

Silvia C. Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.
setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Reflexiones y aportes para ayudar a re-pensar la ense- ñanza de las matemáticas⁽¹⁾

Resumen

En la primera parte de este artículo se trata de compartir algunas reflexiones teóricas sobre la estrecha relación que existe entre los diferentes posicionamientos que los docentes poseen ante la naturaleza de los objetos matemáticos y su manera de sostener la actividad matemática. A continuación se identifican consecuencias de estos posicionamientos tanto en el diseño del currículum como en el funcionamiento de las clases, intentando fortalecer estos planteos con aportes empíricos producto de una experiencia de prácticas interdisciplinarias. En una segunda parte de este trabajo se identifican ciertas características de la actividad matemática las cuales se proponen como base de un posible posicionamiento epistemológico que apunte a superar limitaciones señaladas en la primera parte. El fin primordial de estas reflexiones e ideas es el de contribuir a la formación de una conciencia epistémica, basado en actuales aportes de la Didáctica de la Matemática. Se presentan diversos trabajos empíricos, que ayude a los docentes de matemáticas a ampliar su mirada en los procesos de reflexión sobre sus prácticas cotidianas.

Palabras clave: enseñanza de la matemática, didáctica de la matemática, profesor de matemáticas, actividad matemática.

Abstract

The first part of this work is aimed to get theoretical reflections on the narrow relationship existing between different positionings that are assumed for teachers about the nature of the mathematical objects and their way of sustaining the mathematical activity. Next, the consequences of these positionings are identified, watching the curriculum designs as the classes development. In the second part, some characteristics of the mathematical activities are identified, they are visualized like a base of a possible epistemological positioning that points to overcome limitations pointed out in the first part. The primordial purpose of these reflections and ideas, is to share an epistemic mark of reference, based on the current contributions of the Mathematic's Didactic and the diverse empiric works carried out by researches in science education, helping to the mathematical teachers to enlarge their look in the reflection processes on their daily practices.

Keywords: *mathematical teaching, didactic of the mathematic, mathematics teacher, mathematical activity.*

1. Introducción

Para fundamentar una reflexión que ayude a re-pensar la enseñanza de la matemática se considera necesario, en primer lugar, poner en evidencia la estrecha relación que existe entre los diferentes posicionamientos que los docentes poseen ante la naturaleza de los objetos matemáticos y la manera de sostener la actividad matemática en el aula. Convencidos que este planteo onto-epistemológico es uno de los fundamentos clave que sostiene la toma de decisiones didáctico-matemáticas de los docentes, se continúa en este trabajo con la identificación de posibles consecuencias que estas posiciones tienen tanto en la construcción del currículo como sobre el funcionamiento del aula de matemáticas. Se ilustra, en este apartado, la necesaria construcción del diálogo entre saberes como condición esencial para abordar el carácter relativo a diferentes contextos de uso de los conocimientos matemáticos. Ello a través del relato de una experiencia alternativa de trabajo cooperativo entre docentes de campos disciplinares diferentes que se atreven a romper con prácticas instituidas y se acercan a pensar la complejidad a través de miradas integradores. En segundo lugar, se propone una posible propuesta de posicionamiento onto-epistemológico con el objetivo de enriquecer la reflexión sobre cómo “se piensa” y “se dice” el saber matemático para ser enseñado. El fin primordial de este segundo momento de trabajo en el artículo es compartir un marco de referencia epistémico que ayude a los docentes de matemática a ampliar su mirada para el análisis de sus prácticas de enseñanza. En el último apartado: A modo de síntesis, se intenta poner en evidencia la relación entre las dos partes esenciales en que se estructura el artículo, señalando que las características de la actividad matemática identificadas en la segunda parte se pueden transformar en indicadores estratégicos para superar limitaciones de la actividad docente que producen los posicionamientos más clásicos

descriptos en la primera parte, lográndose de esta manera la enunciación de una serie de hipótesis didáctico-matemáticas planteadas como parte de un medio fecundo para seguir explorando en futuras investigaciones.

Descrita la estructura del artículo y su objetivo se explicitará sintéticamente, a continuación, el marco desde donde se interpretarán los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como así también los problemas institucionales que movilizaron este trabajo.

2. Consideraciones teóricas y enunciación de problemas

En consonancia con las actuales investigaciones del *Programa epistemológico en Didáctica de las Matemáticas* (Gascón, 1998), se sostiene por un lado, que para enseñar y aprender matemáticas es necesario involucrarse en un *proyecto de estudio* (Chevallard y otros, 1997), donde los alumnos debieran ser los actores primordiales y el profesor el guía o director del proceso de estudio, considerando estos procesos de estudio como los principales productores del aprendizaje.

