Juan Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada,
http://www.ugr.es/local/jgodino/

Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas

Resumen

Presentamos una síntesis del modelo teórico sobre la cognición matemática en cuya elaboración venimos trabajando desde hace varios años y que proporciona herramientas conceptuales y metodológicas para plantear y abordar problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. Como rasgos característicos destacamos la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. El modelo de cognición matemática elaborado se adopta como elemento clave sobre el que basar el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa.

Abstract

We summarize a theoretical model for mathematical knowledge that is being developed over the past years and that provides conceptual and methodological tools to pose and tackle didactics of mathematics research problems. Some characteristic features are the articulation of the institutional and personal facets of mathematical knowledge, the attribution of a key role to language and the coherent adoption of pragmatic and realistic assumption about the meaning of mathematical objects. The aim is using this theoretical framework as a key element to develop a theory of meaningful mathematical instruction.

Introducción

Comenzamos este trabajo justificando brevemente nuestro interés por temas ontológicos y epistemológicos acerca de las matemáticas, al considerarlos necesarios para fundamentar las investigaciones didácticas.

Después de aclarar el uso que hacemos del término "cognitivo" señalamos la necesidad de adoptar un punto de vista sistémico en didáctica de las matemáticas, incorporando herramientas y perspectivas procedentes de distintas disciplinas relacionadas, en particular la antropología cognitiva, la ecología conceptual y la semiótica. Continuamos indicando, en términos generales, la problemática de reflexión y elaboración teórica que hemos abordado en cada una de las tres etapas en que dividimos nuestro trabajo:

1) elaboración del constructo "significado (institucional y personal) de los objetos matemáticos", interpretado como el sistema de prácticas operativas y discursivas ligado con un campo de problemas matemáticos. Esta noción facilita el análisis macroscópico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas;

2) desarrollo de la noción de función semiótica y de una ontología matemática basada en seis tipos de entidades primarias y cinco facetas duales de la cognición matemática. Estos elementos facilitan el análisis microscópico de la realización de tareas matemáticas y de los actos de comunicación en la interacción didáctica, y

3) esbozo de una teoría de la instrucción matemática significativa basada en el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática elaborado, los supuestos del interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000) y la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997).

Este modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática, que designamos brevemente como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), pretende proporcionar un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos. Presentamos aquí una panorámica general de dicho marco teórico para la didáctica de las matemáticas, que puede ser completada con el estudio de los trabajos previamente publicados y disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/.

La ontología y la epistemología matemática como problema para la didáctica de las matemáticas

El fin específico de la didáctica de las matemáticas como campo de investigación es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Para lograr este objetivo la didáctica de las matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como psicología, pedagogía, filosofía, sociología, etc. (Godino, 2003a). Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos –a los que se ha de problematizar–, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de los sistemas didácticos. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la didáctica de las matemáticas, ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en didáctica de las matemáticas no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?
- ¿qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- las matemáticas ¿se descubren o inventan?
- ¿agotan las definiciones formales y los enun-

ciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?

- ¿cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

Es necesario reconocer, no obstante, la complejidad de estas cuestiones y la variedad de posibles respuestas. Como afirmó A. Dou en el prólogo del libro de Cañón (1993), "La ontología de las entidades matemáticas y aun más su epistemología son interpretadas de modo increíblemente dispar y permanecen en el misterio" (p. 14). Sin embargo, esta dificultad no puede implicar la renuncia a la clarificación de esas cuestiones, si se desea progresar en el establecimiento de un programa de investigación coherente y productivo en didáctica de las matemáticas.

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de didáctica de la matemática explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. En el trabajo de Sierpinska y Lerman (1997) sobre epistemología de las matemáticas y de la educación matemática podemos observar la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable e incluso enriquecedora pero, el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero programa de investigación (Lakatos, 1983).

Uno de los principales problemas "metadidácticos" que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema, ni siquiera dentro de la aproximación que suele describirse como "epistemológica" o "didáctica fundamental" (Gascón, 1998). Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, concepciones, conceptos, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

Como describe Varela (1988), el análisis científico del conocimiento en todas sus dimensiones es realizado por diversas ciencias y tecnologías de la cognición, entre las cuales menciona la epistemología, la psicología cognitiva, la lingüística, la inteligencia artificial y las neurociencias. En didáctica de las matemáticas tenemos que adoptar modelos cognitivos que no estén exclusivamente centrados en la psicología cognitiva, ya que el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares se propone, como uno de sus fines esenciales, que el sujeto se apropie de los conocimientos matemáticos a los que se les atribuye una realidad cultural.

