, calculamos sus porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los cuatro tipos de ítem (congruente/incongruente, con/sin componentes en común) y usamos estos puntajes para ejecutar un algoritmo de agrupación (*k*-means clustering; el lector interesado en conocer los detalles y variantes de este algoritmo puede ver la revisión publicada por Jain, 2010) para obtener *k* grupos de estudiantes. Consideramos valores de *k* entre 2 y 10, eligiendo *k* = 6 como la mejor solución gracias a un indicador calculado sobre la base de variables como porcentaje de varianza explicada y desviación estándar media de los grupos, entre otras.

RESULTADOS

La Tabla 1 presenta los resultados de la muestra completa. Para analizar los efectos de la congruencia y de la presencia o ausencia de componentes comunes, utilizamos una regresión logística mixta donde consideramos la congruencia y la presencia o ausencia de componentes en común como factores fijos y a cada estudiante como un factor aleatorio. Esta regresión reveló que el efecto de la presencia o ausencia de componentes comunes no es estadísticamente relevante (*odds ratio* = 0.06, X^2 de Wald = 1.13, grados de libertad = 1, $p = .29$), mientras que el efecto de congruencia sí lo es (*odds ratio* = 1.6, X^2 de Wald = 698.29, grados de libertad = 1, $p < .0001$). Más aún, la diferencia de puntajes entre los ítemes congruentes e incongruentes fue distinta dependiendo de la presencia o ausencia de componentes en común (interacción: *odds ratio* = 0.6, X^2 de Wald = 40.58, grados de libertad = 1, $p < .0001$). Los estudiantes obtuvieron puntajes del orden de 40% en los ítemes incongruentes independientemente de la presencia o no de un denominador o numerador común, y puntajes del orden de 70% y 80% para ítemes congruentes que tenían una componente común o no, respectivamente. Estos resultados generales sugieren que la variable de congruencia juega un importante rol en los resultados de los estudiantes.

Sin embargo, los resultados del análisis de grupos (presentados en la Tabla 2) muestran un panorama bastante diferente. Lo primero que observamos, en línea con los resultados de la muestra completa, es la presencia de dos grupos cuyas respuestas fueron altamente influenciadas por la variable congruencia, los grupos A y E. Los estudiantes del grupo A respondieron, como se esperaba, la gran mayoría de los ítemes congruentes correctamente y la gran mayoría de los ítemes incongruentes incorrectamente. Los estudiantes del grupo E, en cambio, mostraron un patrón menos marcado pero en la dirección opuesta a la esperada y mostrada por la muestra completa (mayores puntajes para los ítemes incongruentes).

El segundo mayor grupo fue el B, que reunía a los estudiantes que tenían los puntajes mayores si se consideraba la tarea completa. Este grupo, sin embargo, presentaba una caída de alrededor de 20% cuando debía comparar ítemes congruentes sin componentes comunes. El grupo D presentaba un patrón similar de respuestas, pero con una caída mucho más pronunciada.

El grupo C estaba compuesto por estudiantes que mostraban un éxito relativo para comparar fracciones siempre que éstas tuvieran una componente en común (numerador o denominador), pero no sabían responder cuando las fracciones no tenían componentes en común. Finalmente, el grupo F mostró un patrón de puntajes bajo 50% para todos los tipos de ítem.

Tabla 1. Resultados promedio de la muestra completa, desgregados por tipo de ítem.

	Congruente	Incongruente	Total
Con una componente común	82 %	41 %	62 %
Sin componentes comunes	73 %	40 %	56 %
Total	78 %	40 %	59 %

Tabla 2. Grupos, sus tamaños, y puntajes de los estudiantes por cada tipo de ítem

Grupo	Tamaño	Con una componente común		Sin componentes comunes	
		Congruente	Incongruente	Congruente	Incongruente
A	245	93 %	4 %	97 %	2 %
B	84	94 %	94 %	74 %	93 %
C	48	84 %	67 %	57 %	55 %
D	43	89 %	94 %	18 %	96 %
E	38	20 %	85 %	15 %	90 %
F	32	38 %	25 %	48 %	29 %

DISCUSIÓN

El análisis de grupos reveló diferencias importantes entre patrones de respuestas de los estudiantes en nuestra tarea de comparación de fracciones. Un elemento clave es que estos distintos patrones reflejan distintos patrones de razonamiento para la comparación de fracciones, constituyendo así un gran paso adelante respecto de análisis realizados en investigaciones previas que se enfocaron solamente en los puntajes promedio de la muestra completa (e.g. Gómez et al., 2014).