Por otra parte, en este marco de análisis y reflexión ¿qué rol debería jugar la escuela? Una posible explicación/respuesta a esta cuestión, al decir de Godino (2003), y a la que adhiere este trabajo es: *la que nos debería permitir ponernos en contacto con diferentes sistemas de prácticas⁽²⁾, producto de la actividad humana que permite insertarnos y vivir en sociedad*. Aquellos a los que interesa esta problemática, comparten y saben que las matemáticas están presentes en nuestra vida cotidiana y en la no tan cotidiana. Sin embargo también perciben que tal como “viven” actualmente en la mayoría de nuestras escuelas, se presentan como un saber difícil de acceder y hasta muchas veces inútil para buena parte de la sociedad. Esta percepción se objetiviza en una importante red de problemas que atraviesa

nuestro sistema educativo transformándose en causas que determinan consecuencias negativas diversas, tales como: masivo fracaso de los alumnos al ingresar al nivel universitario en carreras que sostienen en su formación básica a la matemática; desarticulación de los procesos de enseñanza entre cada uno de los niveles del sistema educativo (nivel inicial, EGB1, EGB2, EGB3; PM; universitario), ausencia de argumentos por parte de los docentes para justificar tanto el por qué, como el alcance de los contenidos matemáticos a enseñar; entre otros.

3. Posicionamientos antagónicos ante la naturaleza de los objetos matemáticos: su relación con la actividad que se desarrolla sobre ellos

Reconocida tal crucial problemática se ha elegido como puerta de entrada para su abordaje detenerse a razonar sobre cómo condicionan la tarea docente, algunos posibles posicionamientos de los maestros y profesores de matemáticas ante la naturaleza de los objetos matemáticos y ante la actividad matemática que sobre ellos se desarrolla. En un primer momento, tal como sostienen Godino, Batanero y Font (2003) podría parecer que esta discusión está alejada de los intereses prácticos del profesor, cuya preocupación ineludible es hacer *más efectiva* la enseñanza de la matemática, vinculando esta efectividad prioritariamente a *“enseñar todos los contenidos previstos en el Currículo en el tiempo disponible”*. Por otro lado, la preocupación de plantearse: ¿qué es un objeto matemático? o ¿cómo se construye un conocimiento matemático? forma parte indudable de estudios ontológicos y epistemológicos. Pero, tal lo mostrado por múltiples y actuales investigaciones didácticas nacionales y extranjeras, (Gascón, 2001, entre otras) ya no se puede dejar de considerar que este planteo resulta ser

un factor condicionante para la actuación del docente, y por ende del desenvolvimiento de la clase de matemáticas.

Razonemos sobre dos posiciones dicotómicas con el objetivo de avanzar en la comprensión de esta problemática, aunque no se debe dejar de reconocer que en la realidad de nuestras instituciones son los tonos grises los que generalmente “viven” y “actúan”. En efecto, si se asume que los objetos matemáticos tienen *existencia propia* (aunque no sea en el aspecto material), en otras palabras, si se está convencido que los objetos existen independientes de la actuación y decisión de las personas que lo conocen y lo utilizan, ¿cuál es la mejor forma de enseñarlos? Sin duda, ayudar a *descubrirlos*. Pero, si mas bien se asume que los objetos y la actividad científica son el resultado social y cultural de representar una realidad compleja y que es el pensamiento sobre esa realidad, elaborado en interacción con otros, el que la transforma entonces situamos a la matemática dentro de los procesos de negociación y construcción social que nos enfrentan con otras maneras de concebir y organizar su enseñanza.

Por otra parte, analizando desde este lugar a la construcción histórica de las matemáticas se visualiza un tipo de progreso que pone en evidencia que las definiciones, propiedades y teoremas que objetivizan el saber matemático, también evolucionan en relación directa con la cultura de cada época y dependiendo de los contextos que determinan sus usos. Esto nos lleva a pensar sobre la necesidad de una enseñanza de las matemáticas que ayude a desarrollar en los alumnos aptitudes para contextualizar e integrar. Hay autores como Edgar Morin que denominan a este tipo de conocimiento: *conocimiento pertinente*. Para ayudar a fortalecer esta posición, vale citarlo textualmente cuando al referirse a este tipo de conocimiento afirma que es aquel que: *“Es capaz de situar toda la información en su contexto y, si es posible, en el conjunto en que éste se inscribe. Inclusive, es posible decir que el conocimiento*

progresar principalmente no por sofisticación, formalización y abstracción sino por la capacidad de contextualizar y totalizar” (2002:15).

Ahora bien, ¿desde qué lugar se puede lograr desarrollar este tipo de conocimiento?