Complementariedad y transdisciplinariedad en didáctica de las matemáticas

La investigación en didáctica de las matemáticas está usando herramientas teóricas procedentes de diversas disciplinas. Inicialmente fue la pedagogía la que se ocupó de la mejora de la educación de los diversos contenidos curriculares pero, en el caso de las matemáticas, desde hace más de veinte años la psicología de la educación matemática ha asumido una parte importante de estos estudios. Esto ha llevado a que el centro de atención haya sido el sujeto que aprende, considerando el contenido matemático en cierto modo como trasparente, esto es, no problemático en sí mismo.

También han surgido líneas de investigación que tomaron el estudio crítico del propio saber matemático como punto de entrada obligado de los

estudios didácticos. Se trata de lo que Gascón (1998) llama "el programa epistemológico". Otros enfoques se han centrado en el análisis de los patrones de interacción didáctica en el seno de la clase de matemática, la negociación de significados (Cobb y Bauersfeld, 1995); el discurso, la comunicación y participación (Kieran, Forman y Sfard, 2001); el estudio del currículo de matemáticas (Rico, 1997); el pensamiento del profesor (Lin y Cooney, 2001; Llinares, 2000), etc.
El resultado de esta variedad de líneas y enfoques de investigación es diversidad en las herramientas teóricas que tratan de describir y explicar los fenómenos cognitivos y didácticos: representaciones internas y externas, concepciones, esquema, situación didáctica, etc. El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento) y sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos).
Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo-pragmatismo, cognición individual-institucional, constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la didáctica de las matemáticas. En los apartados siguientes describimos brevemente algunas características de estas disciplinas que consideramos de interés potencial para la investigación en didáctica de las matemáticas, y que tenemos en cuenta en la construcción de la TFS.

Herramientas antropológicas

La antropología se ocupa del estudio de los seres humanos desde una perspectiva biológica, social y humanista. Se divide en dos grandes campos: la antropología física, que trata de la evolución biológica y la adaptación fisiológica de los seres humanos, y la antropología social o cultural, que se ocupa de las formas en que las personas viven en sociedad, es decir, la evolución de su lengua, cultura y costumbres. Una rama de la antropología cultural de relevancia particular para la educación matemática es la antropología cognitiva, que se centra en el estudio de las relaciones entre la cultura y el pensamiento humano, particularmente mediante los estudios del uso del lenguaje.
Al considerar las matemáticas como un aspecto o dimensión de la cultura humana, el estudio de su desarrollo en las distintas sociedades puede ser abordado como una faceta específica de la antropología cultural. De hecho, la línea de investigación conocida como etnomatemática (Nunes, 1992) se interesa por las características de los conocimientos matemáticos desarrollados en comunidades étnicas primitivas y en entornos profesionales de tipo artesanal. También se interesa por comparar este tipo de matemáticas con las matemáticas escolares. Una perspectiva más general es la adoptada por las investigaciones socioculturales realizadas en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).
A nivel de filosofía de la matemática, la manera de considerar la matemática por parte de Wittgenstein (Bloor, 1983) se suele presentar como antropológica. Se postula que los hombres, en diferentes épocas y culturas tienen educaciones, intereses y preocupaciones diversas; también son variadas las relaciones humanas y relaciones con

la naturaleza y el mundo, que constituyen distintas *formas de vida*. Debido a ello tales culturas forman diferentes estructuras conceptuales, adoptan diversas formas y normas de representación. Este planteamiento cognitivo general se aplica también a las matemáticas, lo que implica atribuir al conocimiento matemático una relatividad institucional. La necesidad lógica de las proposiciones matemáticas se justifica mediante la aceptación de convenciones en el uso del lenguaje que describe el mundo que nos rodea y el propio mundo de las matemáticas.

Otro uso del enfoque antropológico en didáctica de la matemática es el propuesto por Chevallard (1992). El supuesto clave es considerar la matemática como una actividad humana, que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones con el concurso de determinados instrumentos, principalmente lingüísticos, y que aporta técnicas para realizar determinado tipo de tareas. Como consecuencia se asume que todo conocimiento es relativo a una institución. Los matemáticos profesionales constituyen una institución, al igual que la escuela o las diversas profesiones; en el seno de estas instituciones se realizan prácticas matemáticas específicas que generan conocimientos matemáticos específicos.

