Momentos de exploración e ilustración en la determinación de circunferencias en futuros docentes de educación secundaria[1]

Jaione Abaurrea, Aitzol Lasa y Miguel Wilhelmi

Resumen

Se analiza la actividad matemática de estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria, especialidad en Matemáticas, en una situación didáctica destinada al estudio de circunferencias. En las tareas a resolver por los alumnos se estudian los métodos de geometría analítica para la representación de circunferencias y las propiedades de estas figuras mediante una metodología de exploración e ilustración. Primero se identifican los conocimientos previos de los estudiantes y después se ponen a su disposición herramientas en distintos soportes para afianzar y desarrollar dichos conocimientos. El proceso de estudio evoluciona mediante la interacción de dos soportes materiales: uno, el software dinámico GeoGebra; otro, el «lápiz y papel». Se extraen conclusiones sobre la importancia de la interacción entre los medios en la adquisición de conocimientos y su implicación en las intervenciones docentes previstas.

Palabras clave: situación didáctica, geometría analítica, circunferencias, exploración e ilustración, GeoGebra.

Abstract

In Master's degree in Secondary Education Teaching, speciality in mathematics, the activity of students in a didactic situation for the study of circumferences is analyzed. The activities made by the students follow an explorative and illustrative methodology to study the analytic geometry methods to represent circumferences and the characteristics of these figures. The first step is to identify the previous knowledge of the students and then, give them learning tools in different formats to consolidate and develop this knowledge. The study process evolves through the interaction of two material tools: one, the dynamic software GeoGebra; and other, the «pencil and paper». Conclusions are drawn about the importance of the interaction between the tools in the acquisition of knowledge and its involvement in the planned teaching interventions.

Keywords: *didactic situation, analytic geometry, circumferences, exploration and illustration, GeoGebra.*

Autores: *Abaurrea, Jaione, Lasa, Aitzol y Wilhelmi, Miguel*
Dirección: *Navarra, España*
Lugar de trabajo: *Universidad Pública de Navarra. España.*
Dirección electrónica: *miguelr.wilhelmi@unavarra.es*

Introducción

Gutiérrez (2010) resalta que «la geometría es una compleja red formada por interconexiones entre conceptos, formas de razonamiento y sistemas de representación útil para conceptualizar y analizar entornos espaciales físicos o imaginados» (p.17). Según sus palabras, esta complejidad se proyecta en el mundo escolar y conlleva la existencia de numerosas investigaciones acerca de la didáctica de la geometría.

Todo objeto matemático emerge de los sistemas de prácticas significativas que un individuo utiliza para resolver un cierto tipo de situaciones–problema. Dichas prácticas matemáticas (operativas y discursivas) constituyen los significados personales que ese individuo tiene de tales objetos (Ávila, Ibarra, Grijalva, 2010). El estudio de los objetos geométricos y sus propiedades requiere prácticas o actividades en registro algebraico y en registro gráfico. Por un lado, el significado algebraico de los objetos geométricos se puede presentar mediante su representación algebraica. Por otro lado, se emplean las representaciones gráficas para la visualización del objeto y para la ejemplificación y demostración de propiedades; siendo la representación en registro gráfico imprescindible para el estudio de estos objetos geométricos.

La Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (Duval 1995) permite llevar a cabo el análisis de diversos tipos de representaciones empleadas en la realización de tareas matemáticas, así como el paso de unas representaciones a otras, atendiendo a si las modificaciones se realizan en un mismo sistema de representación semiótica (*transformaciones*) o entre diferentes sistemas (*conversiones*).

La actividad matemática de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria (FDMS) que se analiza en este estudio, requiere cambios entre el registro algebraico y el gráfico, siendo necesarias tanto *transformaciones* como *conversiones*. Dichas representaciones algebraicas y gráficas se llevan a cabo en dos soportes materiales: GeoGebra y «lápiz y papel». Así, las actividades que ejecutan los FDMS exigen realizar transformaciones algebraicas en papel y conversiones del registro algebraico al registro gráfico y viceversa, tanto en GeoGebra como en papel.

Esta propuesta de interactuar con dos soportes materiales fue motivada para evitar el fenómeno didáctico de *ilusión de la transparencia*, según el cual docente y estudiantes no comparten el mismo plano de significación y, sin embargo, el docente acepta, ilusoria y tácitamente, que la discusión es trasparente para los estudiantes. Este fenómeno se puede presentar de dos formas duales; a saber:

- *Ilusión del ejemplo prototípico*. Debido al reducido tiempo en cada sesión, el docente que trabaja con la pizarra busca «ejemplos prototípicos» para enseñar saberes complejos. El problema docente se centra en la determinación del mejor ejemplo posible para introducir o desarrollar nociones, propiedades o proposiciones. El ejemplo es mostrado de forma muy detallada y con un alto grado de adecuación al tópico matemático. Sin embargo, mientras el profesor acepta el ejemplo como un representante «irrefutable» del saber a enseñar, para los alumnos no deja de ser un mero ejemplo particular: no son conscientes de que la propiedad que se presenta mediante ese ejemplo se cumple en otras situaciones con características similares. Así, la idea de «ejemplo perfecto» y su detenido análisis puede llevar al docente a la *ilusión* de que los estudiantes entienden la propiedad y son capaces de particularizarla a casos pertenecientes a la clase que representa el ejemplo particular escogido *ad hoc* por él.

- *Ilusión de los ejemplos exhaustivos*. El docente no toma consciencia de que la mera concatenación de ejemplos ilustrativos no faculta necesariamente al estudiante a identificar los aspectos comunes y, por lo tanto, a abstraer de todos ellos un modelo o prototipo que los represente. El uso de un software tecnológico en el aula permite a los docentes incorporar más modelos. La rapidez para realizar abundantes ejemplos y modificar objetos para conseguir nuevos, realizar múltiples ensayos, establecer conexiones y conjeturar permiten establecer condiciones para la generalización y la demostración de propiedades. Así, el docente puede tener la ilusión de que los estudiantes entienden una propiedad y son capaces de generalizarla después de haber visto una concatenación de ejemplos exhaustivos que cumplen dicha propiedad.

En conclusión, ya sea para evitar la ilusión del *ejemplo prototípico* o de los *ejemplos exhaustivos*, el docente debe determinar medios de control sobre los instrumentos utilizados y su gestión en aula. Con otras palabras, el soporte «pizarra» puede conllevar un fenómeno de ilusión de la trasparencia si los estudiantes no adquieren medios *deductivos* (de lo general a lo particular). La otra cara de la moneda es el soporte «informático», que puede conllevar un fenómeno de ilusión de la trasparencia si los estudiantes no adquieren medios *inductivos* (de lo particular a lo general).

Por eso, para evitar estos fenómenos de ilusión de la transparencia, en el estudio se plantean actividades en las que no se utiliza únicamente un soporte. Se espera que el «uso correcto» y alternado de GeoGebra y del «lápiz y papel» permita tanto *generalizar* como *particularizar* propiedades. Se entiende que se hace un «uso correcto» de GeoGebra si los alumnos lo emplean para conjeturar respecto a nociones matemáticas. El modelo dinámico sirve para indagar acerca de propiedades. GeoGebra permite proponer actividades a las que, aun no teniendo la maestría del saber matemático que se trabaja, se les puede hacer frente y así avanzar en la comprensión y adquisición total del saber. Además, alternar esta práctica con la práctica en papel permite optimizar el rendimiento.

Así, son dos los objetivos principales de esta investigación. Por un lado, se espera que los FDMS progresen en la adquisición de procesos matemáticos de particularización y generalización (Godino, Font y Wilhelmi, 2008) y propiedades vinculadas al lugar geométrico «circunferencia»; y por otro lado, se pretende discutir la pertinencia en la alternancia de los soportes en estos procesos.

Para alcanzar esos objetivos, el presente trabajo se organiza de la siguiente manera: se presenta en primer lugar el marco teórico de referencia, se detallan después los objetivos específicos de la actividad, y se presenta por último el diseño, la implementación y la evaluación de las actividades. Se termina con una discusión de los resultados y unas observaciones finales a modo de conclusión. Además, se aportan en el anexo todas las actividades propuestas con el enlace al libro GeoGebra que emplearon los FDMS para la realización de las actividades.