3.1 Diferentes interpretaciones sobre la relación entre la matemática y sus aplicaciones

La relación entre la Matemática y sus aplicaciones de acuerdo a las extremas posiciones planteadas en el punto anterior ya ha sido perfectamente reconocida por especialistas en Didáctica de las Matemáticas tales como Godino y otros (2003). Dado el objetivo de este artículo las mismas serán retomadas, para plantear posibles consecuencias en distintos niveles de transposición didáctica del saber matemático. Estas consecuencias serán descritas y analizadas a continuación, desde ambas posiciones, en el seno del currículo y en el trabajo específico del aula de matemáticas; ya que son dos instituciones fundamentales que se considera deben ser revisadas para pensar en un funcionamiento “articulado” del sistema de enseñanza.

- *Como consecuencia de la primera posición* el desarrollo de la teoría matemática se concibe de manera autónoma de sus aplicaciones. Esto conlleva a que sólo se podrá aplicar conocimiento matemático luego de haber adquirido importante teoría que necesariamente preceda a las aplicaciones. De esta manera las mismas son consideradas un suplemento de la matemática y por lo tanto en el currículo se puede prescindir de ellas, pues se permite hablar dicotómicamente de matemática pura y matemática aplicada. Asimismo, este posicionamiento autoriza a concebir un trabajo en el aula secuenciado y gradual que posibilite asegurar que los alumnos pueden resolver las aplicaciones luego de haber adquirido la teoría matemática necesaria.

- *Como consecuencia de la segunda posición*, las matemáticas aparecen como una respuesta a

problemas de carácter antropológico, es decir, relativa al entorno físico, biológico y social en el que el hombre vive. Esto implica una estrecha relación, a lo largo de todo el currículo, de la matemática con sus aplicaciones y con las otras ciencias pues se sostiene la importancia de dejar al descubierto la necesidad y las “razones de ser” de cada una de las partes de las matemáticas. En este marco el desarrollo de la matemática exige no sólo un trabajo intra-disciplinar, sino que también necesita del diálogo con otros saberes, lo que permite generar y plantear nuevos problemas a resolver. De acuerdo a esta última concepción la elaboración de un currículo y el desarrollo de las clases de matemáticas en cualquier nivel educativo se tornan procesos doblemente complejos, porque además de concebir los conocimientos matemáticos como una construcción humana respondiendo a requerimientos de una cultura especial, se necesitan también conocimientos de otras estructuras como las de las ciencias físicas, naturales y sociales. Ser concientes de esta doble complejidad es absolutamente necesario para tratar de evitar en los procesos de transposición que involucran estos saberes científicos sufrir nuevamente los efectos del fenómeno de “*ilusión de transparencia*”, identificado ya en el marco del Programa Epistemológico de Didáctica de las Matemáticas como uno de los problemas didácticos que condiciona la comprensión del conocimiento matemático. En este marco de análisis tanto para la construcción de un currículo como para la organización de una clase de matemáticas –las dos instituciones seleccionadas para observar las consecuencias de estos modelos teóricos extremos– surge la necesidad de plantearse nuevos interrogantes, tales como: ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar conceptos como el de “función” o el de “medida”? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se les asocia? ¿Qué tipo de argumentación permite validarlos? ¿Qué lenguaje representa y operativiza

sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar? ¿Qué dialécticas intra e inter-disciplinarias permiten cambios y evolución de significados de los objetos estudiados? Estos cuestionamientos nos enfrentan a una complejidad sistémica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la que se torna interesante resaltar la necesidad de instaurar la importancia del trabajo colectivo entre docentes, en tanto construcción social de los saberes y construcción de *comunidades de prácticas* (Wenger, 1998), los cuales desde campos disciplinares diferentes se esfuerzan por superar la fragmentación y atomización a la que están sometidos generalmente los contenidos. A tal efecto, se propone compartir un informe sobre una experiencia educativa desarrollada en un espacio curricular específico: “Taller interdisciplinario de resolución de problemas matemáticos-físicos” del currículum del Profesorado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Río Cuarto, con el fin de presentarlo como un contexto de reflexión que permita iluminar nuevas ideas para sostener este tipo de trabajo colectivo y apoye empíricamente el análisis que se lleva a cabo en este artículo, apuntando a posibles mejoras de las prácticas docentes matemáticas.

3.1.1. Un ejemplo de trabajo en equipo: diálogo entre saberes

En primer lugar se pretende contextualizar institucionalmente el trabajo realizado, por lo que vale preguntarse: ¿cómo se llegó hasta esta instancia de trabajo? o ¿Cómo los docentes involucrados consideraron necesario generar este tipo de prácticas docentes?