En general, la adopción del enfoque antropológico para las matemáticas supone también atribuir un papel clave a los instrumentos lingüísticos usados para el desarrollo de la actividad matemática.

Herramientas ecológicas

Un objetivo del enfoque antropológico de la epistemología de las matemáticas será investigar las fuentes, modos de control, y mecanismos de crecimiento de las matemáticas en los distintos "nichos ecológicos" en que vive. Esta manera de expresar el problema en términos ecológicos es propia de la rama de la antropología conocida como antropología ecológica, la cual intenta proporcionar explicaciones materialistas de la sociedad y cultura humana como productos de adaptaciones a las condiciones dadas del entorno.

El concepto de adaptación al entorno es una noción clave dentro de la antropología ecológica. En nuestro caso los objetos "vivos" cuyas adaptaciones y funciones debemos estudiar son los objetos matemáticos, concebidos como "sistemas de prácticas" (Godino, 1993; Godino y Batanero, 1994).

Uno de los usos del paradigma ecológico en un enfoque unificado de la cognición matemática será explorar las adaptaciones de la cultura matemática (hecha operativa mediante la noción de "sistema de prácticas") con relación a áreas culturales específicas (etnomatemáticas). Pero la indagación se centra además en los sistemas didácticos y niveles educativos, vistos como núcleos culturales con características idiosincrásicas. La metáfora ecológica permite plantear nuevas cuestiones relativas al estudio de las relaciones entre distintos objetos matemáticos, usando para ello nociones tales como simbiosis, dominancia, cadena trófica, etc. (Godino, 1993).

La aplicación de las herramientas conceptuales de la ecología biológica a la antropología cultural (y dentro de ella a la antropología cultural matemática) añade nuevas perspectivas a la didáctica de la matemática como disciplina científica.

Herramientas semióticas

En los últimos años observamos un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pimm, 1995; Cobb, Yackel y McClain, 2000; Kieran, Forman y Sfard, 2001; Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli, 2003). Este interés es consecuencia natural del papel esencial que desempeñan los medios de expresión en los procesos de pensamiento, como resaltan Vygotsky (1934), quien considera el significado de la palabra como unidad de análisis de la actividad psíquica, y Cassirer (1964; 27) para quien "el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento sino su órgano esencial y necesario".

En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no es, sin embargo, el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, aunque ésta sea también importante sino la comprensión de su semántica y pragmática, es decir, la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su dependencia de los contextos y situaciones-problema de cuya resolución provienen. Además, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática.

Nuestra teoría de las funciones semióticas propone una semiótica específica, basada en la teoría del lenguaje de Hjemslev (1943) y apoyada en una ontología matemática explícita de naturaleza pragmático-realista, que pretende ser una herramienta analítica de la cognición matemática adaptada a las necesidades de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Hacia un enfoque unificado de la cognición y la instrucción matemática

Descritos brevemente los marcos generales en los que apoyamos nuestro trabajo[1], estamos en condiciones de abordar el problema sobre el que se centra la teoría de las funciones semióticas. Podemos describirlo brevemente como la elaboración de un enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática.

Esta problemática se ha gestado en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra indagación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el período 1993-98 (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1994; 1998) progresivamente desarrollamos y precisamos las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados pero, sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

El modelo teórico sobre los significados institucionales y personales desarrollado en Godino y Batanero (1994; 1998)[2] permitió describir una agenda de investigación con base en las nociones de *semiometría* (caracterización de significados sistémicos) y *ecología de significados* (relaciones entre significados). La productividad de dicha agenda ha quedado mostrada en los diferentes trabajos realizados en nuestro grupo de investigación y otros grupos de diferentes universidades que se basan en el marco teórico desarrollado (Font, 2000).

Sin embargo, en una segunda etapa de nuestro trabajo teórico (a partir de 1998) hemos considerado necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el llevado a cabo hasta dicha fecha.

Esta reflexión surge del hecho de que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos interesa continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones".

Como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos "los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problema". Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales sino también las situaciones problemáticas, y los propios medios expresivos y argumentativos desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problema para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este período hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica. Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953).

Hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1998). Paralelamente, nuevas investigaciones empíricas se han ido sustentando en los nuevos desarrollos teóricos y, a su vez, han permitido poner a prueba su utilidad y pertinencia (Ortiz, 1999; Recio, 1999; Roa, 2000; Tauber, 2001; Arrieche, 2002; Font, 2000; Etchegaray, 2001; Gatica, 2001).

