ELEMENTOS PARA LA RESIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE TAYLOR A TRAVÉS DE TECNOLOGÍA

Cynthia Almazán Colorado, Landy Sosa Moguel

Universidad Autónoma de Yucatán

almazan.cc@hotmail.com, smoguel@uady.mx

Resumen

Las transformaciones que sufre un saber en su introducción y tratamiento a través de instrumentos tecnológicos pueden dotarlo o hacer que pierda significados. Considerando que mediante la visualización con tecnología es posible propiciar la generación de argumentos de presentación y justificación para la resignificación de un objeto matemático, en esta investigación nos propusimos identificar cuáles son los argumentos y significados que estudiantes de nivel superior construyen sobre la Serie de Taylor, en su interacción con un Sistema de Cálculo Simbólico, con el fin de recabar elementos que permitan sugerir consideraciones didácticas para su tratamiento escolar en vías de su resignificación. Se empleó como metodología la ingeniería didáctica en el diseño y experimentación de actividades, desarrolladas mediante calculadoras graficadoras. La perspectiva teórica de la génesis instrumental permitió explicar la integración tecnológica del estudiante para construir conocimiento matemático.

Palabras clave

Serie de Taylor, argumentación, tecnología, pensamiento variacional, visualización.

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de Marcolini y Perales (2005) se menciona que el tratamiento de la Serie de Taylor en el aula, se ha enfocado más en asuntos de convergencia y lo analítico del cálculo que en las ideas germinales de su génesis, provocando carencia de significado por parte de los estudiantes. Para realizar un cambio en la presentación de la Serie de Taylor se requiere centrarse en las ideas propias de su génesis y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, pues como estos autores afirman, construir significados sobre la Serie de Taylor precisa del desarrollo de nociones, ideas y estrategias variacionales, tales como la noción de cambio y de variación, prácticas de predicción y estrategias como la diferenciación sucesiva de una variable continua.

Aparicio y Cantoral (2006) dan evidencia que un aspecto importante para la construcción de conocimiento matemático referente al Cálculo, es la generación de argumentos discursivos, gestuales y visuales de tipo variacional por parte del estudiante. En diversos trabajos (Sánchez, 2006; Cantoral y Mirón, 2000), se ha observado que a través del uso de tecnología es posible que el estudiante genere argumentos gráficos, algebraicos o numéricos al tiempo que desarrolla nociones y estrategias variacionales, propiciando el entendimiento y resignificación de los conceptos y procesos del Cálculo.

Inmersa en lo anterior, está la idea que para la construcción de conocimiento matemático se hace necesario que el estudiante sea capaz de representar un concepto matemático en por lo menos dos registros distintos de representación semiótica, de tratar esa representación en un mismo registro y de convertir esas representaciones de un registro a otro, tal como refieren Duval (1999) y D'Amore (2005). Una actividad matemática que favorece llevar a cabo esas acciones es la visualización de los conceptos matemáticos (Cantoral y Montiel, 2003).

Por otro lado, la introducción de instrumentos tecnológicos en el aula trae consigo transformaciones en la presentación y tratamiento de los objetos matemáticos. Esas transformaciones pueden ocasionar pérdidas de significado o bien, pueden dotar de significados al concepto matemático: este fenómeno didáctico es conocido como transposición informática. El objetivo de este trabajo fue generar argumentos de presentación y justificación, mediante la visualización de la Serie de Taylor a través de tecnología. Prestando atención a dicho fenómeno didáctico, la intención fue identificar cuáles son los significados que construían los estudiantes sobre la Serie de Taylor al interactuar con un medio tecnológico, en este caso, con calculadoras graficadoras.

En su objeto de estudio, la génesis instrumental trata de entender la forma en que un artefacto tecnológico se va incorporando al conocimiento matemático de un estudiante, convirtiéndolo en un instrumento de aprendizaje que media su actividad y lo incorpora orgánicamente para hacer matemáticas. Esta perspectiva orienta la discusión del papel que juega el uso del instrumento en el conocimiento matemático y el desarrollo de los instrumentos mismos

(Briseño, 2008). Así, "la resolución de actividades de visualización" será el puente que favorecerá la transformación artefacto-instrumento. Por tal motivo, partimos de la hipótesis de que a través de actividades de visualización el estudiante integrará ese artefacto tecnológico como un instrumento de aprendizaje, para generar argumentos visuales y discursivos sobre la Serie de Taylor.