Desde hace varios años y no sin grandes dificultades, los docentes responsables de esta experiencia⁽³⁾ junto a un grupo de docentes de la Universidad Nacional de Río Cuarto, (Córdoba-Argentina) han transitado por prácticas diversas

que han dado origen tanto a investigaciones educativas como a experiencias innovadoras áulicas a partir de reconocer la naturaleza compleja de la práctica docente que obliga a relacionarse con saberes no estáticos, integrados, producto de la dialéctica científica y de su historicidad.

Un punto de encuentro ha resultado ser el Programa de Investigaciones Interdisciplinarias sobre el aprendizaje de las Ciencias (PIIAC), el cual se desarrolla en la UNRC desde 1989 y en el que se inscribe la investigación educativa de dichos profesores, cuya fortaleza se basa en pensar en el colectivo de docentes y en la construcción de un espacio de diálogo entre saberes cuyas consecuencias más claras son la desnaturalización de la idea de un voluntarismo ingenuo como medio para la transformación educativa y el corrimiento de la unidad de la escala docente: *mi aula*.

Es un tipo de trabajo que se está tratando de discutir y consensuar en tal universidad. El mismo conlleva cambios sustanciales de interrogantes que han guiado la producción docente inherente a esta experiencia. En efecto, preguntas ingenuas y clásicas para decidir tipos de contenidos tales como: ¿ecuaciones diferenciales o transformación de sistemas de coordenadas? Se convirtieron en: ¿cómo lograr que con el abordaje de una problemática curricular reconocida como interdisciplinaria, se construyan herramientas que permitan generar una posición crítica en los estudiantes sobre la naturaleza y desarrollo de los conocimientos científicos? ¿Cuáles herramientas permitirían poner al descubierto que los objetos y la actividad científica son el resultado social y cultural de representar una realidad compleja? ¿Cómo hacer para que tales herramientas sean el soporte onto-epistemológico para resolver problemas profesionales? Para esto ¿qué deben conocer tales estudiantes?

Es en este sentido que se planificó contextualizar contenidos reconocidos como inter-disciplinares, tales como la noción de medida, en el marco de las condiciones culturales y sociales donde se

han planteado, resuelto y hasta transformado los problemas asociados históricamente con esta noción. Esta metáfora ecológica, parafraseando a Godino (2003), ayuda a *comprender la génesis, el desarrollo y el funcionamiento de esta noción* y permite como docente *fundamentar la construcción de un conocimiento en movimiento*.

El punto de partida de este proyecto de trabajo en conjunto fue compartir la concepción de que toda ingeniería didáctica, presupone y utiliza necesariamente un modelo más o menos elaborado (aunque a menudo implícito) de lo que se entiende por actividad científica, en este caso actividad matemática y física, y por lo que se entiende por enseñar y aprender ciencias. La explicitación de estos modelos, por parte de los docentes responsables del proyecto, permitieron que los mismos fueran cuestionados y reelaborados, por lo que se transformaron en puntos de referencia para la elaboración del proyecto en cuestión.

La exposición de algunos elementos descriptivos de esta experiencia que ha sido ya contextualizada institucionalmente, se dividirá en tres partes: en la primera se enunciará lo consensuado por los docentes responsables con respecto a alguna de las tesis relacionadas con el modelo de actividad científica que se presupone y lo que se entiende por enseñar y aprender una ciencia para formar profesores en ciencias. En la segunda parte se presentarán los objetivos específicos de la experiencia y por último se explicitarán y analizarán opiniones y producciones de estudiantes que permiten tener una “medida” del logro de los objetivos propuestos. Tal casuística da cuenta de movilizaciones cognitivas en torno a contenidos específicos donde los propios estudiantes reconocen explícitamente avances en la construcción de sus *significados personales*⁽⁴⁾.

En efecto, se sostiene un modelo epistemológico general de la actividad científica que enfatiza la interrelación entre los siguientes elementos: la construcción y el desarrollo de técnicas, la evolución que sufren los campos de problemas

al ser estudiados en relación a sus maneras de resolverse y la construcción de leyes y teorías asociadas que permiten describir, interpretar y justificar los distintos elementos que componen los procedimientos, las técnicas, los algoritmos y los campos de problemas, todos ellos mediados por un lenguaje que los expresa y soporta. Se trata de un modelo que se opone frontalmente al modelo ingenuo y espontáneo de construcción del conocimiento, descrito como lineal y acumulativo y que por lo tanto reconoce a dicha construcción y evolución como producto de procesos dialécticos intra e inter-disciplinarios.