La mayoría de los estudiantes (el grupo A, que contenía la mitad de la muestra total) comparó fracciones guiada por la congruencia de cada ítem, es decir eligiendo sistemáticamente como la fracción más grande aquella con las mayores componentes. Este patrón de razonamiento era esperado, dada la evidencia disponible con escolares y adultos (Gómez et al., 2014; Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi et al., 2012). No obstante, un grupo más pequeño (E, 8% de la muestra) mostró un comportamiento opuesto, vale decir seleccionó como la fracción más grande aquella con las componentes menores. Las respuestas de este último grupo, a pesar de no coincidir con lo esperado en el contexto de la congruencia, están en línea con los resultados reportados en un estudio que entrevistó a escolares acerca de los métodos que usaban para comparar fracciones (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Los grupos B y D (los cuales incluyen al 17% y 9% de la muestra, respectivamente) mostraron patrones de puntajes similares, contestando alrededor del 90% correcto todos los tipos de ítem

excepto aquéllos congruentes sin componentes en común. Gómez et al. (2014) propusieron que este patrón puede originarse en una tendencia a seleccionar como la fracción mayor aquélla con el denominador más pequeño. Este método heurístico no es aplicable en los ítemes donde las fracciones tienen el mismo denominador pero, dada nuestra definición de congruencia, responde correctamente todos los ítemes incongruentes e incorrectamente todos los ítemes congruentes sin componentes comunes. Asumiendo que los estudiantes responden los ítemes con un denominador común usando una estrategia *ad hoc*, notamos que los puntajes de los estudiantes del grupo D se alinean muy bien con esta heurística. El grupo B, en cambio, puede ser descrito como presentando un comportamiento mixto entre (a) responder correctamente todos los ítemes y (b) una tendencia a usar la mencionada heurística del menor denominador. Una pregunta de gran interés para la investigación futura se relaciona con examinar cuán claramente distinguibles son los grupos B y D. Es posible que ambos grupos compartan una base de raciocinio similar, fluctuando entre el uso de las dos estrategias/heurísticas recién nombradas, variando solamente en las probabilidades de activación que asignan a cada una de ellas. Es también posible, alternativamente, que ambos grupos difieran de modo cualitativo en su entendimiento conceptual de las fracciones o de la comparación de fracciones.

Los puntajes de los estudiantes del grupo C (10% de la muestra) nos indican que alcanzan relativo éxito sólo cuando comparan pares de fracciones que comparten un numerador o denominador común, y más aún que en estos tipos de ítem muestran un claro efecto de congruencia. Estos estudiantes parecen tener conocimientos básicos acerca de qué son las fracciones, lo cual les permite razonar acerca de los ítemes que comparten una componente, pero carecen del conocimiento, procedimientos y las estrategias necesarias para enfrentar los ítemes más complejos.

Finalmente, el grupo F (7% de la muestra) exhibe un patrón de respuestas difícil de interpretar en ausencia de más información. Es posible que el algoritmo de agrupación haya formado este grupo juntando a los estudiantes cuyos puntajes no eran identificables con los de ninguno de los otros cinco grupos.

Al menos un par de los hallazgos obtenidos de nuestro análisis ponen en duda la idea de que los estudiantes en general sufren de un sesgo que los lleva a razonar de acuerdo a la variable de congruencia, que es el modo como se había interpretado los resultados de varios estudios previos. Primeramente, la existencia del grupo E, donde las respuestas de los estudiantes apuntan en la dirección opuesta a la esperada a la luz de la congruencia. Segundo, los grupos B y D presentan altos puntajes excepto en un tipo particular de ítem, que corresponde precisamente a un grupo de ítemes congruentes (aquéllos que no poseen componentes en común). Estos resultados sugieren, al menos, que un eventual sesgo hacia la congruencia no es en muchos casos la idea fuerza principal del razonamiento de los estudiantes. El uso de estrategias o heurísticas específicas para la comparación de fracciones podría, a cambio, constituir una mejor explicación para algunas de nuestras observaciones. Los estudiantes del grupo A podrían estar respondiendo de acuerdo a una regla de “componentes grandes, fracción grande”; aquéllos en el grupo E de acuerdo a “componentes chicas, fracción grande”; y los del grupo D de acuerdo a “denominador chico, fracción grande”. Es todavía posible que la congruencia juegue un rol apreciable en este contexto, explicando por ejemplo por qué el grupo A es significativamente más numeroso que el E, o bien por qué no se observa la presencia de un grupo similar a C donde los ítemes incongruentes tengan asociados mayores puntajes que los congruentes. Sugerimos al lector revisar un argumento alternativo dado por Gómez y Dartnell (2015) que cuestiona la relevancia cognitiva del concepto de congruencia en el marco de la comparación de fracciones.