METODOLOGÍA

Consideramos un diseño experimental para verificar nuestra hipótesis y, para ello, utilizamos la ingeniería didáctica como metodología de investigación y para el diseño, implementación y análisis de resultados de actividades de experimentación.

Análisis preliminar

Este análisis se enfocó en la evolución de la Serie de Taylor, su estructura conceptual y sus modelos de analiticidad (Cantoral, 2001).

En la época que emerge un programa de matematización de los fenómenos que buscaba modelar, anticipar y predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático, Taylor presenta su serie con el fin de estimar el valor de una ordenada a partir del conocimiento de otra que se encuentre ubicada en sus proximidades (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral y Farfán, 2004; Cantoral, 1995).

Desde la perspectiva de Cantoral (2001) la idea germinal que destaca en la Serie de Taylor es la noción de predicción de los fenómenos naturales de flujo y lo analítico en el Cálculo. En su trabajo se mencionan modelos de lo analítico que representan los diversos esquemas paradigmáticos asociados a la Serie de Taylor en distintos contextos y momentos históricos. Para el presente trabajo, nos hemos centrado solamente en tres modelos: el modelo de predicción paramétrica, modelo de regularidad binomial y el modelo de aproximación polinomial.

Análisis a priori

El diseño experimental consistió en cuatro actividades, las cuales se presentan a continuación indicando el propósito de cada una.

1. [Cohete] Al lanzar un pequeño cohete para observaciones meteorológicas se tomaron mediciones de la posición del cohete con respecto al tiempo, desde que se lanzó hasta ocho segundos después (actividad adaptada del trabajo de Zaldívar, 2006). Los datos recabados se presentan en la siguiente tabla:

Tiempo (t)	***Distancia (s)***
0	0
1	5.3125
2	6
3	4.1875
5	1.5625
6	5
7	14.4375
8	32

Tabla 1. Datos de la posición del cohete en función del tiempo

i. Construye la gráfica de la función posición.
   a. ¿En qué intervalo de tiempo el cohete recorre mayor distancia?
   b. ¿En qué intervalo de tiempo el cohete tuvo un desplazamiento más rápido?
   c. ¿Cuál es la posición en el segundo 9?

ii. Construye una tabla en la que registres lo siguiente:
   a. Los incrementos de la variable tiempo (Δt)
   b. Los incrementos de la variable posición (Δs)
   c. Razón de cambio de la posición con respecto al tiempo

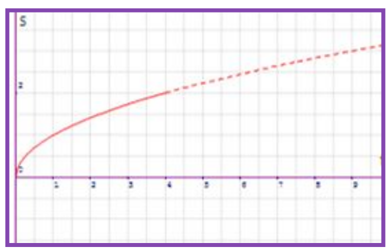
iii. Construye la gráfica de la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo.
   a. ¿Qué concepto físico representaría la grafica que realizaste, con respecto a la grafica de la función posición?
   b. ¿En qué intervalo de tiempo el cohete cambia de dirección?

c. ¿Cuál es la velocidad inicial? Y ¿Cuál es la velocidad mínima que toma el cohete?

iv. Si calculas nuevamente las razones de cambio de la función que representa la velocidad ¿Qué concepto físico representa la nueva gráfica con respecto a la anterior?

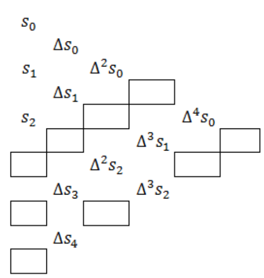
Propósito: Este ejercicio tenía dos intenciones: 1) inducir la instrumentalización de la calculadora, es decir, que los estudiantes conozcan sus esquemas de uso y 2) que los estudiantes tengan un acercamiento a las nociones, ideas y estrategias variacionales que son necesarias para comprender la Serie de Taylor, como por ejemplo la predicción y la estrategia de diferencias finitas de variables.

2. [Partícula] Una partícula cambia de posición de manera inconstante, su posición varía con respecto al tiempo, de manera que su comportamiento lo modela la función . Así en el tiempo la partícula se encuentra a 2 unidades sobre el eje , es decir S(4)=2. La representación gráfica de la función de la posición de la partícula se presenta a continuación:



a. Conociendo realiza una aproximación para predecir la posición de la partícula en .