Es en este marco que los objetivos del taller son: - profundizar el propio conocimiento disciplinar planteando la relación matemática-física como una *calle de doble sentido*, utilizando la expresión de Polya en su libro: *Métodos Matemáticos de la ciencia*;

- desarrollar habilidades en los futuros profesores en Matemática que permitan la detección de dialécticas inter-disciplinarias puestas en juego en procesos de construcción del conocimiento científico.

Con el propósito de seguir avanzando y transitar la necesaria etapa de confrontación y reelaboración de ideas que facilite la reflexión sobre la propia práctica, vale compartir el análisis realizado a opiniones vertidas por estudiantes de este Taller al momento de tener que construir el trabajo final. La consigna del mismo “obliga” a reflexionar sobre la producción matemática-física desarrollada a lo largo del cursado, con un doble fin. Por un lado hacer conciente posibles avances de significados personales sobre la noción de medida y por el otro poner a funcionar herramientas de análisis didáctico-matemático que les permitan detectar procesos dialécticos entre las ciencias, en torno al desarrollo de nuevos significados de esta noción dependientes de diferentes contextos.

Ante esto, 6 alumnas de las 8 que tenía el curso

completo del año 2005, explicitan de esta forma sus movilizaciones cognitivas: *“Nuestra primera idea sobre la noción de medida era la siguiente: ‘el número que devuelve el instrumento de medición’”*. Distintos sistemas de prácticas personales generados ante problemas que permitieron en un principio aplicar modelos geométricos euclidianos⁽⁵⁾ los cuales fueron cuestionados al retornar al contexto inicial, quedando así al descubierto las limitaciones de los mismos principalmente asociadas a las concepciones de los alumnos sobre el espacio y el tiempo, fueron los motores de avance para transformar y ampliar el significado numérico de la noción de medida y poder empezar a entenderla como *“un proceso”* y *“relativa al sistema de referencia”*. Ese camino de construcción de significados basado en la aparición de nuevos problemas que *“obligaban”* a volver a poner en contexto los significados personales de los estudiantes sobre *qué se mide* y *cómo se mide*, permitió también enriquecer el significado de otras nociones asociadas a la de medida tal como la de *“unidad de medida”*. Al respecto afirman: *“Otra noción que re-significamos es la de unidad, pues dejó de ser (para los alumnos) sólo una referencia que entra una cantidad de veces en otra medida, para estar además en relación directa con el sentido común del observador y regida por un sentido de economía”*. Además reconocen, producto de una mirada totalizadora, el cambio de estado del significado personal del objeto en cuestión, al decir: *“En síntesis pasamos de concebir un objeto estático a integrarlo a un sistema dinámico, más aún a un sistema relativo donde el espacio y el tiempo son entendidos como relativos y dependientes”* (Virginia, Gisela, María, Ana, Mónica y Silvia, Alumnas UNRC 2005, citado en Ortiz y otros (2006)). Asimismo, en otro trabajo final correspondiente al año 2007 en la búsqueda y explicación de dialécticas interdisciplinarias –la segunda dirección establecida por la consigna– se sostiene:

“A partir de habernos planteado como ‘proyecto de estudio’ la evolución de significados del concepto de velocidad asociado al proceso de medición, pudimos detectar relaciones dialécticas entre matemática y física, y las consecuencias de las mismas para ambas ciencias, sobre todo, en la construcción de leyes físicas y de lo que nosotros conocemos como análisis matemático. Por ejemplo: a partir del análisis que hace Newton de las trayectorias de los cometas y que fuera desarrollado en el cuerpo de nuestro trabajo final, emerge desde el contexto físico la idea de continuidad. Esta propiedad es retomada y profundizada en el ámbito de la matemática logrando ser tematizada en el siglo XIX con la ‘ayuda’ de la noción de límite, que a su vez permite enriquecer la producción física, pues se puede justificar matemáticamente que la aceleración de un cuerpo no necesariamente es continua. En otras palabras se construye un modelo matemático que resuelve y enriquece la problemática física inicial y a su vez permite resolver nuevos problemas” (Bollo, Bovio, alumnas UNRC, 2007).

