UN MODELO MULTINTERPRETATIVO PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL.

Mulinterpretative model for the study of linear transformation concept.

Maturana I. [a], Parraguez M.[b], Trigueros M.[c]

UPLA. PUCV. Chile ITAM México.

isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl. trigue@itam.mx

Resumen

Realizamos un estudio cognitivo del concepto Transformación Lineal (TL) desde donde obtuvimos indicadores de los elementos constituyentes para la evolución de la construcción mental esquema asociada al concepto. En la investigación propusimos un modelo multinterpretativo que sustentado fundamentalmente por la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), el que integra interpretaciones del concepto TL, las que permitieron identificar en forma detallada componentes esenciales para la evolución de su esquema.

Palabras clave: *transformaciones lineales, APOE, indicadores, mecanismos del esquema*

Abstract

We conducted a study of cognitive concept Linear Transformation (TL) from where we got indicators of the constituent elements for the development of mental construction scheme associated with the concept. In our research we proposed a multinterpretative model supported mainly by the theory APOE (Actions , Processes , Objects and Scheme) (Arnon , Cottril , Dubinsky , Oktaç , Roa , Trigueros and Weller, 2014) , which integrates interpretations of TL concept that allowed us to identify in detail essential components for the development of their scheme .

Keywords: *linear transformations, APOS, indicators, mechanisms of the scheme.*

INTRODUCCIÓN

Realizamos un estudio profundo del concepto TL, del que concluimos que existen tres formas en que este se presenta en los planes y programas de los cursos de álgebra lineal, estas son: funcional, matricial y geométrica. Ha estas formas las llamamos interpretaciones del concepto, cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articuladas por el concepto combinación lineal; es así que nuestro estudio propuso, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, un modelo Multinterpretativo para su estudio. Esto es, desde la conformación de descomposiciones genéticas para cada interpretación del concepto se obtuvo una descripción detallada de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción del esquema del concepto TL, dichas descomposiciones genéticas aparecen especificadas en Alme 27, bajo el título “Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal” (Maturana, Parraguez ,2014) y en acta CIBEM VII, bajo el título “Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica” (Maturana, Parraguez ,2013).

Son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado la problemática de enseñanza-aprendizaje del concepto TL; podemos identificar las contribuciones de Uicab y Oktaç (2006), Molina y Oktaç (2007) sus investigaciones abordan la problemática de aprendizaje en un contexto geométrico, identificando aquellos modelos sustitutivos que pueden tener los estudiantes sobre el concepto TL y el grado de interferencia de estos. Roa y Oktaç (2010) basadas en la teoría APOE proporcionan como resultado de investigación dos formas de construcción para concepto TL en su interpretación funcional. En la interpretación matricial, son los aportes de Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) quienes centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. Nuestra investigación aporta una mirada integradora del concepto, lo que permitió, por una parte identificar indicadores para los niveles del esquema, y por otra los mecanismos involucrados en su evolución.

Teoría APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC, que actualmente se presenta en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014), es un marco teórico cognitivo de la Didáctica de la Matemática, que plantea como una de sus características fundamentales proponer un modelo hipotético de construcción para el aprendizaje de un concepto matemático en estudio. Es así que APOE, como sustento teórico, facilita describir las construcciones y mecanismos mentales que constituyen el esquema de un concepto matemático, en este caso el de TL, en sus tres interpretaciones. En nuestra investigación se documenta en forma detallada dichas construcciones.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema que constituyen las construcciones mentales. La descripción del paso de una construcción mental a otra se logra mediante la explicitación de los mecanismos, entre los que reconocemos la interiorización, la coordinación, la encapsulación y la tematización. Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo; cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Si individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él (ya sean acciones o procesos) y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto, de esta forma, se dice que un proceso ha sido encapsulado.

La noción de esquema se refiere a una colección más o menos coherente de objetos, procesos y otros esquemas. Los esquemas son las construcciones más complejas que podemos determinar de un concepto matemático, y al mismo tiempo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto o proceso y la reacomodación de las estructuras por la construcción de nuevas relaciones entre los componentes del esquema. Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular.

Diseño metodológico

Como diseño metodológico incorporamos el estudio de caso (Stake 2010) a la metodología propuesta por APOE y el grupo RUMEC, consideramos que la complementa ofreciendo criterios específicos para la selección de los estudiantes, lo que nos permitió tipificar al caso estudiado. Es así que se entrevistaron a tres estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática, que fueron seleccionados por mostrar, en un estudio previo, evidencias de poseer construcciones y mecanismos mentales próximos a la construcción mental objeto para cada una de las interpretaciones del concepto. De las entrevistas, se obtuvo el detalle sobre las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en la construcción del esquema para el concepto TL y a la vez, se pudo establecer la evolución en los esquemas mentales de los entrevistados.

El esquema y el modelo multinterpretativo.