3. [Diferencias] Si denota la diferencia de .



a. Completa los espacios vacíos y calcula

b. Propón un método general para predecir valores a partir de un valor conocido

4. [Polinomios] De los siguientes polinomios considera los que creas conveniente operar para aproximarte gráficamente a la función en el punto . (Nota: puedes sumar, multiplicar o dividir los polinomios entre si o bien, multiplicar por un escalar).

3	$(x-1)$	$6x+6$	$(x-1)$
$3x^2+6x-2$	6	$(x-1)^2$	

Propósito: En los ejercicios 2, 3 y 4 se tenía otra intencionalidad: 1) inducir la instrumentación tecnológica en el estudiante, es decir, la calculadora irá conduciendo al estudiante a la apropiación de esquemas de acción instrumentada y 2) generar argumentos de presentación (Castillo, 1993) y de justificación sobre la Serie de Taylor. Se esperaba que los estudiantes pongan en juego las ideas inmersas en la construcción de la Serie, como por ejemplo la predicción, la suma deliberada de polinomios, el comportamiento gráfico, el reconocimiento de patrones y la aproximación.

Experimentación

Para la implementación de las actividades experimentales, se trabajó con un grupo de seis jóvenes universitarios de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, con edades entre 19 y 20 años, quienes ya habían aprobado tres cursos de cálculo.

Análisis a posteriori

En esta etapa se analizaron los resultados obtenidos de la experimentación y se contrastaron con los resultados que se esperaban del análisis a priori, lo cual se presenta brevemente en el siguiente apartado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De los resultados obtenidos hemos rescatado dos elementos importantes:

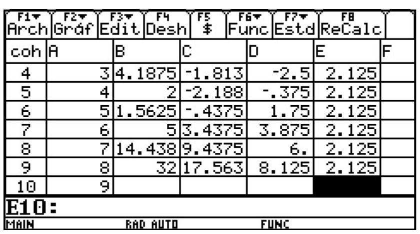
1) El lenguaje variacional que los estudiantes utilizaron
2) Los argumentos generados asociados a la serie de Taylor

Lenguaje variacional

Las ideas, nociones y estrategias variacionales identificadas en los resultados son: la noción de variación, la aproximación, la estrategia de diferencias finitas de variables, el reconocimiento de patrones, el tránsito entre registros de representación y la predicción. Se presentan algunas a continuación:

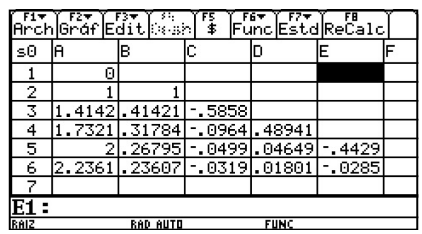
<u>*Estrategia de diferenciación finita de variables.*</u> Esta estrategia fue utilizada para obtener los valores de las razones de cambio de la función posición del cohete y para *predecir* estados anteriores y posteriores en los ejercicios “Cohete”, “Partícula” y “Diferencias”.

Por ejemplo, en el ejercicio del “Cohete” se solicitaba al estudiante estimar la posición de éste en el tiempo , la tabla proporcionaba valores en el intervalo de tiempo (0,8) por lo que el estudiante se veía en la necesidad de predecir.



coh	A	B	C	D	E	F
4	3	4.1875	-1.813	-2.5	2.125	
5	4	2	-2.188	-.375	2.125	
6	5	1.5625	-.4375	1.75	2.125	
7	6	5	3.4375	3.875	2.125	
8	7	14.438	9.4375	6.	2.125	
9	8	32	17.563	8.125	2.125	
10	9					

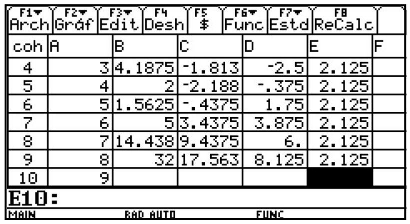
Imagen 1- Estrategia de diferencias finitas utilizada para predecir la posición del cohete en el tiempo



s0	A	B	C	D	E	F
1	0					
2	1	1				
3	1.4142	.41421	-.5858			
4	1.7321	.31784	-.0964	.48941		
5	2	.26795	-.0499	.04649	-.4429	
6	2.2361	.23607	-.0319	.01801	-.0285	
7						