Planteos personales del tipo de los anteriores, nos han permitido reflexionar que estas formas de ayudar a los alumnos a relacionarse con el conocimiento científico, basada en poder *pensar* y *decidir* sobre situaciones que cuestionan la *“realidad”* permitiendo que se pregunten: ¿la percibo tal cual es?, ¿qué es lo que se puede indagar?, ¿se puede conocer pensando y razonando?, a través de qué?, ¿qué se puede medir?, ¿cómo? generan una nueva actitud y una posición diferente ante el conocimiento científico el cual empieza a ser percibido como resultado del pensamiento y la acción del hombre, o sea como producto cultural y social. Vale también compartir cuestionamientos generados por los propios estudiantes ante la sucesión de las situaciones problemáticas presentadas en el taller, que se consideran de alto carácter formativo para un futuro profesor en matemáticas, y que han guiado la construcción de

nuevos significados sobre conceptos o nociones que hasta este momento de la formación del profesor en matemáticas eran incuestionables, como por ejemplo, *¿cómo determino un plano horizontal para encontrar la distancia al horizonte? ¿A quién le pregunto?, ¿a la naturaleza?, ¿al edificio de la matemática?, ¿al modelo de la naturaleza que la física ha constituido? ¿Es un problema de representación matemática o debo medir?, ¿hay una única representación?*

Por último y a modo de síntesis para este informe, se considera que esta experiencia docente puede convertirse en una fuente de material empírico interesante para compartir y profundizar su análisis por docentes preocupados y ocupados en la formación de profesores en Matemáticas.

4. Propuesta alternativa de posicionamiento onto-epistemológico

Volviendo a la preocupación inicial, que espacialmente está situada en las aulas de matemáticas y que se puede sintetizar en el siguiente interrogante: *¿cómo ayudar a nuestros alumnos a estudiar matemáticas?* Se asume una posición onto-epistemológica que permite identificar aspectos ausentes de la actividad matemática, al menos, para la primera posición planteada en el apartado 3 de este artículo. El objetivo de este punto es proponer a los docentes transitar por un camino de indagación sobre las características de la actividad matemática que les ayude a la toma de decisiones para la organización de clases centradas en la producción y validación de conocimiento matemático. Se intenta así compartir un posible modo de avance en perfiles de solución a las problemáticas objetivadas en la introducción de este trabajo y que, como se dijera, atraviesan todo el sistema educativo. La exploración de la complejidad de la actividad matemática tiene además como fin didáctico-

matemático entender el porqué de muchas de las posiciones reduccionistas sobre la misma. En otras palabras y en consonancia con lo expresado por Godino y otros (2003), se trata de plantear un grado de superación de los enfoques que enfatizan alguna dimensión de la matemática por encima de las demás (lo discursivo sobre la práctica, lo axiomático sobre lo constructivo, lo deductivo sobre lo plausible), distinguiendo las siguientes características del trabajo matemático que, tal como se anticipara en la introducción de este artículo, se proponen como posibles ejes para volver a pensar su enseñanza:

- El uso del razonamiento plausible o conjetural en las etapas de exploración y de demostración de los problemas.

Este razonamiento permite elaborar y contrastar conjeturas y su *funcionamiento dialéctico con el razonamiento deductivo* tiene como fin último el de producir saber matemático. En otras palabras, la utilización de un razonamiento no-deductivo que permita elaborar, contrastar y transformar conocimiento matemático, resulta ser condición necesaria para comprender y otorgar significados a la construcción de un sistema conceptual organizado.

- La comunicación de lo que “se piensa” y “se dice” en distintos registros y representaciones.

La amplia utilización de diferentes lenguajes, permite a las matemáticas representar situaciones de naturaleza muy diversa a partir de modelos comunes, a veces explicitando aspectos y relaciones no triviales, otras ocultando determinados significados, pero siempre permitiendo anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados que todavía no se hayan producido. A los fines de iluminar este aspecto esencial de la actividad matemática vale pensar sobre contenidos instituidos en la enseñanza media obligatoria tales como las identidades algebraicas que en cada miembro sintetizan prácticas matemáticas

emergentes de diferentes contextos en los que se plantean los problemas. En efecto, si por ejemplo se considera:

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1),$$

es sabido que ambos modelos son la última expresión de diferentes *sistemas de prácticas personales* (Godino y Batanero, 1994) generadas ante distintas formas de contar, aunque ambos sean lógicamente equivalentes ya que se sintetizan en el cálculo de:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Efectivamente, el miembro de la izquierda –modelo combinatorio– expresa la cantidad de combinaciones distintas de n elementos tomados de a dos, y el de la derecha –modelo aritmético–, expresa la suma de los primeros $n-1$ números naturales⁽⁶⁾. No es verdad, o al menos sería un análisis muy superficial, parafraseando a Godino, creer que esta capacidad del conocimiento matemático es simple consecuencia del uso de un lenguaje simbólico. *Si las notaciones simbólicas pueden llegar a desempeñar efectivamente estos papeles (representacional e instrumental) es debido a la propia naturaleza del conocimiento matemático que está en su base y al que le sirven de soporte* (Godino, y otros, 2003:24).

