Mónica E. Villarreal
Facultad de Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
mvilla@agro.uncor.edu

Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática

Resumen

El artículo comienza presentando algunas reflexiones y perspectivas acerca de la llegada de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) al ámbito educacional. Se efectúa una breve comparación con lo que significó la llegada del cuaderno a la escuela, en términos de cambios en el cotidiano escolar. Se considera, también, la presencia de las TICs en la escuela desde una perspectiva social, alertando acerca de la necesidad de una alfabetización tecnológica y considerando el acceso a las mismas como un derecho. Se plantean preguntas, desde múltiples perspectivas, tendientes a provocar una reflexión en torno a lo que significa la incorporación de nuevas tecnologías en el contexto escolar y a subrayar la necesidad de investigación en este tema. Posteriormente, el artículo profundiza un aspecto en particular, vinculado con lo epistemológico: el papel de la tecnología computacional en el modo en que los estudiantes abordan cuestiones matemáticas y construyen conocimiento. Se presenta y analiza en detalle un ejemplo que muestra el desempeño de dos estudiantes universitarios en el transcurso de una actividad matemática desarrollada en un ambiente computacional. Se examina el episodio como ejemplo de un *colectivo pensante* particular y como evidencia de que la computadora, impregna y reorganiza el pensamiento matemático de los estudiantes.

Abstract

The article begins presenting some reflections and perspectives about the arrival of the information and communication technologies (ICTs) to the educational environment. A brief comparison is made with the arrival of the notebook to the school, considering the changes that it brought into the daily of the school. Social perspectives regarding the presence of the ICTs in the school are also considered, mainly, the need of a technological literacy (technoracy) *and the access to technology as a right. Questions are posed to provoke a reflection about what means the incorporation of new technologies in the school context and, to underline the need of further research on this topic. Later on, the article deepens on an epistemological aspect: the role of the computer technology in the ways the students approach mathematical problems and construct knowledge. An example that shows two university students' mathematical productions in a computational environment is presented and analyzed. The episode is examined as an example of a particular* thinking collective *and as evidence that shows how the computer impregnates and reorganizes the students' mathematical thinking.*

Introducción. Reflexiones y perspectivas acerca de la llegada de las tecnologías de la información y la comunicación (TICS) al ámbito educacional

El empleo de TICs, principalmente computadoras y calculadoras, en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática ha sido, y continúa siendo, motivo de debate en los distintos niveles educativos. Por un lado, es frecuente que el uso de computadoras (incluyendo aquí Internet y software multimedia) sea considerado por algunos como positivo y propuesto como una necesidad de *agiornamiento* de la escuela en los tiempos modernos. Por otro lado, hay quienes opinan que el empleo de la computadora o la calculadora impide que el alumno razone e indican que antes de utilizarla los alumnos deben primero manejar los contenidos matemáticos. Sin embargo, pocos cuestionarían que un alumno utilice lápiz y papel para resolver un ejercicio matemático, sin percibir, quizás, que su raciocinio y su propia producción matemática están mediados por los dispositivos que emplea para desarrollarlos. Es interesante echar un vistazo al pasado y ver qué ocurrió cuando el cuaderno, un dispositivo que hoy nos resulta tan familiar, arribó a la escuela argentina.