En una tercera etapa de nuestro trabajo nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática, entendida como "enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos". Proponemos modelizar la instrucción matemática como un proceso estocástico multidimensional, distinguiendo cuatro subtrayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante) y mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales). El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de la trayectoria epistémica, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

El sistema teórico desarrollado no surge de la nada. Por el contrario, hemos llevado a cabo un extenso trabajo de revisión y análisis de los principales trabajos publicados sobre teoría de la educación matemática, y demás disciplinas que nos sirven de apoyo. En Godino (2003b) hacemos una síntesis de las principales teorías y enfoques de investigación que tuvimos en cuenta y sobre los cuales apoyamos nuestro trabajo.

En Godino (2003c) mostramos las concordancias y complementariedades entre las nociones que proponemos y otros constructos usados para estudiar la cognición matemática y su desarrollo.

Antecedentes próximos

El modelo ontológico-semiótico que proponemos para fundamentar la investigación en didáctica de las matemáticas es el resultado de un proceso de reflexión que partió inicialmente de una interpretación del clásico "triángulo epistemológico", con el objetivo de analizar las relaciones entre el pensamiento, el lenguaje y las situaciones en que tiene lugar la actividad matemática (Godino y Recio, 1998).

La relación entre los signos usados para representar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring (1997) de ellos y que denomina triángulo epistemológico. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia. Vergnaud (1990; 36) también propone un esquema triangular para la estructura de un concepto matemático:

> **S:** *conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;*
> **I:** *conjunto de invariantes que constituyen el concepto;*
> **Z:** *conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.*

Aun reconociendo el interés de estos modelos, los encontramos insuficientes para describir la complejidad de la actividad matemática y los "productos" resultantes de dicha actividad, ya que:

- no se explicita si tales objetos (conceptos, y sus constituyentes) hacen referencia tanto a una realidad cognitiva individual como a otra cultural (institucional), o se refieren a una sola de dichas realidades;
- no se hace referencia a las acciones de los sujetos ante las situaciones como origen del conocimiento;
- no se refleja la naturaleza racional y normativa del sistema de conocimientos matemáticos, y
- no se reconoce la dialéctica entre lo particular y lo general, entre las entidades ostensivas y no ostensivas, ni las relaciones instrumentales y representacionales entre las diversas entidades matemáticas.

Una modelización más rica del conocimiento matemático es propuesta en el enfoque antropológico de la didáctica de la matemática (Chevallard, 1992; 1997; 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Bosch y Chevallard, 1999). Los componentes de las praxeologías matemáticas, *praxis* (tareas, técnicas), *logos* (tecnología, teoría), modelizan adecuadamente la matemática como actividad humana y la dialéctica entre la acción situada y el discurso que la describe y justifica.

Sin embargo, consideramos que el modelo ontológico de la teoría antropológica necesita algunos desarrollos y refinamientos, ya que interesa reconocer explícitamente en el componente discursivo los *conceptos* y *proposiciones* (interpretados como reglas en el sentido de Wittgenstein[3]) y las *argumentaciones*. Esto permitirá realizar análisis más pormenorizados de la actividad matemática e incrementar la sensibilidad del investigador (y el profesor) hacia los procesos interpretativos de las reglas y de su seguimiento por parte de los sujetos. Nos parece conveniente considerar explícitamente el lenguaje, objetos ostensivos en la terminología de la teoría antropológica, como un tercer componente de las praxeologías, junto con la praxis y el logos, apareciendo de este modo una nueva interpretación del "triángulo epistemológico", en una versión antropológica del conocimiento matemático.

Pero donde consideramos que la teoría antropológica necesita desarrollo y revisión es en su manera de afrontar la cognición individual, superando su focalización en los conocimientos institucionales. Esta focalización lleva a prescindir dentro del enfoque antropológico de los fenómenos relacionados con el aprendizaje del sujeto y del análisis de las interacciones discursivas en el seno de la clase. "La problemática del 'sentido' de la actividad matemática de los alumnos y del 'sentido' de los conocimientos que adquieren [la aproximación antropológica] se sustituye por la de las condiciones de vida y de desarrollo de las organizaciones praxeológicas, a la vez producto y factores de esta actividad" (Bosch y Chevallard, 1999; 119).