- *El establecimiento de nuevas relaciones matemáticas a partir de prácticas que se desarrollan sobre los objetos matemáticos.*

En efecto, cuando se dice por ejemplo que “*los números racionales son densos en los reales*” o cuando nos referimos a que “*esta figura tiene dos pares de lados paralelos al igual que esta otra por lo que ambas conforman una clase de figuras denominadas paralelogramos*”, no se está expresando sólo una propiedad de los racionales o de cada una de las figuras analizando cada objeto en sí mismo, sino que se está expresando una propie-

dad inherente al objeto suponiendo la naturaleza relacional del mismo. En el primer ejemplo, se da existencia a la propiedad del conjunto de los números racionales cuando se relacionan los números racionales con otro conjunto de números, en este caso los números reales. En el segundo ejemplo se muestra la existencia de una relación entre las características de los lados de dos figuras lo que permite su agrupación en una nueva clase de figuras que además al compararse con respecto a esa característica va a ocultar necesariamente a otras, tales como el tamaño de cada una de ellas.

Estas relaciones, producto de la actividad humana, en forma análoga al uso del razonamiento conjetural en los momentos de exploración sobre los objetos y problemas matemáticos, tienen carácter más constructivo que deductivo.

- *El reconocimiento de la dualidad: exactitud-aproximación del trabajo matemático para observar, interpretar y leer la “realidad”.*

Por un lado se comparte que la matemática tiene como una de sus principales funciones devolver, a partir de resolver operaciones, resultados exactos; lo que le ha permitido ser reconocida socialmente como la “ciencia exacta” por excelencia. Por otro lado, bajo este marco de análisis teórico y con el apoyo empírico de experiencias del tipo como la informada en el subapartado 3.1.1, queda al descubierto que la comparación de un modelo abstracto –último y acabado saber matemático– con una parte de la realidad que se problematiza y que se pretende explicar, es siempre aproximada. Esta dualidad epistémica, no está generalmente reconocida. Una manera de develar estas ausencias en los posicionamientos más clásicos de los docentes podría ser empezar a preguntarse con mayor asiduidad, cuánto “viven” en sus clases de matemáticas situaciones tales como: *Estime $7/8 + 12/13$* , cuando se enseña operaciones entre fracciones o cuánto se cuestionan sobre qué representaciones son más pertinentes para

resolver tareas presentadas por los libros de textos al iniciar, por ejemplo, el estudio de funciones con los famosos problemas físicos de encuentro: *¿por qué los gráficos cartesianos sólo se usan para representar soluciones exactas?, las tablas ¿no brindan ninguna información en tales problemas?*⁽⁷⁾.

5. A modo de síntesis

Las reflexiones, razonamientos e ideas expuestas tratan de hacer visible la complejidad de la actividad matemática en tanto se la considere actividad humana y pretenden, en este marco, poner al descubierto características de la misma que pueden transformarse en una base onto-epistemológica propicia para que los docentes se conviertan en verdaderos “ayudantes” de procesos de estudios matemáticos. Experiencias docentes como la informada en este artículo, investigaciones didáctico-matemáticas como las citadas en las notas finales del mismo, e importantes y reconocidos intentos sistemáticos de formación en esta dirección, especialmente dirigida a maestros, que en nuestro país se han realizado y/o se están realizando⁽⁸⁾ tratan de mostrar la puesta en marcha de un trabajo matemático diferente en los distintos niveles educativos de nuestro país y conforman una necesaria base empírica que permite fundamentar el análisis para posibles mejoras de las prácticas matemáticas docentes. Asimismo, el trabajo concreto de exploración de la complejidad de la actividad matemática, tiene además un fin didáctico-matemático: entender el porqué de muchas de las posiciones reduccionistas sobre la misma, tal es el caso de la primera posición epistemológica mencionada en la sección 3.

Es así que, en la dirección marcada por ambos propósitos y para finalizar este trabajo se expondrán una serie de hipótesis didáctico-matemáticas, que en el marco de futuras investigaciones de carácter esencialmente cualitativo deben ser entendidas, tal como lo señala con absoluta pre-

cisión Ruiz Higuera (1998), como expectativas sobre los resultados, y no como hipótesis en el clásico sentido estadístico.

- Desarrollar el razonamiento matemático tanto deductivo como plausible, movilizand la capacidad de formular como así también de resolver problemas, de comunicar las ideas y relacionarlas con otras partes de la matemática y de otras disciplinas reconociendo y haciendo funcionar la dialéctica intra e inter disciplinar como motor de avance en la producción de conocimiento matemático, puede resultar uno de los fines primordiales del docente que se propone “ayudar a estudiar” matemática a sus alumnos.