Gvirtz (1999) señala que durante la década del 80, en el siglo XIX, se registraron las primeras discusiones respecto del uso del papel en la escuela argentina. Esas discusiones surgieron en una época en que el papel dejaba de ser un lujo debido a su costo y escasez. Por esas causas el aprendizaje de la escritura utilizando el papel estaba reservado inicialmente para los años superiores de la escolaridad. Así se iniciaron las polémicas entre los pedagogos reformistas que proponían el empleo del papel en la escuela y los defensores de la pizarra (tanto del pizarrón de pared como de las pizarritas portátiles que cada alumno poseía). Además de los motivos económicos existían debates en torno al desarrollo de la motricidad fina necesaria para escribir en papel, la cual estaría ausente en los niños pequeños, o las cuestiones de higiene y cuidado en la presentación de los cuadernos escritos en tinta, en los cuales los errores cometidos no podrían ser borrados sin dejar marcas de suciedad, etc. En el marco de esas discusiones, en 1920, el cuaderno llegó a las aulas argentinas, no sin antes haber librado una dura batalla con la pizarrita portátil de nuestros bisabuelos. Cuando los cuadernos arribaron a la escuela, en los pupitres comenzó a haber tinteros que cada mañana eran provistos de tinta por los porteros; las manchas en los delantales blancos de los niños descuidados aumentaron el uso de productos químicos para eliminarlas y la piedra pómez era el medio más eficaz para limpiar las manos entintadas. Posteriormente la invención de las lapiceras esferográficas resolvieron algunos de esos problemas. Con la popularización del cuaderno la vida cotidiana dentro y fuera de la escuela cambió. Y tales cambios se extendieron también a la actividad del alumno. La llegada del cuaderno en Argentina estuvo fuertemente vinculada al movimiento de la llamada escuela nueva que recomendaba el uso del cuaderno único de clase como elemento organizador de la labor escolar (Gvirtz, 1999). El cuaderno se constituyó en el registro diario y cronológico de toda la actividad escolar y se transformó también en el nexo entre la escuela y la familia: los padres podían acompañar el progreso de sus hijos a través del cuaderno. Gvirtz afirma: *"El cuaderno no es un mero soporte físico [...] es, por el contrario un dispositivo cuya articulación genera efectos: en términos más concretos, el cuaderno constituye, junto con otros elementos, un estructurante de la dinámica del aula"* (Gvirtz, 1999: pp.160).

En otros términos su uso no puede ser visto como un simple cambio de tecnología para el registro de las actividades escolares, sino como un reorganizador de la vida en el aula. Esta idea de

reorganización también está vinculada con el uso de las TICs y será retomada más adelante.
Entre todos los aspectos relacionados con la llegada del cuaderno a la escuela, quisiera resaltar dos de ellos a fin de realizar una comparación con el arribo de las TICs al contexto educacional. El cuaderno llega cuando el costo del papel se torna accesible y de la mano de una reforma curricular. En relación a la computadora puede decirse que ocurrió lo mismo en el aspecto económico, aunque no se produjeron reformas curriculares sistemáticas que integraran el uso de la misma en las actividades propias de cada disciplina escolar de modo a optimizar su potencialidad educativa.
El brevísimo relato sobre el cuaderno en la escuela argentina nos sirve para reflexionar acerca del hecho que la llegada de nuevos actores tecnológicos al ámbito educacional, en cualquiera de sus niveles, genera debates, polémicas, rechazos o posiciones dicotómicas. Sin embargo, entre la postura que asume que la computadora puede ser perjudicial para los alumnos y aquella que supone que su sola presencia puede mejorar la enseñanza, deberíamos buscar perspectivas que superen esa dicotomía reduccionista. Es necesaria una mirada que, sin trivializar aspectos pedagógicos, los trascienda para poder contextualizar la problemática de las TICs en el contexto educativo desde una perspectiva que contemple también el aspecto social. Si entendemos, como Borba & Penteado (2001), que el acceso a la informática es un derecho ya hemos dado un paso al frente. Es necesario que los estudiantes accedan a una "alfabetización tecnológica", integrando las TICs en actividades esenciales tales como: leer, escribir, comprender y componer textos, interpretar gráficos, contar, desarrollar nociones espaciales, resolver problemas, etc. Cabe citar aquí las palabras de Borba & Penteado, quienes afirman que: "*... el acceso a la informática en la educación debe ser visto no apenas como un derecho, sino como parte de un proyecto colectivo que prevé la democratización de accesos a tecnologías desarrolladas por esa misma sociedad. Es de estas dos formas que la informática en la educación debe ser justificada: alfabetización tecnológica y derecho al acceso*" (Penteado, 2001: pp. 17).