Imagen 2- Estrategia de diferencias finitas empleada para predecir la posición de la partícula en el tiempo

<u>*Práctica de predicción.*</u> Esta práctica fue observada al tratar de aproximarse a una posición desconocida en los ejercicios del “Cohete”, “Partícula” y “Diferencias”. Por ejemplo, para predecir la posición del cohete en t=9, un estudiante comentó lo siguiente: *Podemos hacer como una formulita, como son diferencias entonces x número, menos el último número da 2.25 y luego ir regresando.*



coh	A	B	C	D	E	F
4	3	4.1875	-1.813	-2.5	2.125	
5	4	2	-2.188	-.375	2.125	
6	5	1.5625	-.4375	1.75	2.125	
7	6	5	3.4375	3.875	2.125	
8	7	14.438	9.4375	6.	2.125	
9	8	32	17.563	8.125	2.125	
10	9					

$X - 8.125 = 2.125$
$x = 2.125 + 8.125$
$x = 10.3$

$X - 17.563 = 10.3$
$x = 10.3 + 17.563$
$x = 27.863$

$X - 32 = 27.863$
$x = 32 + 27.863$
$x = 59.863$

Imagen 3- Predicción de la posición del Cohete en el tiempo t=9 utilizando la estrategia de diferencias finitas hacia atrás.

Este estudiante denotó con la letra cada valor que debía estimar para poder llegar a predecir la posición en el segundo 9. Utilizó las diferencias que ya había realizado en su calculadora y se dispuso a ejecutar el proceso inverso de las diferencias, es decir:

Como entonces
Luego, como entonces
Y finalmente como entonces

Así, el estudiante concluyó que la posición del cohete en es 59.863, ésta fue su predicción.
Otro estudiante, por su parte, utilizó el teorema del valor medio para predecir la posición de la partícula en , con el cociente . La instrucción del ejercicio era que conociendo   prediga la posición en .

Como la trayectoria de la partícula sigue a la función   entonces . El estudiante denotó con *a* al valor de tiempo cuya posición sí conocía, es decir , también denotó con *b* al valor que deseaba predecir, o sea, . De aquí se obtiene que , por tanto sustituyendo todos los valores en la fórmula obtuvo:

Después, realiza un despeje para estimar el valor que desea predecir: lo cual difiere aproximadamente en 0.079 del valor exacto. Es importante enfatizar las nociones que este estudiante implicó en la resolución del ejercicio, se observa la *noción de derivada como* *pendiente de una recta tangente a una curva, la noción de aproximación y de predicción*, eso sin mencionar que casi comienza a construir la serie de Taylor con este argumento.

Argumentación sobre la Serie de Taylor

Tal como se esperaba se generaron los argumentos mencionados en la metodología en cada ejercicio (describimos algunos brevemente):

Argumento algebraico-numérico (ejercicio de las "Diferencias"). La expresión que obtuvo un estudiante con su desarrollo es la siguiente:

Procedamos a expresar en términos de apoyándonos del siguiente arreglo:

$$
\begin{array}{cccccc}
s_0 & & & & & \\
 & \Delta s_0 & & & & \\
s_1 & & \Delta^2 s_0 & & & \\
 & \Delta s_1 & & \Delta^3 s_0 & & \\
s_2 & & \Delta^2 s_1 & & \Delta^4 s_0 & \\
 & \Delta s_2 & & \Delta^3 s_1 & & \Delta^5 s_0 \\
s_3 & & \Delta^2 s_2 & & \Delta^4 s_1 & \\
 & \Delta s_3 & & \Delta^3 s_2 & & \\
s_4 & & \Delta^2 s_3 & & & \\
 & \Delta s_4 & & & & \\
s_5 & & & & &
\end{array}
$$

De lo anterior podemos observar que:

Entonces:

(1)

Por otro lado, podemos observar que:

Entonces:

(2)

Continuando este proceso obtendremos que:

(3)

Así como, (4)

Sustituyendo 1, 2, 3 y 4 en la expresión que el estudiante construyó, obtenemos:

Es bastante evidente el desarrollo binomial tanto en la última expresión como en las anteriores. Si se extiende este procedimiento y se realizan los cambios de variable necesarios se obtiene la Serie de Taylor.