Marco teórico y metológico

En la perspectiva semiótica–cognitiva adoptada por la TRRS, la noción de representación juega un papel importante en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Duval (2006) afirma que la única manera de acceder a los objetos matemáticos es mediante los signos que se utilizan en la práctica matemática y las representaciones semióticas de tales objetos. En la actividad matemática lo esencial no es el uso de diferentes sistemas de representación semiótica, sino las transformaciones que se pueden realizar entre las distintas representaciones. Se denomina *tratamiento* a la actividad de transformar signos dentro un mismo sistema de representación; *conversión*, a la transformación de representaciones en diferentes sistemas.

Duval (1995) declara que el proceso de *conversión* en una pluralidad de registros de representación conlleva el desarrollo de conocimientos. Según sus palabras, la lengua materna, que es el registro semiótico por excelencia, no es suficiente para movilizar el conocimiento matemático, siendo necesaria la combinación de distintos registros de representación (algebraico, aritmético, gráfico, etc.) llevados a cabo en diferentes soportes (verbal, físico, simbólico, gráfico o tecnológico). Esta combinación de registros es fuente de dificultades de aprendizaje de las matemáticas; de hecho, muchas de ellas se originan por el desconocimiento sobre cómo cambiar de registro y cómo diferenciar un objeto de la representación que se propone.

La práctica matemática llevada a cabo por los FDMS en esta investigación, requiere el uso de dos soportes, el software de geometría dinámica GeoGebra y «lápiz y papel». Lasa (2016) centra el interés en investigar situaciones en las que las tareas a resolver por los alumnos requieren modelos dinámicos en soporte informático además de las actividades a realizar en papel. Trata de contrastar si el orden de utilización de los soportes materiales condiciona las respuestas que dan los alumnos. Así, concluye que el orden de utilización de los distintos soportes provoca distintas respuestas por parte del estudiante y que «el conocimiento de las características de unas y otras respuestas permite adoptar criterios que optimizan los diseños instruccionales en estos soportes» (Lasa, 2016, p.277).

En otras palabras, la utilización del modelo dinámico influye en la resolución de la tarea, siendo conveniente emplear los dos soportes en la realización de una misma de ellas. En sus palabras «es apropiado utilizar el modelo dinámico como apoyo a la resolución algebraica, para visualizar los resultados numéricos, controlar la producción realizada, y dar así validez a la resolución obtenida» (Lasa, 2016, p.157).

En cuanto al uso de herramientas tecnológicas en situaciones de aprendizaje, Lasa y Wilhelmi (2013) describen tres momentos básicos en los que es pertinente el uso de GeoGebra dentro de la actividad matemática: momento de *exploración*, de *ilustración* y de *demostración* de una propiedad matemática. Estos momentos se refieren al objetivo instruccional pretendido y al reparto de responsabilidades entre docente y estudiantes y, por lo tanto, no se refieren a la maestría en el uso de la herramienta informática por estos últimos.

Exploración, ilustración y demostración con GeoGebra

GeoGebra permite diseñar modelos dinámicos en los que el alumno puede indagar de forma autónoma, generando así un momento de exploración. El docente diseña el *applet* en GeoGebra con el fin de trabajar una propiedad matemática y el alumno debe manipular libremente el modelo dinámico. Esta manipulación permite experimentar y probar con distintas resoluciones y obtener información de las actividades que se llevan a cabo. Con otras palabras, el *applet* aporta información inteligible sobre la corrección de la solución y, a partir de esta información, el sujeto establece conclusiones o relaciones, deduce propiedades, etc., es decir, construye paulatinamente el conocimiento.

En cambio, los *applets* destinados al momento de ilustración tienen como objetivo asistir la labor docente mientras que el alumno recibe una lección. Así, el modelo dinámico es un acompañante, un añadido, a la explicación del docente. Con GeoGebra el docente puede mostrar al alumno una construcción o un ejemplo que verifique la propiedad o el teorema que está explicando. Al contrario que en los modelos de exploración, en éstos, el alumno no debe conjeturar para llegar a conocer la propiedad matemática; directamente se muestra la veracidad de la misma mediante ejemplos concretos. La ausencia de contraejemplos y el estudio de un gran número de casos justifican *inductivamente* la propiedad. De esta forma, el modelo de ilustración permite mostrar propiedades de manera explícita, pero no demostrarlas. La ilustración de una propiedad no es más que una «imagen» de la misma (Lasa, 2016). Es preciso, pues, un razonamiento *deductivo* que dé validez formal a dicho resultado(2).

Los modelos dinámicos que manejan los FDMS para realizar las actividades, es decir, los modelos dinámicos que se presentan en este estudio son de dos tipos. Por un lado, están los *applets* destinados a la exploración de conocimientos y por otro, aquellos ilustrativos, que con solo pulsar un botón presentan ejemplos que verifican una propiedad matemática. Además, las tareas a resolver por los

FDMS con GeoGebra se dividen en diferentes fases propuestas en la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM) (Brousseau, 1997).

La TSDM aportó herramientas para superar una enseñanza meramente transmisiva de las matemáticas. El docente y el estudiante intervienen en un *medio didáctico*, estructurado según el saber objeto de estudio. Según la TSDM, el estudiante avanza en la adquisición de nuevos conocimientos mediante la adaptación al medio didáctico. Un componente del medio es el *medio material* (con qué instrumentos o soportes, qué ostensivos manipula). Así, en estas situaciones el docente no interviene proporcionando el saber matemático para la resolución del problema, se encarga de preparar el medio didáctico (incluido el material), de plantear el problema y de la gestión y control del sistema didáctico, interviniendo para la evolución de los conocimientos.

A continuación se presenta un paralelismo entre las fases de acción, formulación y validación propias de la TSDM y los tres momentos básicos de exploración, ilustración y demostración de uso de GeoGebra (Tabla 1). Las situaciones de *acción* buscan que el estudiante, haciendo uso de sus conocimientos previos, interactúe con el medio didáctico para abordar un problema; poniendo a prueba la eficacia y validez de sus conocimientos. En estas situaciones el docente no proporciona el saber matemático, por lo que las relaciones se establecen entre el estudiante y el medio didáctico. Aun así, esto no quiere decir que el docente se aísle del proceso, ya que es, por un lado, el encargado de preparar el medio didáctico y de plantear el problema, y, por otro lado, el gestor de los momentos de *devolución* (gestión de situaciones de bloqueo en el estudiante). Esta situación de acción se caracteriza por ser un momento de *indagación*, ya que el estudiante debe interpretar sus acciones en función de las respuestas que recibe por su interacción con el medio antagonista. Esta fase pues se relaciona principalmente con la de exploración.

En las situaciones de *formulación*, donde los estudiantes explicitan propiedades y proposiciones de los objetos matemáticos involucrados, permite no solo el progreso del conocimiento sino la transmisión de información entre pares iguales, permitiendo la construcción conjunta del saber. En el caso del uso de GGB, en este proceso se diferencian dos momentos, exploración e ilustración. Al principio, el estudiante debe identificar diferentes representaciones del conocimiento en cuestión y escoger la apropiada (momento de exploración); y después, debe presentar dicha información a los demás actores de la situación (momento de ilustración).

En las situaciones de *validación* los estudiantes tienen a su disposición herramientas para verificar ellos mismos si han abordado el problema correctamente. El medio material permite la justificación de la propiedad matemática que se ha trabajado en las fases de acción y formulación. Esta justificación puede ser inductiva, es decir, basada en casos particulares (momento de ilustración) o basada en un razonamiento deductivo (momento de demostración).

Finalmente, la *institucionalización* marca el final del proceso[(3)] y en esta fase se formalizan los conocimientos emergentes adquiridos en el transcurso de la actividad. En esta etapa, prevalece el momento de ilustración, ya que el docente expone los objetos matemáticos a los alumnos. Aun así, la formalización de los conocimientos puede requerir una demostración deductiva también.