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes del caso se basa en un modelo multinterpretativo para el concepto de TL. Consideramos que este, como un concepto unificador para el álgebra lineal, incorpora diferentes interpretaciones, razón por la cual para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las como construcciones mentales objeto o próximas a la de objeto; pensamos que son indispensables para la evolución del esquema del concepto, y que nos permitirán, a su vez, determinar su coherencia, entendida esta última como la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si éste permite solucionar una situación matemática particular, y en tal caso usarlo.

Es así que incorporamos en algunas de las preguntas de la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto TL. Para ello levantamos indicadores (tabla.1) en términos de las construcciones mentales que evidencian cada uno de los niveles de evolución del esquema del concepto TL.

Tabla .1. Construcciones mentales para determinar el nivel del esquema para el concepto TL.

Intra-TL	*Inter-TL*	*Trans-TL*
-Concepto de espacio vectorial real como objeto.	-Concepto de espacio vectorial real como objeto	-Concepto de espacio vectorial real como esquema.
-Concepto de función como proceso.	-Concepto de función como objeto.	-Concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo como objeto.
-Concepto de combinación lineal como proceso.	-Concepto de combinación lineal como proceso.	-Concepto de función como objeto.
-Concepto de kernel como proceso.	-Concepto de kernel como objeto.	-Concepto de combinación lineal como objeto.
-Concepto de dimensión como objeto.	-Concepto de dimensión como objeto.	-Concepto de kernel como objeto.
-Concepto de MATL como proceso.	-Concepto de MATL como objeto.	-Concepto de dimensión como objeto. -Concepto de MATL como objeto.
-Concepto de vector como objeto.	-Concepto de vector como objeto.	-Concepto de vector como objeto.

Por otra parte, deberemos tener en cuenta que un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Es posible que en los análisis de las entrevistas encontremos indicadores de algunos esquemas ya tematizados o cercanos a ello.

Las evidencias.

A continuación presentaremos un extracto de los relatos para dar respuesta a una pregunta clave realizada a los tres entrevistados:

Dada la transformación línea $F: A \subset \mathbb{R}^2 \to A' \subset \mathbb{R}^3$ *, definida por* $[F]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$*, donde* $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ *y* $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$*, determine si esta transformación lineal es un isomorfismo. En caso de ser afirmativa su respuesta establezca el isomorfismo. Si su respuesta es negativa, justifique.*

Extracto de la respuesta de E3:

[E3--1] Me dan una transformación lineal, R^2 a R^3, y me dan la matriz asociada. Y tengo que ver si esa transformación es un isomorfismo.

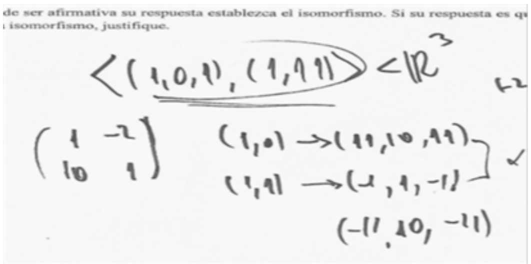

Figura1. Respuesta de E3 a la pregunta.

E3 construye la TL mediante la asignación de los vectores da la base de espacio de partida en imágenes calculadas según la información de las coordenadas dadas en la matriz asociada a la TL, con lo que muestra coordinar la interpretación matricial con la geométrica para dar respuesta. Para calcular dichas coordinadas debió coordinar las construcciones proceso de los conceptos matriz y combinación lineal con el de función. En el diálogo siguiente se profundizan estas ideas.

[Ent-2] ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?

[E3--3] Porque si lo restrinjo aquí la imagen. O sea, No. Sí. Entonces, como, el Kernel tendría que ser cero.

E3 mostró una construcción mental objeto para la matriz asociada, sobre la que puede realizar acciones, pero aún no da evidencias que el esquema correspondiente a dicha interpretación haya evolucionado a un nivel *Trans*-TL, pues no determina desde la matriz si la función es un isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E9:

[E9--1] La dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

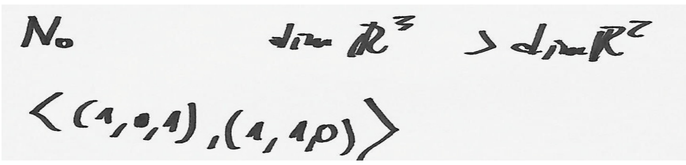

Figura 2. Muestra los argumentos de E9.

[E9--2] No, no es posible, porque si… el espacio en el conjunto es de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo… Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--3] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar... que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo aunque sean iguales.

E9 muestra coordinar las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal. Esto no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de kernel de la TL que le permitiría construir por ejemplo grupo cociente, lo que permitiría a su vez construir un isomorfismo, pero para este caso muestra tener construcciones acción referidas al grupo cuociente, y en términos generales su esquema para el concepto TL es *Inter*-TL. Los mecanismos que permitirían su evolución no se encontraron presentes durante el transcurso de su entrevista.