Argumento gráfico-algebraico (ejercicio de los "Polinomios"). Se generaron dos tipos de resultados concernientes a la noción de "aproximación" que cada estudiante concibió:

1. Aproximación puntual: Algunos estudiantes se dieron a la tarea de realizar una aproximación de la función específicamente en el punto .

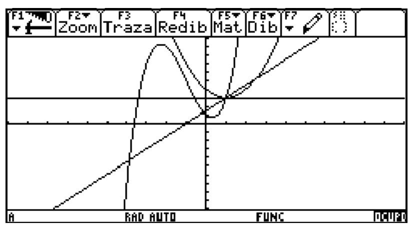


Imagen 4- Aproximación puntual

2. Aproximación global: Otros estudiantes realizaron una aproximación global, es decir, intentaron construir una expresión polinomial cuya gráfica fuera casi la misma que la gráfica de .

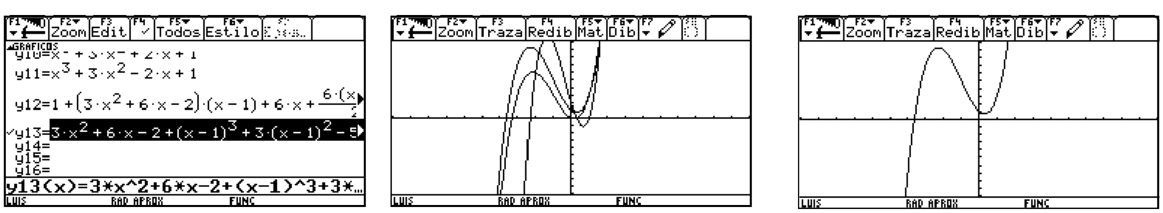


Imagen 5- Aproximación global

Cualquiera pensaría que estos procesos fueron realizados "al tanteo", sin embargo en ellos intervienen procesos cognitivos para construir con éxito la función correcta y junto con la integración tecnológica, el estudiante pudo realizar acciones y estrategias como la *integración* *de registros de representación*, la observación del *comportamiento gráfico*, la toma de decisiones para la elección adecuada de los polinomios propuestos y de los escalares para alargar o comprimir la gráfica según fuera conveniente, la *operación gráfica de funciones* y sobre todo que construyeron expresiones equivalentes a la Serie de Taylor.

CONCLUSIONES

Por medio de sus argumentaciones, los estudiantes desarrollaron estrategias para aproximarse a la posición de un objeto en movimiento o al valor de una función, logrando construir significados sobre la Serie de Taylor relacionándola con una herramienta de predicción. Por tanto, un elemento importante para resignificar la Serie de Taylor es enmarcar las actividades en un cuadro de predicción continua, en el que la construcción matemática del estudiante gire en torno a esta práctica, una recomendación es basar esa predicción en la aproximación. Otro elemento es propiciar la aproximación como una práctica más que una estrategia, como es el caso de la aproximación polinomial inmersa en el ejercicio de los “Polinomios”.

La integración tecnológica instrumentada en la práctica del estudiante, las actividades de visualización de la Serie de Taylor y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional favorecieron la generación de argumentos que construyeron distintos significados sobre la Serie. Esto nos lleva a constatar que el cambio en la presentación del objeto matemático (de papel/lápiz a instrumentos tecnológicos) enriqueció y dotó de significados a la Serie de Taylor. Se considera la argumentación a través de tecnología el elemento principal para la resignificación de la Serie de Taylor.

BIBLIOGRAFÍA

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9(1), 7-30.

Briseño, E. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Unidad Distrito Federal.

Castillo, P. (1993). *Argumentos convincentes hacia la didáctica del cálculo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Unidad Distrito Federal.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis*. México, Vol. 11, Núm. 1, 55 – 101.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*. Sociedad Thales, España. Núm. 42, Vol. 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R., Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Internacional Thomson Editores

Cantoral, R., Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(7), 265-292.

Cantoral, R., Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. Rodríguez, E. (Presidente). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 694-701), Cuba: Instituto Superior Politécnico.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas*. D.F., México: Reverté.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Marcolini, M., Perales, J. (2005). La noción de predicción: análisis y propuesta didáctica para la educación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1), 25-68.

Sánchez, M. (2006). *Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional.* Números 64. [En línea] Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas_02.pdf

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en cálculo.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, México.