- Realizar una cuidadosa selección de las tareas que proporcionen al alumno la posibilidad de relacionarse con un medio significativo que provoque respuestas, promoviendo tanto la formulación de conjeturas, la utilización de distintas lenguajes no sólo para representar simbólicamente sino para transformar significativamente el conocimiento matemático, como la expresión de sus validaciones dentro de un clima cooperativo y científico y la necesidad de desprenderse de las condiciones particulares de la situación, en otras palabras elegir una tarea que favorezca *que se piense, se produzca, se transforme, se valide y se generalice matemática* en la institución escolar se puede convertir en una de las acciones docentes con mayor potencialidad que permiten “ayudar a estudiar” matemática en la escuela.

- Rescatar la importancia de la existencia del trabajo cooperativo y aprendizaje mutuo entre docentes particulares que se acercan a pensar la complejidad de la ciencia desde lugares más integradores y fructíferos, y propender a su desarrollo se puede transformar en un camino posible y útil a transitar para influir en los posicionamientos epistemológicos de los futuros profesores en matemáticas.

- Lograr una construcción progresiva de una red de conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos “dominando” el lenguaje matemático

a través de la actividad generada por las tareas propuestas, puede resultar uno de los más claros emergentes en las prácticas matemáticas de un alumno que es “ayudado” por un docente.

En suma, estas hipótesis que emergen en un marco que trata de poner al descubierto las limitaciones de los posicionamientos más clásicos de los docentes de matemáticas, pretenden inducir a que se reflexione sobre cómo el tipo de reconocimiento que se haga de las características inherentes a la actividad matemática va a derivar en una forma de “vivir” y hacer “vivir” una clase

de matemáticas. Asimismo lleva coherentemente a reconocer la necesidad de que el docente de matemáticas de cualquier nivel educativo debe “dominar” con profundidad esta ciencia, entendiéndolo por ello no sólo saber mucho de matemática, sino fundamentalmente *saber de otra manera* (Sadovsky y Sessa, 2005).

Este desafío no implica tratar de adquirir una receta que asegure eficacia en el desempeño profesional. Implica cuestionamientos, “estudio”, compromiso social y científico, de todos los actores del sistema educativo.

Agradecimiento: al Dr. Félix Ortiz por sus sugerencias y trabajo compartido y a los evaluadores de este artículo que con sus valiosas observaciones y constructivos comentarios han permitido mejorar sustancialmente su presentación.

Notas

⁽¹⁾Alguna de estas reflexiones fueron expuestas por la autora de este artículo en la Conferencia inaugural dictada en el Primer Congreso de Educación Matemática, realizado en Esquel. Mayo de 2006.

⁽²⁾Unidad de análisis primaria propuesta por el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática para estudiar los procesos cognitivos en dos dimensiones interrelacionadas: la personal y la institucional.

⁽³⁾Dr. Félix Ortiz, profesor titular del Departamento de Física y Mg. Silvia Etchegaray, profesora asociada del Departamento de Matemáticas. Facultad Cs. Exactas Fco.-Químicas y Naturales. UNRC.

⁽⁴⁾Entendemos por significados personales los significados emergentes de sistemas de prácticas matemáticas que genera una persona ante un campo de problemas en un momento determinado (Godino, 2003).

⁽⁵⁾Se trabajo, entre otros con el problema del túnel (Polya, 1994), el problema del cálculo de la distancia al horizonte (Chevallard y otros, 1997), el problema de cómo y cuánto es la distancia de la tierra a la luna (Polya, 1994).

⁽⁶⁾Un estudio experimental, realizado Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. que se encuentra publicado en: Memorias de la II Reunión Pampeana de Educación Matemática en CD Editado EdUNLPam (2008), bajo el título: “Taller sobre la importancia de la elaboración de conjeturas en el tercer ciclo de la EGB: análisis de significados institucionales y personales del razonamiento conjetural” es considerado un material empírico valioso para ayudar a la comprensión y reflexión sobre las dos primeras características.

⁽⁷⁾El trabajo desarrollado en el marco de una beca de investigación (alumna del profesorado en Matemáticas: Ana Bovio, co-dirección del Dr. F. Ortiz y la Mg. S. Etchegaray) cuyo informe ha sido aprobado por la SeCYT de la UNRC (2008) se refiere (con aportes empíricos) a esta problemática.

⁽⁸⁾Tales como: La Especialización en Matemáticas para maestros del 2do. Ciclo (Puerto, Madryn, Chubut 2003-2004) diseñado y coordinado por Mg. Irma Sainz; el Postítulo de Especialización en Enseñanza de la matemática para el nivel primario, Ciudad de Buenos Aires, diseñado y coordinado por Dra. Patricia Sadovsky y Dra. Carmen Sessa. Primera cohorte (2003-2005) Segunda cohorte (2006-2008).