Momentos de la actividad matemática con GGB	**Fases de la situación *adidáctica***		
	Acción	***Formulación***	***Validación***
Exploración	Estrategia de base	Conceptos y teoremas en acto	Pruebas empíricas (en muchos casos por ensayo y error)
Ilustración	Consignas y devolución. Eventualmente, microinstitucionalizaciones en situaciones didácticas con un componente adidáctico esencial (Bloch, 1996)	Formulación explícita de propiedades particulares de casos concretos	Pruebas parciales para comprobar (convencerse a uno mismo) y para convencer (al igual)
Demostración	Interpretación de la respuesta del medio antagonista (*feedback*)	Formulación explícita de teoremas	Prueba para comprobar (convencerse a uno mismo) y prueba para convencer (al igual)

Tabla 1.

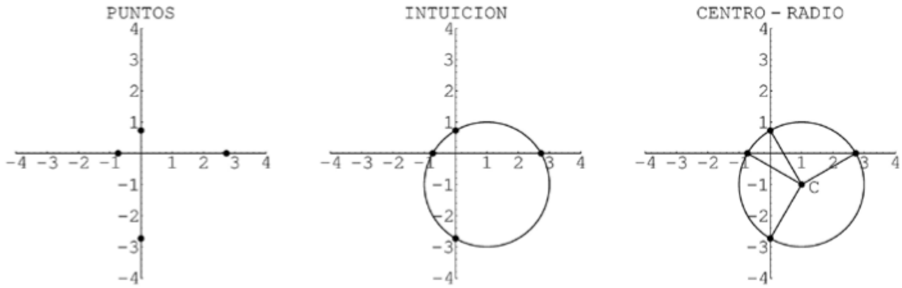
Momentos de la actividad matemática en las distintas situaciones de la TDSM (Lasa, 2016, p. 52).

La investigación que se presenta en este texto tiene el propósito de que los FDMS evolucionen en el conocimiento de la «circunferencia» hacia la incorporación de saberes geométricos y algebraicos integrados. Se pretenden trabajar cuatro métodos de geometría analítica para la representación de una circunferencia partiendo de su ecuación implícita (Wilhelmi, 2007).

Praxeologías vinculadas a la resolución de circunferencias

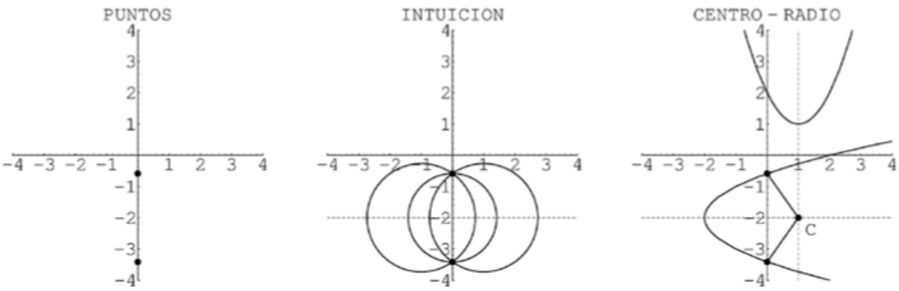
Respecto a la representación de circunferencias partiendo de su ecuación implícita, Wilhelmi (2007) determina que «la actividad matemática se centra en la manipulación simbólica de ostensivos que conlleva la transformación de una ecuación por equivalencias algebraicas, hasta la obtención de un representante canónico de dicho lugar». Con otras palabras, se hace un tránsito brusco desde «el conocimiento no analítico de la circunferencia» a su «interpretación meramente analítica a partir de la manipulación de la ecuación analítica». Esto lleva consigo que las técnicas aparecen como instrumentos rígidos para la realización de tareas aisladas y estereotipadas, lo que puede dar lugar a diferentes fenómenos didácticos como la atomización de la técnica de las transformaciones algebraicas, ausencia de análisis exploratorios de resultados factibles, etc. Así, Wilhelmi (2007) propone cuatro técnicas para la determinación de una circunferencia conociendo la representación algebraica no canónica; técnicas que parten del conocimiento previo de los estudiantes (figura 1).

Fórmula: $C1 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$



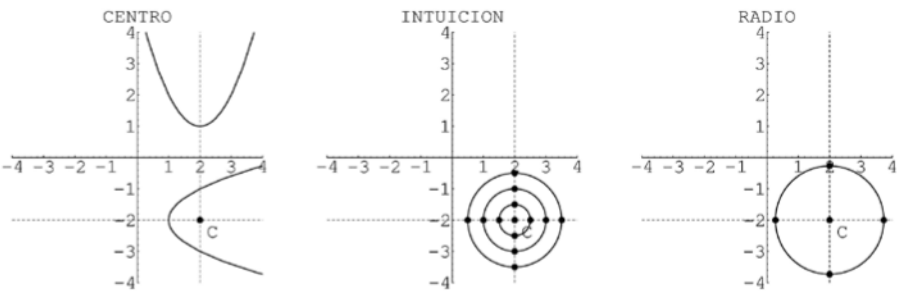
Técnica: Experimental

Fórmula: $C2 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 4y + 2 = 0$



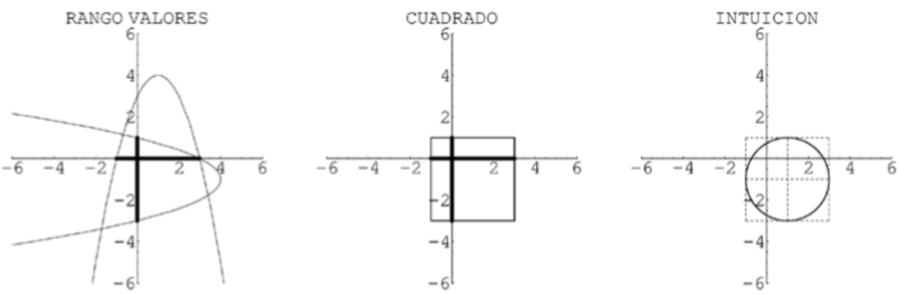
Técnica: Experimental, para la determinación del radio; de las parábolas, para el cálculo del centro.

Fórmula: $C3 \equiv x^2 - 4x + y^2 + 4y + 5 = 0$



Técnica: De las parábolas.

Fórmula: $C1 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$



Técnica: Del cuadrado.

Figura 1.

Métodos analíticos para la representación de circunferencias (Wilhelmi, 2007, p. 15).

La elección de cada uno de estos métodos (figura 1) se realiza en función del número de puntos de corte de la circunferencia con los ejes de coordenadas. Las circunferencias con tres o cuatro puntos de corte se representan directamente, ya que tres puntos son suficientes para determinar estas figuras. Para las de uno y dos puntos de corte es necesario el uso de las *parábolas asociadas* a la ecuación implícita, que se determinan interpretando esta ecuación como una de segundo grado en «*x*» o en «*y*». La intersección de los ejes de las parábolas determina el centro de la circunferencia. Las circunferencias sin puntos de corte se representan partiendo de las parábolas asociadas, ya que después de conocer el centro se puede obtener un punto de la circunferencia mediante resolución algebraica. Finalmente, se propone el *método del cuadrado*, que es válido para toda circunferencia. La utilización de estos métodos no sólo permite un progreso paulatino del conocimiento del objeto «circunferencia», sino que evita el fenómeno de *prevalencia algebraica*, según el cual los estudiantes privilegian la actividad algebraica sobre cualquier otra interpretación, contexto de uso o lenguaje y, por lo tanto, no disponen de medios eficaces para un *análisis flexible* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) de las nociones y procesos matemáticos. Este uso abusivo del álgebra por los estudiantes, implícito en la mayoría de los casos, se justifica por el contrato didáctico preferente desde la Educación Secundaria, donde se prioriza la manipulación simbólico–literal de los objetos matemáticos y se descuida tanto el necesario cambio de registros para la adquisición de una noción como la valoración de la eficacia de técnicas diversas en la resolución de problemas.