El modelo ontológico-semiótico que describimos a continuación trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Asimismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

Teoría de las funciones semióticas y ontología matemática asociada

Prácticas matemáticas y significados

Desde una perspectiva pragmático-realista de la educación matemática atribuimos un papel central –como origen genético del conocimiento matemático[4]– a la actividad matemática realizada por las personas ante ciertos tipos de problemas. La noción de práctica matemática es clave en esta aproximación epistemológica a las matemáticas y a la educación matemática.

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Esta noción permite tener en cuenta el principio piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Las prácticas de una persona al resolver un problema pueden ser observables (por ejemplo, cuando un alumno escribe su solución a un problema o relata al profesor sus acciones para resolverlo). En otros casos, algunas de estas prácticas son acciones interiorizadas no observables directamente.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto interesa considerar *los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas*.

Proponemos que al preguntarnos, por ejemplo, qué es la "media aritmética" (o número real, función, etc.) o lo que es equivalente, cuando nos interesamos por "qué significa 'media aritmética'", pensemos en términos de los "sistemas de prácticas que realiza una persona para resolver cierto tipo de problemas". Esas prácticas –acciones o manifestaciones operatorias y discursivas– pueden ser atribuidas a un sujeto individual, en cuyo caso se habla de significado del objeto personal, o pueden ser compartidas en el seno de una institución y entonces se dice que se trata del significado del objeto institucional correspondiente.

Presentamos el "sistema de prácticas" como el contenido que se debe asignar a la expresión que designa el objeto, por ejemplo, "media aritmética". Como respuesta a la cuestión ¿qué es un objeto matemático?, construimos otro objeto "el sistema de prácticas" que podríamos designar con el término "praxeología", dado que tales sistemas de prácticas incluyen tanto componentes operatorios como discursivos[5]. Se establece, por tanto, una correspondencia semiótica en la que el sistema de prácticas viene a ser el significado (sistémico o praxeológico) de la expresión "media aritmética". El significado se concibe aquí como el contenido asignado a una expresión (función semiótica en el sentido de Hjemslev). No tiene por qué ser necesariamente una entidad mental, aunque también puede serlo: es sencillamente aquello a lo cual se refiere un sujeto en un momento y circunstancias dadas. En ciertos actos comunicativos nos referimos a "sistemas de prácticas", mientras que en otros nos referimos a elementos constitutivos de tales sistemas.

Tipos de significados institucionales y personales

En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa distinguir cuatro tipos, que designamos como significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado. Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares y, en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello construirá un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto (contenido o tema matemático). Por ejemplo, en Godino (2002a) incluimos una descripción del significado de referencia de la mediana construido por nosotros a partir de los textos universitarios de estadística y nuestra propia experiencia en la aplicación y enseñanza de la estadística.
A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena y delimita la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Para ello tendrá en cuenta el tiempo disponible, los conocimientos previos de los estudiantes y los medios instruccionales disponibles. Denominaremos como *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional. Con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales interesa hablar del *significado implementado*, como el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.
Un cuarto tipo de significado institucional se pone en juego en los procesos de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado. Lo designamos como *significado institucional evaluado*.
Desde el punto de vista del estudiante y, en un momento dado, cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. El *significado global* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático (contenido o tema); el *declarado* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; finalmente, el *significado personal logrado* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

Función semiótica, entidades primarias y dualidades cognitivas

El análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes y los acontecimientos que tienen lugar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará a un *texto* que registra la actividad matemática y didáctica desarrollada por los sujetos participantes.

Esta circunstancia nos ha llevado a incorporar como herramientas teóricas algunas nociones procedentes de las teorías del lenguaje y la semiótica, configurando un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Una de las nociones introducidas es la de *función semiótica,* adoptada de la teoría del lenguaje de Hjelmslev y complementada con una tipología de objetos matemáticos que incluye los propios objetos lingüísticos, las situaciones-problema, acciones, conceptos, propiedades y argumentos. En Godino (2002a) se desarrolla la idea de que los distintos objetos matemáticos pueden ser considerados según cinco facetas o dualidades cognitivas: además de la dualidad personal-institucional se describen las correspondientes a ostensivo-no ostensivo, elemental-sistémico, ejemplar-tipo (o concreto-abstracto) y expresión-contenido.