En este mismo sentido es que Paulo Freire alertaba acerca de la necesidad de la democratización de la informática para evitar un nuevo tipo de exclusión social, el "analfabetismo informático". Es en este marco que defiendo el uso de las TICs en el ámbito educacional.
Mientras tanto, más allá de entender el acceso a las TICs como un derecho, el entusiasmo por la modernización tecnológica en la escuela en general y en la clase de Matemática en particular, puede conducir (como ya ha ocurrido con diversas innovaciones en la escuela) a diversas propuestas con escasas reflexiones de tipo epistemológico, psicológico, curricular, organizacional o administrativo, o a una domesticación de la tecnología (Borba & Penteado, 2001) cuando es utilizada sólo como un barniz de modernidad para que no afecte el *status quo* de la actividad escolar vigente, manteniendo inalterados los objetivos, contenidos, metodologías de enseñanza, formas de evaluación, etc. Consideremos algunas preguntas que conducirían a estas reflexiones:
- ¿Qué tipo de conocimiento matemático es construido en un ambiente computacional?
- ¿Qué procesos de pensamiento emergen trabajando en este ambiente?
- ¿Cómo los estudiantes construyen conocimiento matemático influenciados por la tecnología?
- ¿La Matemática que surge en un ambiente computacional es la misma que trabajamos con lápiz y papel?
- ¿Los contenidos matemáticos permanecen intactos cuando nuevas tecnologías entran en el aula?, ¿y los objetivos educacionales?, ¿y qué ocurre con las cuestiones metodológicas?
- ¿Cuál es el papel del profesor en este nuevo ambiente?

- ¿Qué modificaciones se producen en la relación alumno-profesor-contenido matemático?
- ¿Cómo se modifica la dinámica en la clase?
- ¿Cómo evaluamos?
- ¿Cómo formar un profesor de matemática para enfrentar este nuevo desafío?
- ¿Qué criterios utilizar para seleccionar un software educativo?

Responder a estas preguntas con seriedad exige una investigación profunda. Exige observar lo que ocurre en las aulas y mirar de cerca, cuales son los procesos de pensamiento de los estudiantes o los miedos e inseguridades de los profesores al ingresar en la "zona de riesgo" (Penteado, 2001) que implica aventurarse a incorporar nuevas tecnologías en el aula. Es preciso una etnografía de la práctica escolar, es necesario observar con atención y analizar en detalle las tareas que los estudiantes desarrollan al trabajar en este ambiente, y es imprescindible revisar el curriculum vigente. Estos tipos de estudio son importantes para dar soporte empírico y sustento teórico a nuevas propuestas curriculares.

No se trata de ver que enseñar y aprender con computadora es mejor o peor que con lápiz y papel o con cualquier otra herramienta. Este tipo de estudios brindaría aportes pobres frente a la riqueza que puede ofrecer una descripción y análisis densos de las situaciones de enseñanza y aprendizaje generadas en ambientes computacionales. En este marco busco comprender los escenarios educativos de los cuales las TICs son parte, sin ninguna pretensión de compararlos con los escenarios tradicionales.

Las preguntas antes planteadas muestran un abanico de perspectivas desde las cuales se puede abordar la problemática de las TICs en el ámbito educacional. En este artículo me gustaría profundizar un aspecto, vinculado con lo epistemológico y cognitivo: el papel de la tecnología computacional en el modo en que los estudiantes abordan cuestiones matemáticas y construyen conocimiento. Para ello, primeramente, presentaré algunas perspectivas teóricas relacionadas con la manera en que entiendo la presencia de las TICs en el ámbito educativo. Posteriormente, presentaré un ejemplo, extraído de un trabajo de investigación, relatando una actividad matemática desarrollada por dos estudiantes universitarios en un ambiente computacional que será analizada a la luz de las perspectivas teóricas propuestas.