Método

Se utiliza la Ingeniería Didáctica (ID) como método. La ID trata de describir un trabajo didáctico que se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, pero al mismo tiempo, trabaja sobre objetos más complejos de la ciencia en cuestión, pudiendo abordar problemas a los que la ciencia no puede hacerles frente todavía (Artigue, 2015). Este método puede utilizado según diversas teorías y, en particular, en el contexto del Enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013). En todo caso, se establecen cuatro fases en la investigación: 1) estudio preliminar, 2) diseño del experimento, 3) puesta en marcha del experimento y, por último, 4) evaluación o análisis retrospectivo. Wilhelmi (2007) muestra un proceso de estudio basado en el trabajo sobre las técnicas de determinación y representación de circunferencias (figura 1). Allí, se analiza la actividad matemática de los estudiantes que han utilizado el soporte «lápiz y papel» para llevar a cabo las representaciones. En este estudio se requiere también el uso de GeoGebra. Así, el trabajo de diseño se centra, principalmente, en la elaboración de modelos dinámicos que posibiliten un medio material tecnológico que permita la evolución de los conocimientos por interacción con estos medios en una secuencia previamente estructurada que precise su articulación. La realización de las actividades y el análisis de los resultados concluyen con el proceso de investigación.

Análisis de datos

El tamaño de la muestra y método de muestreo condicionan una investigación centrada en la validad interna. Se realiza un análisis cualitativo de las respuestas, que al enmarcase dentro de un proceso global de ingeniería didáctica, busca el contraste entre las previsiones y las respuestas observadas (*contingencia*). El método de análisis se basa en el estudio de casos y en la valoración de la coherencia de las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta el proceso de enseñanza y aprendizaje global.

Objetivos

El principal objetivo es el análisis de la actividad matemática que realizan los FDMS. Se pretende determinar de qué manera actúan, qué conocimientos emplean, en la resolución de los problemas que se les plantean. De la misma manera, se estudia qué propiedades son capaces de concluir basándose únicamente en los conocimientos previos que tienen sobre las circunferencias.

- *¿Qué conocimientos tienen los estudiantes a cerca del objeto matemático «circunferencia»? ¿Qué conocimientos emplean para resolver las actividades?*

Siguiendo la línea de Lasa (2016), otro de los objetivos de este estudio es analizar el uso de los dos soportes en la actividad matemática. Se pretende examinar en qué medida la alternancia de los soportes contribuye a la comprensión del objeto «circunferencia» y a los procesos que se involucran en la actividad matemática.

- *¿La alternancia de GeoGebra y «lápiz y papel» optimiza la práctica matemática para la adquisición de propiedades del objeto «circunferencia»?*

Experimentación

Muestra

La muestra es intencional y se compone de siete FDMS, provenientes de titulaciones técnicas y científicas (no hay ningún licenciado ni graduado en matemáticas). Los FDMS han tenido una formación previa en Geometría plana en las asignaturas de profundización en matemáticas en el Máster. Además, están familiarizados con el uso de GeoGebra en actividades de estadística, no así con herramientas de representación gráfica. Todos parten pues de conocimientos previos similares.

Proceso de estudio

La puesta en marcha del experimento se ha llevado a cabo en una sesión de cuatro horas en el aula de informática. La clasificación de las actividades es la siguiente: una actividad de introducción a las herramientas geométricas y de representación gráfica de GeoGebra, que queda excluida del análisis de este trabajo; actividades de experimentación por parte del estudiante; y, por último, un ejercicio de carácter ilustrativo (Anexo 1).

Los estudiantes reciben las actividades evaluables en siete entregas separadas, es decir, no se dispone del enunciado de una actividad hasta que no se finalice y entregue la actividad anterior, para evitar así un posible *fenómeno de analogía* (Brousseau, 1997) y posibilitar un avance adaptado a los conocimientos paulatinamente adquiridos por cada estudiante.

En todas las actividades, el estudiante dispone de un cuestionario en soporte de papel con las preguntas formuladas, que debe responder en el mismo soporte. El soporte tecnológico se emplea en las entregas 1 y 7, por lo que en estas dos se requiere de la combinación de los medios materiales «software dinámico» y «lápiz y papel». Este soporte tecnológico es el que permite que el alumno lleve a cabo las diferentes fases propuestas por la TSDM. En las actividades de la primera entrega los FDMS pasan por las fases de *acción*, *formulación* y *validación* y en la séptima entrega se finaliza el proceso de estudio con la *institucionalización* de los conocimientos. Así, los FDMS, partiendo de sus conocimientos anteriores, deben formular conjeturas estableciendo así una interacción entre aspectos intuitivos, geométricos y algebraicos en distintos soportes (conversión).

Las actividades de la primera entrega (Anexo1) están diseñadas para que los FDMS, apoyándose en el soporte GeoGebra, «descubran» los cuatro métodos de geometría analítica para la representación de circunferencias (figura 1). A medida que intuyen características de las circunferencias, el modelo dinámico guía en el conocimiento de los métodos de representación. Así, los *applets* están diseñados *ad hoc* para afianzar y desarrollar conocimientos. Por tanto, el estudiante utiliza el modelo dinámico como medio antagonista para resolver la situación en *fases de acción* (anticipación), *formulación* y *validación* (comprobación) (Brousseau, 1997).

Las plantillas diseñadas en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/wsZTllj1) incluyen preguntas que guían a los FDMS en cada método. Se facilita también el cuestionario en papel, que deben completarlo a partir de sus conocimientos previos y emergentes, así como aportar una representación aproximada de la circunferencia (*fase de acción* y *formulación*). Por ejemplo, en la figura 2 se pueden ver algunas preguntas de este cuestionario asociadas al estudio de las circunferencias con un solo punto de corte. Aquí no es posible, salvo que se haga una actividad adicional, representar de manera unívoca una circunferencia aproximada (primera pregunta). Por ello, se solicita la representación de la circunferencia de radio máximo (segunda pregunta), como una forma de acotar la región donde debe ubicarse la circunferencia. Después de las conjeturas, el estudiante tiene la oportunidad de verificar su trabajo con las figuras correctas (*fase de validación*) y conocer la ecuación en forma canónica para la determinación de centro y radio (tercera pregunta).

Escribe a continuación la ecuación de la circunferencia con un solo punto de corte y responde las preguntas:

- ¿Cuántas circunferencias posibles hay que pasen por ese punto?
- ¿Cómo será la circunferencia de radio máximo que pasa por ese punto? ¿Por qué? Guarda el objeto que has representado llamándolo *Applet 2.1* y escribe aquí cuál es su centro y radio.
- ¿Qué relación hay entre el centro y radio y la ecuación en forma canónica?

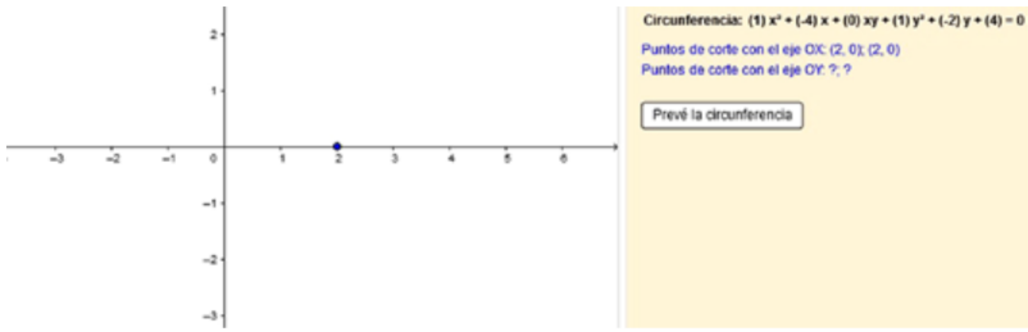


Figura 2.

Preguntas de la actividad de la primera entrega.

Continuando con la fase de exploración, a pesar de que las actividades de las siguientes entregas no requieran el uso de GeoGebra, y por lo tanto, el alumno no disponga de un medio gráfico para validar sus acciones, los FDMS deben hacer frente por sí solos a los problemas (*fase de acción* y *formulación*). No se trata de que los FDMS adquieran nuevos conocimientos; se espera que refuercen los que han adquirido en las actividades anteriores. A continuación se realiza un análisis detallado de estos ejercicios.