Extracto de la respuesta de E18:

[E18-1] Sí es un isomorfismo. Cuando hablamos de isomorfismo, en álgebra II, siempre decían que las cosas tenían que tener igual dimensión.

E18 en este tramo de la entrevista hace alusión al teorema de las dimensiones entre espacios vectoriales. Ha mostrado durante el transcurso de la entrevista no coordinar los procesos asociados a los conceptos de base en el espacio de partida con los de combinación lineal y de función mediante la igualdad. Al continuar el relato de esta pregunta, regresa a su concepción de dimensión y establece las bases para dar respuesta.

[E18-2] Que tiene dimensión 2, entonces sí podría haber.

[E18-3] Es que como es un subespacio de R^3 donde está llegando, tiene dimensión 2, entonces a de dimensión 2 a dimensión .Sí se puede.

[E18-4] Pero si esta matriz es inyectiva… invertible…

[E18-5] Entonces si mi determinante es distinto a cero, puede existir la que es… para el otro lado, entonces sí va a ser isomorfismo, porque va a existir una *F'* que vaya de aquí para allá. Entonces veamos si el determinante es distinto a cero. Pero eso es fácil. Es más 20.

[Ent-6] O sea, existe un isomorfismo aquí…

E18 puede dar respuesta a la pregunta, mostrando una construcción proceso de los conceptos de combinación lineal y coordenadas de la imagen de un vector. Hasta ahora pareciera que posee una construcción mental objeto del concepto matriz asociada a la transformación lineal, pero no del teorema, pues no ha realizado acciones sobre éste.

Estos extractos de las entrevistas son solo muestras pequeñas de un trabajo de horas por cada estudiante, por lo que las conclusiones van más allá de lo mostrado.

Conclusiones generales.

Obtuvimos de las entrevistas que el mecanismo que permite el tránsito entre el nivel *Intra*-TL e *Inter*-TL puede definirse como un mecanismo doble en el que se construye, por una parte, una relación entre el proceso combinación lineal y el proceso asociado al espacio vectorial que estructura al último y, por otra parte, se construye una relación entre el proceso de kernel y el proceso MATL como forma de determinar la inyectividad de la función TL. Por su parte, el mecanismo que permite el tránsito entre el nivel Inter-TL y el *Trans*-Tl radica en la posibilidad de determinar, mediante el uso de la combinación lineal, la existencia de una función TL que relacione los espacios vectoriales incluidos en ella. La coherencia del esquema queda determinada por el reconocimiento del papel del objeto combinación lineal en esta relación. Bajo los indicadores anteriores nos fue posible determinar que dos de los tres entrevistados mostraron una evolución de su esquema para el concepto TL. Y por otra parte, el tercer entrevistado no dio evidencias de evolución su esquema, permaneciendo en un nivel *Intra*-TL.

Desde su estudio, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto TL se pone a prueba su esquema. Es así que los tres entrevistados mostraron, en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos LI y LD, combinación lineal, función lineal, inyectiva, matriz, coordenada, MATL, dimensión, kernel, isomorfismo, TFA, cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones; todas dispuestas en nuestras DG, pero la diferencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran elementos que marcaban diferencia permitiéndoles responder a problemáticas referidas al concepto de isomorfismo entre espacios vectoriales, no quedando limitados al teorema de la dimensión. Ambos entrevistados trabajaron la interpretación funcional del concepto TL, poniendo énfasis en la estructura algebraica de espacio vectorial, emergiendo el concepto de grupo cociente vinculado a la estructura de espacio vectorial.

Pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal, mostrando uno de ellos un esquema para el concepto de TL de nivel *Inter*-TL, que en una primera aproximación se pensó podría ser *Trans*-TL, pues logró articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo entre espacios vectoriales, los indicadores antes dispuestos permitieron lograr las evidencias en las dificultades relacionadas con las construcciones mentales asociadas al concepto CL, cuya construcción para lograr una coherencia en el esquema debiera ser objeto, lo que permitiría realizar acciones y desencapsular diferentes procesos involucrados en su construcción. Dicha construcción permite la realización de acciones sobre conjuntos LI o LD a los que se les aplica una TL. Es importante resaltar el papel que juega el objeto CL, tanto en la evolución del esquema TL como en su coherencia. La dinámica de evolución del esquema y el hallazgo del papel que juega en ella constituyen una aportación de este estudio.

Referencias.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.

Maturana, I., Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 771-778. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maturana, I., Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. En SEMUR (Ed), Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1993-2000. Uruguay.

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), pp. 241-273.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.

Stake, R.E. (2010). Investigación con estudio de casos. Barcelona: Labor.

Ubicab, R., Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica. Tesis de doctorado, CICATA-IPN, D.F., México.