Algunas perspectivas teóricas

Como premisa básica, se asume que las nuevas tecnologías incorporadas en las clases de Matemática no tienen simplemente un papel de suplementación sino de *reorganización*, que constituyen junto a los estudiantes, docentes y otros medios presentes en la sala de clases un *colectivo pensante*, un sistema constituido por seres humanos y dispositivos tecnológicos de diversa naturaleza (lápiz, papel, libros, calculadoras, computadoras, etc.) que generan, en conjunto, conocimientos matemáticos.

El psicólogo ruso Tikhomirov (1981) analiza el papel de la computadora y su relación con la actividad humana desde una perspectiva psicológica. Señala que es esencial comprender su papel de mediadora en la actividad humana como generadora de un estadio del pensamiento cualitativamente diferente. El autor caracteriza la relación ser humano-computadora en su *teoría de la reorganización*. Según esta teoría, la actividad intelectual humana es modificada por el uso de la computadora, su mediación *reorganiza* los procesos de creación, búsqueda y almacenamiento de información y el establecimiento de relaciones humanas. La constitución de *sistemas ser humano-computadora* es lo que lleva a una verdadera reorganización de la actividad humana. Reconocer ese sistema asigna a la tecnología un papel que trasciende lo meramente auxiliar, convirtiéndola en una herramienta que transforma la actividad humana, en un medio *con* el cual se produce conocimiento. La idea de *conocer con...*, o *pensar con* diferentes dispositivos permite dar cuenta de algunos procesos seguidos por estudiantes en sus producciones matemáticas.

La noción de *sistema ser humano-computadora* es compatible con la perspectiva de Lévy (1993) quien propone la idea de un *colectivo pensante hombre-cosas* que contempla las dimensiones técnicas y colectiva de la cognición e indica el surgimiento de nuevos estilos cognitivos en el tiempo de la informática. Según Lévy *"nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos"* (Lévy, 1993: pp. 10).

Los dispositivos materiales (lápiz y papel, computadoras, calculadoras, etc.) son parte de un colectivo pensante, sin embargo, la cotidiana presencia del lápiz y el papel en las actividades matemáticas los torna transparentes, naturales o sin importancia, como si su presencia no condicionara, de alguna manera, la actividad que se realiza. Según Lévy *"ningún tipo de conocimiento, [...] es independiente del uso de tecnologías intelectuales"* (Lévy, 1993: pp. 75), entendiendo tecnologías intelectuales a: la oralidad, la escritura y la informática. Por ejemplo, el abordaje algebraico de cuestiones matemáticas es característico de la cultura de la escrita, soporte fundamental para tal abordaje. Este aspecto ya fue destacado en diferentes artículos por Borba (1995a; 1995b), quien indica la influencia de los dispositivos tradicionales, lápiz y papel, en el estilo de producción matemática que enfatiza *"el conocer un dado fenómeno, primordialmente a través del álgebra"* (Borba, 1995a: pp. 72). En este sentido puede decirse que los dispositivos utilizados impregnan el pensamiento de quien hace o aprende Matemática.

Algunos trabajos de investigación que caracterizan el pensamiento matemático y el trabajo desarrollado por estudiantes de distintos niveles educativos en ambientes computacionales aportan evidencias que permiten afirmar que en dichos ambientes:

- Las respuestas provenientes de la computadora influencian el estilo de construcción matemática de los estudiantes (Villarreal, 2003, 2000, 1999; Benedetti, 2003).
- El empleo de nuevas tecnologías reorganiza el pensamiento matemático de los estudiantes y la dinámica del aula (Borba, 1999; Borba & Villarreal, 1998; Borba, 1997)
- Surgen nuevos abordajes para la resolución de problemas basados en la posibilidad de representaciones múltiples y la generación de conjeturas que pueden ser refutadas y reformuladas o validadas (Borba & Confrey, 1996, Borba, 1995b, Borba, 1994).
- La visualización y la experimentación son naturalmente favorecidas como procesos presentes en la construcción del conocimiento matemático (Villarreal, 2000; Villarreal & Borba, 1996; Borba, 1995a).
- La hegemonía de lo algorítmico y lo algebraico que caracteriza a la enseñanza matemática tradicional es desafiado y cuestionado (Borba, 1995a, 1995b)