Tres actividades constituyen la entrega 2 (Entrega 2, Anexo 1). La primera actividad pretende que el alumno, partiendo de los puntos de corte de una circunferencia, mencione qué método analítico se debería emplear para representar dicha circunferencia. Únicamente se debe mencionar el método, ya que no se muestra la ecuación implícita, por lo que hay que aproximar el centro y la representación de la circunferencia intuitivamente. En cambio, la segunda actividad (figura 3) parte de la ecuación implícita de una circunferencia y se espera que el alumno, mediante resolución algebraica, identifique los puntos de corte de la figura con los ejes de coordenadas, escoja el método adecuado y represente de forma exacta la circunferencia. Además, se pregunta al alumno acerca de otro método que permita representar circunferencias partiendo de su ecuación implícita, con el fin de que recuerde el método de las transformaciones algebraicas, que transforma la ecuación implícita en canónica. Así, este ejercicio requiere llevar a cabo un tratamiento en el registro algebraico y una posterior conversión al gráfico. Finalmente, se pretende reforzar el significado de *centro de una circunferencia* proponiendo al alumno una actividad que, para su resolución, es necesario tener en cuenta que el centro equidista de todos los puntos de la circunferencia.

Dada la ecuación de una circunferencia, $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$,

- ¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta.
- Sin emplear ninguno de los cuatro métodos gráficos aprendidos, ¿Es posible representar la circunferencia? En caso afirmativo, realízalo señalando también su centro y radio.

Figura 3.
Segunda actividad de la segunda entrega.

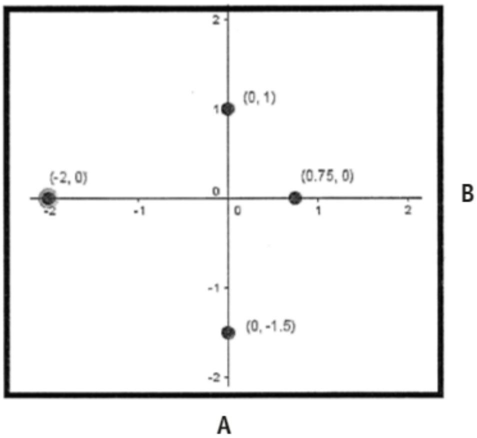
La tercera y la cuarta entrega siguen centradas en el significado del centro de una circunferencia (Anexo 1). En la figura 4 se puede contemplar que requieren descripciones de situaciones potenciales en un aula de Bachillerato en la obtención del centro de una circunferencia.

Las entregas 5 y 6 (Anexo 1) tratan nuevamente el método de las trasformaciones algebraicas para la obtención de la ecuación en forma canónica y la posterior representación de la circunferencia. Mientras que la entrega 5 se centra en la representación de una circunferencia, la 6ª requiere describir situaciones potenciales en un aula de Bachillerato en las que se ha cometido algún error en el proceso de tratamiento en el registro gráfico o de conversión al registro gráfico.

Finalmente, la institucionalización de los conocimientos emergentes se ha dado en la última entrega (Anexo 1). Dado el perfil de los FDMS, esta institucionalización no se realiza de manera convencional a través de una exposición del docente, sino mediante un cuestionario guiado que busca tanto la síntesis del saber, como la sistematización de los procedimientos. Los FDMS han completado una tabla con el centro, radio, ecuación en forma canónica y método de representación de diez circunferencias empleando unas plantillas diseñadas en GeoGebra. En este caso, dichas plantillas se emplean únicamente de manera visual, mostrando cada paso a seguir en cada método de representación y dando la información para la definición de cada circunferencia.

En relación con el ejercicio 3, supón que en un aula de Secundaria se da la siguiente situación:

Dos alumnos, A y B, deben resolver el tercer ejercicio de manera conjunta, por lo que están discutiendo cuál es el centro de la circunferencia definida por esos cuatro puntos. Cada alumno está sentado a un lado de la mesa de la siguiente manera:



El estudiante A afirma que el centro es (-0.625, 0); en cambio, el estudiante B lo determina en el punto (0, -0.25). Escribe un posible diálogo entre estos dos estudiantes al realizar de manera conjunta el ejercicio 3 en el que cada uno razone cuál es su centro y por qué. Identifica a cada estudiante al inicio de sus intervenciones estructurando el diálogo de la siguiente manera:

[A] ....

[B] ....

Figura 4.

Actividad de la tercera entrega.

Resultados y su discusión

El examen cualitativo de las respuestas (*análisis de casos*) deja al descubierto seis principales resultados. En primer lugar, se puede decir que los modelos dinámicos permiten que los estudiantes manipulen de forma autónoma los cuatro métodos analíticos de representación de circunferencias. Las plantillas en GeoGebra están diseñadas de manera que cada método se estudia en un modelo dinámico, denominado por simplicidad en la actividad como *applet*, y esto ha supuesto que los FDMS al principio, en vez de fijarse en el método, relacionaran la cantidad de puntos de corte solamente con el modelo dinámico. Así, en la actividad de la primera entrega y por lo tanto, antes de trabajar con profundidad los cuatro métodos, a la pregunta «qué método emplearían para representar una circunferencia dada», los FDMS han respondido indicando el *applet* que usarían, sin hacer mención al método. En cambio, en la segunda entrega, varios estudiantes citan ya el método elegido, explicado los pasos a seguir. En la figura 5 se ve la evolución en la estudiante 1. En segundo lugar, se identifican comportamientos de *prevalencia algebraica*, es decir, aportar como respuesta a una tarea que requiere la representación o interpretación gráfica una respuesta algebraica o simbólico–literal. En la figura 6 se muestran dos repuestas de estudiantes que, ante la cuestión «¿Qué método emplearías para representar una determinada circunferencia?»

Representa las siguientes circunferencias empleando el capítulo de exploración del Libro-GeoGebra “Determinación de una circunferencia”: • $x^2-4x+y^2-2y+4=0$ → 2º APPLET. → 1 pto de corte con y $x^2+6x+y^2+4y+12=0$ → 3º APPLET. → sin ptos de corte $x^2-2x+y^2+4y+2=0$ → ~~X~~ 2º APPLET → 2 ptos corte con y $x^2+4x+y^2-2y+1=0$ → 1º APPLET → 3 ptos de corte. **Escribe al lado de cada ecuación qué applet y qué método se emplean para representar cada circunferencia y responde las siguientes preguntas también formuladas en el Libro-GeoGebra.**	**Entrega 1** No menciona los pasos que se siguen en cada método. Relaciona el número de puntos de corte con el applet.
-¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta. El del Applet 2. Con los puntos de corte siendo sólo 2, el applet 2 saca 2 parábolas asociadas a x e y, donde se cruzan los ejes está el centro de la circunferencia Por ejemplo	**Entrega 2** Además de mencionar el applet, explica el método que se emplea en ese modelo dinámico.

Figura 5.

Progreso en el estudio de los métodos en la estudiante 1.

2. Dada la ecuación de una circunferencia, $x^2+4x+y^2-2y+4=0$, **- ¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta.** – operando hasta obtener la expresión $(x+\_)^2+(x+\_)^2=\_^2$ $x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1+4=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=1$ ‖ C (-2, 1) R = 1 – Método del cuadrado.	**Estudiante 4** Prevalencia algebraica
2. Dada la ecuación de una circunferencia, $x^2+4x+y^2-2y+4=0$, **- ¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta.** Primero vería cuales son sus puntos de corte $x=0 \rightarrow y^2-2y+4=0 \Rightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot4}}{2}$ ∄ NO TIENE $y=0 \rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot4}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ sólo tiene un punto de corte ⇒ (-2, 0) por tanto calcularía los parábolas para sacar el centro y entonces el radio lo sabríamos (Applet 2)	**Estudiante 2** Ausencia de prevalencia algegraica

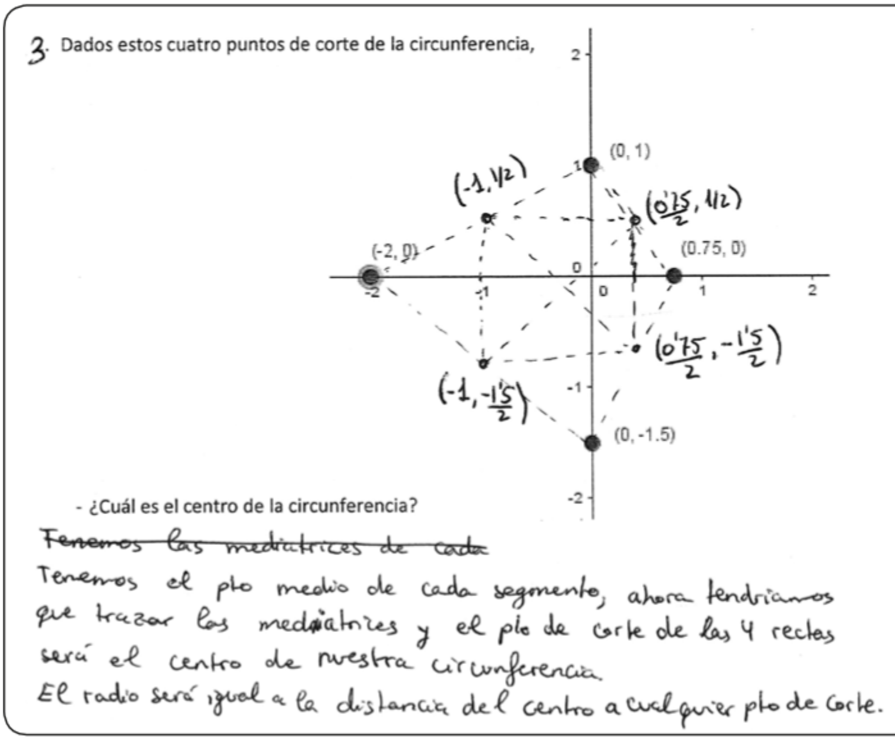
Figura 6.