Hjemslev (1943) llama función de signo[6] a la dependencia entre el texto y sus componentes y de estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Asumimos que el papel de expresión y contenido puede ser adoptado no sólo por las entidades lingüísticas sino por los distintos tipos de objetos matemáticos introducidos en el modelo ontológico.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación, tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, los distintos tipos de objetos (situaciones-problema, acciones, conceptos, pro piedades y argumentos) pueden ser también signos de otras entidades.

Enfoque semiótico de los conocimientos matemáticos

La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (sea ostensivo, no ostensivo; elemental o sistémico, etc.) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un *conocimiento*. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimiento en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Uno de los puntos diferenciadores de nuestro modelo teórico está en la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto personales como institucionales. Junto con los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) consideramos necesario distinguir los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problema, tareas), conocimientos lingüístico-notacionales y conocimientos argumentativo-validativos (Godino, en prensa).

Por otra parte, consideramos que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la "cognición institucional" lo es del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

En la práctica se usan con frecuencia los términos "comprensión" y "competencia" para describir los conocimientos del sujeto (Godino, 2002b). En el modelo cognitivo que proponemos, la *comprensión* responde al componente discursivo/relacional del significado sistémico de un objeto (dominio de conceptos, propiedades y argumentos), mientras que la *competencia* se relaciona con el componente práctico (dominio de las maneras de actuar ante las situaciones-problema o tareas). El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos; esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un tema matemático. Se trata más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además deberán ser valorados en relación con los contextos institucionales correspondientes.

Análisis ontológico - semiótico

La noción de función semiótica, la tipología de objetos matemáticos asociada y las dualidades cognitivas se usan para desarrollar una técnica analítica que permite determinar o caracterizar los significados que se ponen en juego en la actividad matemática y en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El *análisis ontológico-semiótico* de un texto matemático consiste en su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. Se aplica al texto que registra la actividad matemática y didáctica desarrollada por los sujetos participantes y permite la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego, a partir de la transcripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori).

Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis *a posteriori*). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Un conflicto semiótico es cualquier tipo de disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos.

El análisis ontológico-semiótico permite formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes, en los cuales puede haber lagunas o vacíos de significación o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

Instrucción matemática significativa

En Godino (2003e) esbozamos algunas nociones de una posible teoría de la instrucción matemática, incorporando elementos del interaccionismo simbólico[7] (patrones de interacción didáctica) y de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Estos elementos se articulan modelizando la instrucción matemática como proceso estocástico multidimensional. Las nociones clave son las de *trayectoria didáctica* (compuesta de cuatro subtrayectorias: epistémica, docente, discente y mediacional), estados potenciales de las trayectorias y patrones de interacción didáctica. Atribuimos un papel clave en el logro del aprendizaje matemático a la interacción comunicativa entre los propios estudiantes y, sobre todo a la interacción entre el profesor y los alumnos.

La instrucción matemática en este modelo se refiere a la enseñanza y aprendizaje organizado de un contenido en el seno de un sistema didáctico. Intervienen, por tanto, determinados sistemas de prácticas (conocimientos institucionales), sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y recursos o medios instruccionales, entre los que incluimos el tiempo, dispositivos de cálculo, libros, materiales didácticos, situaciones problemáticas, etc. El aprendizaje por adaptación a un medio es el supuesto básico del constructivismo piagetiano. En este modelo el papel de la interacción entre los propios alumnos y con el profesor queda en cierta medida en un segundo plano. Ciertamente que el conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado con tareas problemáticas. Pero la interacción con otras personas, sujetos en la misma posición y, sobre todo con el profesor-experto es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje. Esta es una consecuencia de tener en cuenta el componente discursivo (normativo y argumentativo) del conocimiento matemático, y no sólo el componente praxémico (situacional y actuativo).

Designaremos como *aprendizaje significativo* el que, además de la interacción del sujeto con las situaciones-problema, tiene en cuenta o atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso y la comunicación. El sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional, apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno. Nuestro modelo de aprendizaje es además, multidimensional, en concordancia con nuestros supuestos sobre el significado de los objetos matemáticos, la comprensión y competencia matemática. Consideramos también necesario incorporar elementos procedentes de la teoría del aprendizaje verbal significativo basado en la recepción desarrollada por Ausubel (2002), cuando se trata de los componentes discursivos del conocimiento matemático.

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a suponerla también para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos; esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un tema matemático. Se trata más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además deberán ser valorados en relación con los contextos institucionales correspondientes.