VENTAJAS Y LIMITACIONES

En resumen, en este artículo hemos descrito en parte la gran variabilidad que hay en estudiantes de segundo ciclo básico en cuanto a las estrategias que utilizan para comparar fracciones. Queremos hacer notar que la tarea de comparación de fracciones fue capaz de mostrar una rica variedad de posibles modos de razonamiento a pesar de su brevedad. En efecto, la tarea constaba de 24 ítems y cada uno de ellos tenía un tiempo límite de 10 segundos, lo que significa que la duración total del test fue de aproximadamente 4 minutos. Como esta tarea fue presentada en computador, es posible aplicarla en paralelo a grupos de estudiantes y simplificar la recolección de datos.

La aplicación por computador del cuestionario, junto con la ausencia de lápiz y papel para ayudarse y con el breve tiempo permitido para responder cada ítem, contribuyen de modo importante a sacar a la superficie las intuiciones básicas que los estudiantes tienen acerca de las fracciones. En este contexto, los estudiantes deben responder en modo espontáneo y sin recurrir a algoritmos escritos. Sin embargo, esta ventaja conlleva una limitación: este formato de tarea puede presentar complicaciones mayores para los estudiantes con baja memoria de trabajo (el lector interesado en conocer un ejemplo de investigación que muestra la relación de la memoria de trabajo con el cálculo mental puede revisar Alsina y Sáiz, 2004), quienes se beneficiarían de tener lápiz y papel al menos para poder escribir resultados intermedios. No se sabe tampoco cuánto afecta este formato de tarea a los estudiantes con un cierto grado de ansiedad matemática. Una revisión de la literatura conducida por Ashcraft y Krause (2007) muestra que tareas de dificultad mediana o alta, como es el caso de la comparación de fracciones en un caso general, inducen resultados más bajos en personas con ansiedad matemática. Un tema de interés para la investigación futura consiste, por tanto, en determinar cómo se comparan los resultados en comparación de fracciones usando el formato de tarea aquí presentado o usando uno tradicional de papel y lápiz.

IMPLICANCIAS

La posibilidad de descubrir, al menos indicativamente, los distintos patrones de razonamiento que los estudiantes aplican para comparar fracciones tiene relevancia tanto para efectos de la investigación en Educación Matemática y aquella en Neurociencia del aprendizaje matemático, como para la práctica pedagógica. En las siguientes secciones, describimos brevemente los beneficios que un enfoque como el utilizado en este artículo podría tener para estas áreas.

Para la investigación cualitativa en educación matemática

Un gran número de investigaciones en Educación Matemática utilizan una metodología cualitativa, donde el uso de entrevistas guiadas o procedimientos de pensamiento en voz alta (*think aloud*) es muy común. Estos estudios aportan elementos importantes desde el punto de vista del entendimiento del razonamiento explícito que los estudiantes realizan, pero requieren una alta inversión en términos de tiempo y de recursos materiales y humanos para la realización de las entrevistas y su posterior análisis. En este contexto, un cuestionario de simple y breve aplicación que permita obtener una indicación preliminar acerca de las estrategias y modos de pensamiento de un gran número de estudiantes permitiría al investigador seleccionar en un modo más dirigido a un subconjunto de ellos para la realización de una entrevista en una sesión posterior. Esta idea permitiría al investigador, a su vez, seleccionar a los entrevistados en modo balanceado desde los distintos grupos revelados por el análisis de grupos, con la ventaja de poder obtener un muestreo más variado de entrevistados y además llegar más fácilmente a los grupos minoritarios.

Para la investigación en neurociencia del aprendizaje matemático

En años recientes ha surgido un creciente interés por estudiar cómo la mente y el cerebro humanos logran hacer matemáticas. Muchos de estos estudios utilizan métodos tecnológicamente avanzados como la electroencefalografía (EEG) y la resonancia magnética funcional (*functional magnetic resonance imaging*, fMRI). Sugerimos al lector interesado en saber más acerca de estas técnicas revisar el libro de Maestú Unturbe, Ríos Lago, y Cabestrero (2007), y los artículos de Barraza, Gómez, Oyarzún, y Dartnell (2014) y de Ischebeck, Schocke, y Delazer (2009) para ejemplos de investigaciones sobre fracciones que utilizan estas técnicas.