Contraste de respuestas en base al álgebra.

Las respuestas dadas por los estudiantes de la figura 6 son esencialmente distintas, puesto que se refieren a fenómenos didácticos distintos:

- *Prevalencia algebraica*. El estudiante 4 determina, en primer lugar, la representación canónica mediante transformación algebraica equivalente; en segundo lugar, hace referencia al método.
- *Ausencia de prevalencia algebraica*. El estudiante 2 aporta la respuesta esperada. Primero calcula los puntos de corte de la circunferencia y luego, en base a esta información, elige el método.

En tercer lugar, los dos estudiantes analizados en la figura 6 no son conscientes de que existen infinitas circunferencias que pasan por un único punto dado (primera pregunta, figura 1) o por dos puntos concretos. De hecho, uno de ellos escribe y tacha la respuesta «infinitas». Así, estos estudiantes no se dan cuenta de que hay infinitos radios posibles y, en consecuencia, no trasladan el conocimiento de que entre dos números racionales hay infinitos números. En cuarto lugar, los estudiantes 1, 4 (figura 7) y 5 muestran un «uso de la analogía» en la tercera actividad de la segunda entrega. Los estudiantes trazan el cuadrilátero inscrito que pasa por los cuatro puntos dados, y con la intersección de las mediatrices logran el circuncentro, que es el centro de la circunferencia. Los estudiantes utilizan esta técnica porque han aprendido en otra asignatura del Máster la noción de cuadrilátero inscribible y circunscribible y técnicas para determinar las circunferencias asociadas. Por tanto, en este caso la «analogía» no ha sido motivada por una tarea previa, es decir, no surge como respuesta a una demanda del docente, sino que es una «excelente herramienta heurística, ya que ha sido utilizada bajo la responsabilidad exclusiva de los estudiantes» (Brousseau, 2007, 80) y, por lo tanto, no genera un fenómeno de *abuso de la analogía*.



Estudiante 4
Tiene presente la definición de «centro de la circunferencia».
Las mediatrices del cuadrilátero inscrito le permiten conocer el punto que equidista de los cuatro puntos dados.

Figura 7.

Resolución de la tercera tarea de la segunda entrega del estudiante 4.

En quinto lugar, en la actividad de la figura 4, aquella que requiere describir una situación en un aula de Bachillerato en la obtención del centro de una circunferencia, varios estudiantes han resaltado la primacía de la horizontal. Según sus palabras, la respuesta de cada estudiante (A y B) va ligada a su posición respecto a los ejes; prevaleciendo la horizontal a ellos. Piaget e Inhelder (1975) analizan el desarrollo de las percepciones geométricas en relación a las magnitudes y concluyen la existencia de fenómenos que son sensibles al nivel de ejercitación que tiene el sujeto. En el desarrollo de las percepciones, algunas «*focalizaciones*» o «*centrations*» (exploración de configuraciones) mejoran su estimación con el tiempo, y otras, sin embargo, como la primacía de la horizontal, empeoran con la edad.

«[...] La exploración puede ser polarizada y entrañar por ello errores secundarios: ese es el caso de las verticales, que son sobreestimadas con relación a las horizontales de la misma longitud, porque las 'centrations' más frecuentes se fijan en el medio de éstas y en la cumbre de las primeras (lo que confirma el registro de los movimientos oculares). Ese error de la vertical aumenta, más bien, con la edad.» (p. 49)

Para finalizar, se puede decir que todos los FDMS tienen un uso *flexible* de las distintas representaciones de las circunferencias, que les permite analizar sus características e intuir con poca información representaciones aproximadas. De hecho, una de las cuestiones que todos los estudiantes han respondido correctamente, es la segunda pregunta de la figura 2. La circunferencia con la que han trabajado tenía como único punto de corte el punto (2,0); por tanto, para que no hubiera otro punto de corte, el radio máximo de la circunferencia debía ser inferior a dos. En la figura 8 se pueden ver algunas de las representaciones realizadas por los estudiantes.

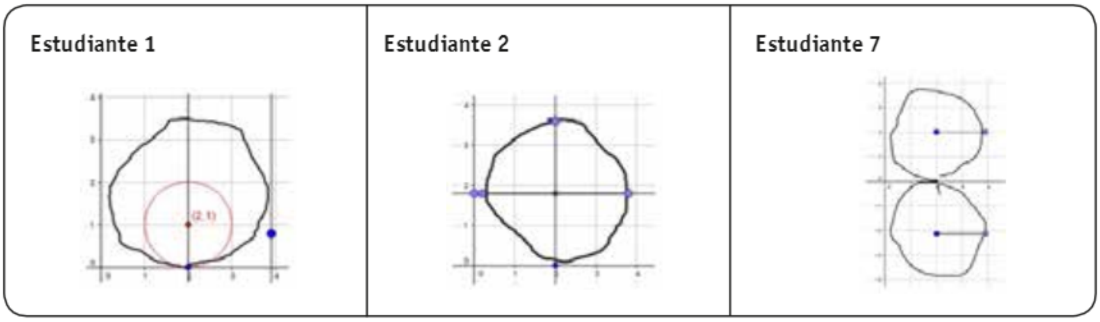


Figura 8.

Representaciones aproximadas de la circunferencia de radio máximo para el punto de corte (2,0).

Implicaciones en la formación de docentes

El análisis de las producciones de los estudiantes se puede realizar también en función de los objetivos establecidos y los resultados obtenidos. Por un lado, la alternancia de dos soportes, GeoGebra y «lápiz y papel», ha permitido soslayar el fenómeno didáctico de *ilusión de la transparencia*. Emplear los dos soportes favorece en la adquisición y conocimiento de una propiedad geométrica, ya que permite llevar a cabo procesos tanto de generalización como de particularización.

La figura 5 es un claro ejemplo de que los FDMS han asimilado los cuatro métodos de geometría analítica disponiendo de GeoGebra como la única herramienta para el estudio. El soporte tecnológico permite probar una gran cantidad de ejemplos en el menor tiempo posible y así, los FDMS han podido aprender los métodos partiendo de ejemplos particulares (proceso de generalización).

En cuanto a los ejercicios en papel, los estudiantes han podido plasmar los conocimientos adquiridos en la primera entrega en diferentes ejemplos particulares, además de reforzar propiedades del objeto «circunferencia». Todos los estudiantes tienen constancia de las propiedades que deben tener las circunferencias a representar y las interpretan correctamente de manera gráfica, demostrando así la excelente interpretación del marco gráfico (figura 8). Por tanto, exponen un comportamiento de control total sobre el significado del objeto «circunferencia» las características de las circunferencias y la representación de éstas en el marco gráfico. Conocen perfectamente la definición de la circunferencia y el significado de su centro. Así, en las actividades en papel han requerido a los FDMS particularizar propiedades para poder representar la figura que se les proponía en cada caso.