El logro de la competencia y comprensión por parte de los estudiantes de los distintos componentes de un saber matemático requiere el diseño y la implementación de procesos de instrucción que tengan en cuenta dichos componentes. Este es uno de los objetivos de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), quien propone el diseño de situaciones de formulación/

comunicación, validación e institucionalización como complementos imprescindibles de las situaciones de acción o investigación personal.

El tipo de discurso, o sea la comunicación oral o escrita en el aula realizada por el profesor y los alumnos es un aspecto central determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si el núcleo de la comunicación sólo se produce del profesor hacia los alumnos, de forma escrita a través de la pizarra, éstos aprenderán unas matemáticas distintas y adquirirán una visión de las matemáticas diferente de la que se logra cuando tiene lugar una comunicación más rica entre profesor y alumnos y de éstos entre sí.

Además, las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos a fin de que los asuman como propios y deseen resolverlos; constituyen un primer encuentro de los alumnos con los objetos matemáticos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, ya sea individualmente o en pequeños grupos.

Reflexiones finales

La idea impulsora de nuestro trabajo es el convencimiento de que la noción de significado, a pesar de su extraordinaria complejidad, puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en didáctica de las matemáticas. A la pregunta que se hace Ernest (1997) de si "la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática (y las matemáticas)" nosotros daríamos una respuesta afirmativa, a condición de adoptar (o incluso elaborar) una semiótica apropiada y de complementarla con otras herramientas teóricas, en particular una ontología que tenga en cuenta la variedad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

El modelo ontológico-semiótico para la cognición matemática que designamos como teoría de las funciones semióticas incorpora aspectos propios tanto de las teorías pragmáticas (u operacionales) del significado como de las realistas (o referenciales)[8]. El significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace de ellos en los contextos institucionales y los juegos de lenguaje de los que forman parte. Pero esto no implica que renunciemos a la posibilidad de encontrar usos prototípicos que indicamos con nuevos términos y expresiones, como si se tratase de objetos emergentes de los sistemas de usos. La metáfora del objeto resulta útil para comprender el funcionamiento del pensamiento, y no tenemos necesidad de rechazarla si controlamos su empleo. Esta compatibilidad de las teorías operacionales y referenciales del significado está apoyada en posiciones como la de Ullmann (1962; 76), quien afirma: "El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase 'referencial' y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos o más bien, entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro".

Para nosotros el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

El enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática presentado se está revelando útil para caracterizar significados elementales y sistémicos puestos en juego en los procesos de estudio matemático. Asimismo, aporta explicaciones de las dificultades y limitaciones en el aprendizaje matemático basadas en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos. A nivel más general consideramos que permite confrontar herramientas propuestas por otros modelos teóricos para el análisis de la cognición matemática. A título de ejemplo mencionamos algunas de estas comparaciones entre nociones cognitivas[9].

a) Nuestra modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de *esquema* como la faceta interiorizada (no ostensiva) de los sistemas de prácticas personales, y las nociones de *concepto-en-acto*, *teorema-en-acto* y *concepción* (Vergnaud, 1990) como componentes parciales constituyentes de dichos sistemas de prácticas (correspondientes a las entidades primarias, concepto-regla y propiedad). Pueden desempeñar, por tanto, un papel en el análisis cognitivo, aunque sin perder de vista su parcialidad. El constructo "sistema de prácticas personales" se revela como un instrumento con mayores posibilidades descriptivas y explicativas al incorporar en un sistema organizado los componentes operatorios, situacionales, discursivos y lingüísticos.

b) El uso que se hace en Teoría de Situaciones (Brousseau, 1997) de la noción de *sentido* queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según nuestro modelo teórico esta correspondencia es sin duda crucial al aportar la razón de ser de tal objeto y su justificación u origen fenomenológico. Pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto.

En nuestro caso, la noción de significado (o sentido) de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, concreto o abstracto, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.).

c) Las nociones de representación y registro semiótico usadas por diversos autores hacen alusión según nuestro modelo, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos (instrumental y componencial).

Los elementos teóricos descritos en la Teoría de las Funciones Semióticas se centran en la dimensión cognitiva (en sentido individual e institucional) de los procesos de educación matemática. Sin embargo, somos conscientes que será necesario ampliar el modelo teórico con la inclusión de otras dimensiones que condicionan globalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se trata de las dimensiones afectivas (creencias, actitudes y emociones), axiológica (valores y fines de la educación matemática), política, curricular, etc. Estas dimensiones deberán ser objeto de atención en un enfoque unificado del análisis didáctico matemático.