La validez de los resultados obtenidos a partir de estos métodos depende del grado en que se cumpla una suposición crucial, a saber el que los participantes de un estudio resuelven un problema matemático en cuestión usando los mismos procesos mentales. En el caso de la comparación de fracciones, sin embargo, observamos que los estudiantes aplican muy diversas estrategias a pesar de presentárseles la misma tarea. Es por tanto necesario que se chequee que los participantes de estudios futuros, especialmente en el caso de trabajar con escolares o con adultos no expertos matemáticos, tengan un mínimo nivel de homogeneidad respecto a sus estrategias utilizadas. En el caso del trabajo sobre fracciones, esto podría lograrse a través de la aplicación de una tarea breve como la presentada en este artículo.

Para la práctica pedagógica

Un elemento crítico para facilitar la interacción de enseñanza y aprendizaje en el aula es el uso de metodologías de evaluación cuyo objetivo sea, más allá de generar un índice de logro o no-logro, proveer información para la práctica pedagógica (Pegg, 2002). Un enfoque como el presentado en este artículo podría ser útil para esto, no sólo en el contexto de la comparación de fracciones. Un cuestionario breve, pero construido para la detección de ciertos errores básicos, puede permitir al docente descubrir grupos de estudiantes que comparten ciertas concepciones erradas. Este conocimiento adicional permite aumentar el conocimiento pedagógico del contenido del docente (e.g. Vergara Díaz y Cofré Mardones, 2014), por cuanto le puede ayudar a comprender las fuentes que causan las respuestas incorrectas. Asimismo, este conocimiento posibilita el diseño de una estrategia pedagógica adecuada para cada tipo de concepción errada, por ejemplo a través de la selección de ejemplos adecuados para su resolución en el aula, que pongan en evidencia por qué cierta estrategia (e.g. “denominador chico, fracción grande” en el contexto de la comparación de fracciones con diferentes numeradores y denominadores) no siempre es válida.

Referencias

- Alsina, Á., y Sáiz, D. (2004). *El papel de la memoria de trabajo en el cálculo mental un cuarto de siglo después de Hitch*. *Infancia y Aprendizaje*, 27(1), 15-25.
- Ashcraft, M. H. (1990). *Strategic processing in children's mental arithmetic: A review and proposal*. En D. F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp. 185-212). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Ashcraft, M. H., y Krause, J. A. (2007). *Working memory, math performance, and math anxiety*. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14(2), 243-248.
- Barraza, P., Gómez, D. M., Oyarzún, F., y Dartnell, P. (2014). *Long-distance neural synchrony correlates with processing strategies to compare fractions*. *Neuroscience Letters*, 567, 40-44.
- Gómez, D. M., y Dartnell, P. (2015). *Is there a natural number bias when comparing fractions without common components? A meta-analysis*. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Psychology of Mathematics Education conference* (Vol. 3, pp. 1-8). Hobart, Australia: PME.

- Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., y Dartnell, P. (2014). *Exploring fraction comparison in school children*. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 3, pp. 185-192)*. Vancouver, Canada: PME.
- Ischebeck, A., Schocke, M., y Delazer, M. (2009). *The processing and representation of fractions within the brain: An fMRI investigation*. *NeuroImage*, 47, 403-413.
- Jain, A. K. (2010). *Data clustering: 50 years beyond K-means*. *Pattern Recognition Letters*, 31, 651-666.
- Kieren, T. E. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. En R. A. Lesh y D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop (pp. 101-144)*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Maestú Unturbe, F., Ríos Lago, M., y Cabestrero, R. (2007). *Neuroimagen: Técnicas y procesos cognitivos*. Barcelona: Elsevier Masson.
- Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., y Verschaffel, L. (2013). *The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians*. *Learning and Instruction*, 28, 64-72.
- Pegg, J. (2003). *Assessment in Mathematics*. En Royer, J. M. (Ed.) *Mathematical Cognition (pp. 227-259)*. Information Age Publishing.
- Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). *The development of students' understanding of the numerical value of fractions*. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). *Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults*. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 344-355.
- Vergara Díaz, C., y Cofré Mardones, H. (2014). *Conocimiento pedagógico del contenido: ¿El paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 40, 323-338.

ⁱ Los autores agradecen a los estudiantes, padres y colegios que participaron en este estudio. Este trabajo fue apoyado económicamente por los programas CONICYT PIA/Basal FB0003 y PAI/Academia 79130029.