Por otro lado, se observa la tendencia de algunos estudiantes a «ahorrar tiempo» y simplificar las tareas. En una de las respuestas analizadas en la figura 6 y en la descripción de su comportamiento, así como de un comportamiento similar dado por otro estudiante, se ha podido justificar que las respuestas de algunos estudiantes no siempre responden a la demanda del docente. En estos casos, los estudiantes han dado una única respuesta para dos diferentes cuestiones. Este hecho en concreto ha sido generado por la prevalencia algebraica expuesta en el comportamiento de los estudiantes. Este fenómeno genera que los estudiantes resuelvan la tarea mediante procedimientos algebraicos sin tener en cuenta la consigna y el método gráfico que ésta implica.

Así, desde el punto de vista de la formación de FDMS es preciso recalcar la importancia de resolver tareas mediante diferentes medios, sin el recurso abusivo del álgebra. Este abuso de métodos algebraicos puede resultar especialmente inconveniente en el primer ciclo de ESO, cuando los conocimientos previos del alumnado, aquellos previos de la Educación Primaria, requieren una evolución radical hasta alcanzar la maestría en el uso del álgebra. De hecho, la formación didáctica para los FDMS se hace especialmente necesaria para afrontar con garantías este primer contacto con los objetos algebraicos, donde la referencia gráfica y numérica debe preceder al desarrollo formal de la manipulación simbólica.

Por último, la reutilización y combinación de saberes está presente en las respuestas de los estudiantes. A pesar de no exigírselo, los estudiantes han hecho uso de sus conocimientos acerca del cuadrilátero inscrito. El «uso de la analogía» deja al descubierto la capacidad de los estudiantes de establecer nexos para poder resolver tareas formuladas de manera diferente a la que están acostumbrados y a trasladar saberes de un contexto a otro. Estas dos últimas observaciones constituyen la base para la adquisición de herramientas didácticas para la docencia, que incluyan contextos donde los estudiantes tengan que afrontar *tratamientos* y *conversiones* (Duval, 1995), bien para evocar los objetos representados o para comunicar, bien para efectuar razonamientos o cálculos.

Estos futuros docentes se están formando en conocimientos didáctico–matemáticos, que les permitirán prever posibles comportamientos de estudiantes de Educación Secundaria en procesos de aprendizaje de las matemáticas. Así, es crucial la toma de conciencia de las limitaciones de las representaciones, de los medios materiales y de las técnicas asociadas.

Notas

(1) Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2017–84979–R, del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad.

(2) GeoGebra dispone de funciones que permiten realizar demostraciones, pero se deben tener en cuenta las posibles restricciones del instrumento. Así, se pueden diseñar modelos dinámicos destinados a la demostración de propiedades.

(3) También pueden darse momentos puntuales de regulación que suponen la identificación por aparte del docente de conocimientos necesarios que deben ser compartidos por todos.

Referencias bibliográficas

Artigue M. (2015) *Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering*. In: Bikner-Ahsbahs A., Knipping C., Presmeg N. (eds) Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education, pp. 467–496. Springer, Dordrecht.

Ávila, R., Ibarra S.E. Grijalva, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Relime*, (13), 4–11. [Recuperable en (31/10/2017): http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Avila_Ibarra_Grijalva_Relime2010.pdf]

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

——— (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

——— (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103–131

Godino, J.D., Batanero C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E., Wilhelmi M.R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación «Didactic engineering as design–based research in mathematics education». In B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*, 2810–2819. Ankara, TR: Middle East Technical University and ERME. [Recuperable en (27/11/2017: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/dise%C3%B1o.html]

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Publicaciones, 38, 25–49. [Recuperable en (15/02/2018): https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2763091].

Gutiérrez, A. (2010). Introducción al Seminario I sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 17–19). Lleida: SEIEM.

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 2(1), 52–64. [Recuperable en (01/10/2014): http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279].

Lasa, A. (2016). Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones. Tesis Doctoral, inédita. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Piaget, J., Inhelder, B. (1975). Psicología del niño. Sexta edición. Madrid: Morata.

Wilhelmi, M.R. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la evolución de un proceso de estudio: El caso de la determinación de una circunferencia. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa, F.J. García (Editores), *Sociedad, escuela y matemáticas* (pp. 177–197). Jaén: Universidad de Jaén.

Wilhelmi, M.R., Godino, J.D. & Lacasta, E. (2007). Didactic Effectiveness of Mathematical Definitions: The Case of the Absolute Value. *IEJME–Mathematics Education*, 2(2), 72–90.

Anexos

Anexo 1.
Actividades que realizaron los FDMS
(se anexan sin espacios entre las preguntas):

Entrega 1
Accede a la siguiente dirección en la que encontrarás las construcciones en GeoGebra con las que deberás trabajar: https://www.geogebra.org/m/wsZTllj1

Representa las siguientes circunferencias empleando el capítulo de exploración del Libro-GeoGebra «Determinación de una circunferencia»:
$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$;
$x^2 + 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$;
$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$;
$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$;

Escribe al lado de cada ecuación qué *applet* y qué método se emplean para representar cada circunferencia y responde las siguientes preguntas también formuladas en el Libro-GeoGebra. El cuarto *applet* presenta el Método del cuadrado, que sirve para cualquier circunferencia, por lo que deberás probarlo con las cuatro ecuaciones.

Applet 1:
- ¿Es posible prever cómo será dicha circunferencia? En caso afirmativo, represéntala y prevé su centro y radio. Guarda el documento llamándolo *Applet1* y escribe aquí cuál es su centro y radio.
- ¿Qué relación hay entre en el centro y radio y la ecuación en forma canónica?

Applet 2:
- ¿Siempre es posible dar una representación aproximada de la circunferencia? ¿Por qué? Escribe a continuación la ecuación de la circunferencia con un solo punto de corte y responde las preguntas:
- ¿Cuántas circunferencias posibles hay que pasen por ese punto?
- ¿Cómo será la circunferencia de radio máximo que pasa por ese punto? ¿Por qué? Guarda el objeto que has representado llamándolo *Applet2.1* y escribe aquí cuál es su centro y radio.
- ¿Qué relación hay entre en el centro y radio y la ecuación en forma canónica?
Escribe a continuación la ecuación de la circunferencia con dos puntos de corte y responde las preguntas:
- ¿Cuántas circunferencias posibles hay que pasen por esos dos puntos?
- ¿Cómo será la circunferencia de radio mínimo que pasa por esos dos puntos? ¿Por qué? Guarda el objeto que has representado llamándolo *Applet2.2* y escribe aquí cuál es su centro y radio.
- ¿Qué relación hay entre en el centro y radio y la ecuación en forma canónica?

Applet 3:

- ¿Es posible dibujar la circunferencia exacta? Razona tu respuesta.
- ¿Cuántas circunferencias hay que tengan como centro el punto obtenido?
- ¿Cuál es el mayor radio posible que podría tener la circunferencia? ¿Por qué?
- ¿Qué otro objeto necesitaríamos conocer para poder dar una representación aproximada de la circunferencia en cuestión?
- ¿Qué relación hay entre en el centro y radio y la ecuación en forma canónica?

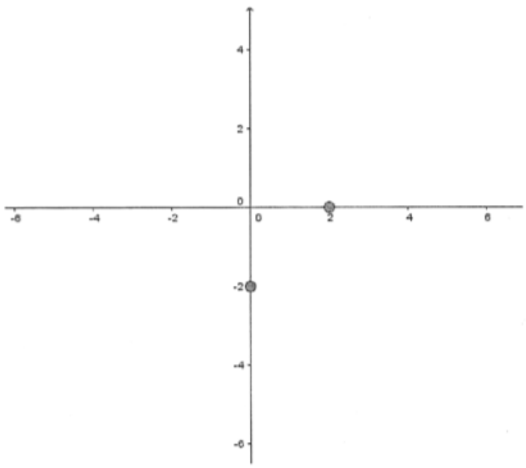
Applet 4:

- ¿Es posible dar la representación gráfica partiendo únicamente del cuadrado? Razona tu respuesta.
- ¿Qué relación hay entre el centro de la circunferencia y del cuadrado?
- ¿La circunferencia y el cuadrado intersecan en algún punto? Si intersecan en alguno, escribe aquí en cuál/cuáles para cada circunferencia.
- ¿Qué relación hay entre en el centro y radio y la ecuación en forma canónica?

Entrega 2

Una vez finalizado el ejercicio en el libro–GeoGebra, conociendo el método que hay que emplear en cada tipo de circunferencia, realiza las siguientes actividades:

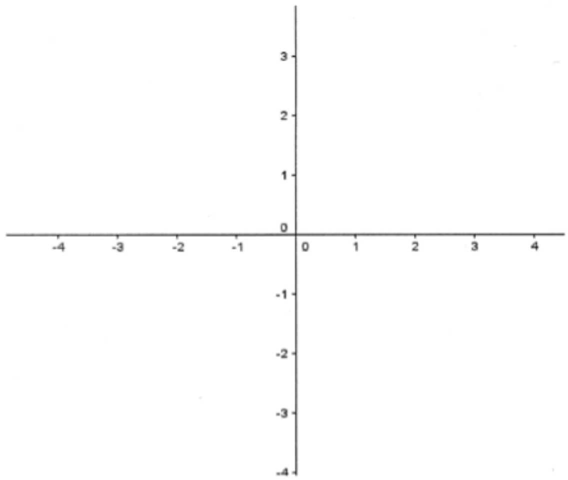
1. Dados estos dos puntos de corte de la circunferencia,



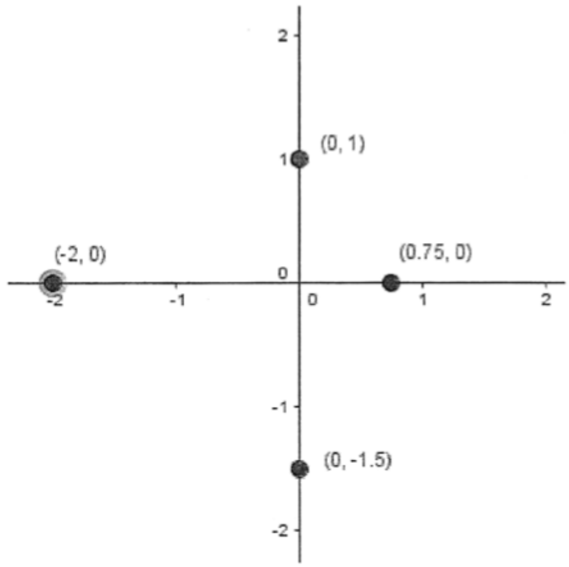
- ¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta.
- ¿En qué cuadrante está el centro de la circunferencia? Razona tu respuesta.
- Sin emplear ninguno de los cuatro métodos gráficos aprendidos, ¿es posible dar las coordenadas exactas del centro? En caso afirmativo, representa el centro y la circunferencia.

2. Dada la ecuación de una circunferencia, $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$,

- ¿Qué método emplearías para representar esta circunferencia? Razona tu respuesta.
- Sin emplear ninguno de los cuatro métodos gráficos aprendidos, ¿es posible representar la circunferencia? En caso afirmativo, realízalo señalando también su centro y radio.



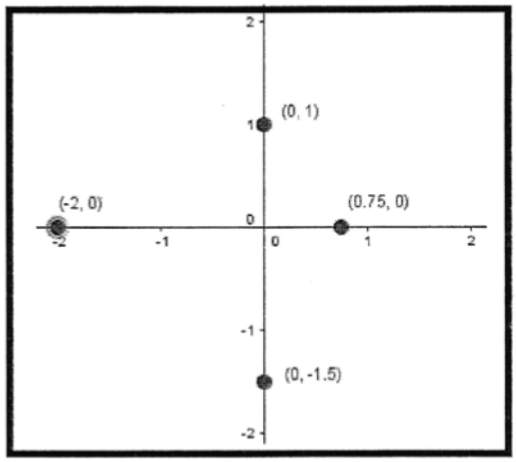
3. Dados estos cuatro puntos de corte de la circunferencia,



- ¿Cuál es el centro de la circunferencia?

Entrega 3

En relación al ejercicio 3, supone que en un aula de Secundaria se da la siguiente situación: *Dos alumnos, A y B, deben resolver el tercer ejercicio de manera conjunta, por lo que están discutiendo cuál es el centro de la circunferencia definida por esos cuatro puntos. Cada alumno está sentado a un lado de la mesa de la siguiente manera:*



B

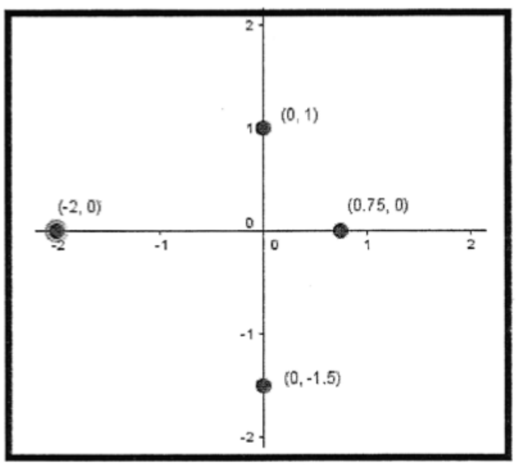
A

El estudiante A afirma que el centro es (-0.625, 0); en cambio, el estudiante B lo determina en el punto (0, -0.25).

Escribe un posible diálogo entre estos dos alumnos al realizar de manera conjunta el ejercicio 3 en el que cada uno razone cuál es su centro y por qué. Identifica a cada alumno al inicio de sus intervenciones estructurando el diálogo de la siguiente manera:

[A] ....
[B] ....

Entrega 4



B

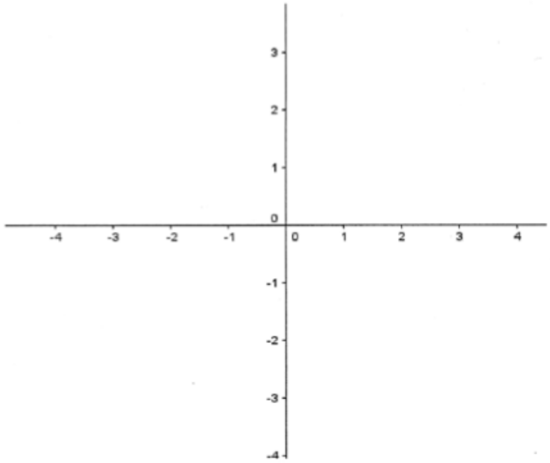
A

Después de la discusión interviene otro alumno, el estudiante C. Escribe otro posible diálogo en el que las aportaciones de este tercer compañero ayuden a obtener la solución correcta de manera que terminen concluyendo que el centro es (-0.625, -0.25).

Entrega 5

4. Resuelve las siguientes cuestiones:

a- Dada la ecuación $x^2 + 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$ representa la circunferencia por el método algebraico, es decir, mediante transformación de la ecuación.



Entrega 6

b- Escribe la ecuación en forma canónica que has obtenido en el apartado A y entrega la hoja anterior.

- Comprueba que la ecuación canónica es correcta en capítulo de ilustración del libro-GeoGebra «Determinación de una circunferencia».
- En caso de no serlo, corrígela escribiendo aquí la ecuación correcta.
- Suponiendo que un grupo de alumnos de Secundaria ha realizado el apartado A, da ejemplos de posibles respuestas que podrían dar los alumnos en las siguientes situaciones:

Estudiante 1: Ha realizado correctamente la transformación algebraica, pero no ha representado bien el centro.

Estudiante 2: Ha realizado correctamente la transformación algebraica, pero no ha representado bien el centro ni el radio.

Estudiante 3: No ha realizado correctamente la transformación algebraica y corrige con la ayuda del applet.

Entrega 7

Completa el siguiente cuadro empleando el capítulo de ilustración del libro–GeoGebra «Determinación de una circunferencia». Realízalo en el menor tiempo posible.

Ecuación implícita	Applet	Centro Radio	Ecuación canónica
$x^2 - 2x + y^2 - 3y - 0.75 = 0$			
$x^2 - 4x + y^2 + 5y + 9.25 = 0$			
$x^2 + y^2 + 2y = 0$			
$x^2 + x + y^2 - 5y + 4.25 = 0$			
$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$			
$x^2 - 12x + y^2 - 10y - 45 = 0$			
$x^2 + y^2 - 6.25 = 0$			
$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 9 = 0$			
$y^2 + 3x + y^2 - 2y + 1 = 0$			
$x^2 + 6x + y^2 + 8y + 24 = 0$			