En este marco se busca comprender los procesos de pensamiento matemático que surgen en un ambiente informatizado mostrando cómo tales procesos son condicionados (sin ser determinados) por la presencia de las TICs.

Un ejemplo: computadoras, conjeturas y refutaciones

El contexto de investigación: una breve descripción[1]

El episodio que se relatará en la próxima sección tiene como protagonistas a dos estudiantes de Biología, Víctor (21 años) y Ricardo (18 años) que eran alumnos del curso de Matemática Aplicada y cursaban el primer año de Biología, en el Instituto de Biociencias de la Universidad Estadual Paulista (Río Claro - Brasil). A partir de una invitación que el profesor del curso realizó para todos los estudiantes de la clase, ellos aceptaron participar de una experiencia que se realizaría en horarios extra-clase. Dicha experiencia consistió en sesiones de trabajo con los estudiantes que desarrollaron tareas matemáticas propuestas por la investigadora (autora de este artículo) en un ambiente computacional. Esas sesiones de trabajo, que serán llamadas "entrevistas", fueron filmadas. Los estudiantes fueron entrevistados en tres sesiones de una hora y media cada una. Se utilizó el software *Derive* que permite efectuar manipulaciones simbólicas y numéricas y realizar gráficos a partir de expresiones algebraicas. *Derive* presenta tres áreas de trabajo: Álgebra, Gráficos en 2 dimensiones (2D-plot) y Gráficos en 3 dimensiones (3D-plot). Este software fue seleccionado según los siguientes criterios: 1) facilidad en su manipulación, sin necesidad de conocimientos previos de computación o programación y 2) posibilidad de abordar los contenidos matemáticos propuestos.

Al momento de iniciar esta experiencia los estudiantes no tenían experiencia previa con el software utilizado, y en el curso de Matemática Aplicada al que estaban asistiendo ya habían visto: el proceso de determinación de rectas tangentes a una curva a través de rectas secantes, la relación de las rectas tangentes con el concepto de derivada, la derivada como función y reglas de derivación.

El episodio: sobre cómo determinar rectas tangentes a $y=x^2$

El episodio que aquí se narra y analiza fue seleccionado debido a la influencia que la computadora ejerció en la actividad de los estudiantes. La cuestión matemática abordada fue la determinación de rectas tangentes a la parábola $y=x^2$ y se centró, específicamente, en la discusión de cómo determinar la ordenada al origen de esas rectas. El software utilizado permite hallar rectas tangentes a gráficos de funciones en cualquier punto dado (siempre que exista). Así, por ejemplo, para determinar la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto $x=1$ es suficiente ejecutar el comando *tangent*$(x^2, x, 1)$, para que la computadora proporcione la expresión algebraica de la recta o realice su gráfico. Es importante observar que, en este caso, la respuesta de la computadora aparecerá escrita como $2x-1$, y no como $y=2x-1$. De igual modo, para ingresar una función, por ejemplo $y=6x-9$, sólo es necesario escribir $6x-9$. Todas las respuestas proporcionadas por la computadora, referidas a expresiones funcionales, siguen este patrón.

Después de explicar el funcionamiento básico del software y la sintaxis para ingresar expresiones algebraicas, la entrevistadora pide a los estudiantes que tracen en la computadora el gráfico de $y=x^2$ y su recta tangente en $x=1$ $(y=2x-1)$. También hablan de la función derivada de $y=x^2$ $(y=2x)$ y se realiza su gráfico (Figura 1).

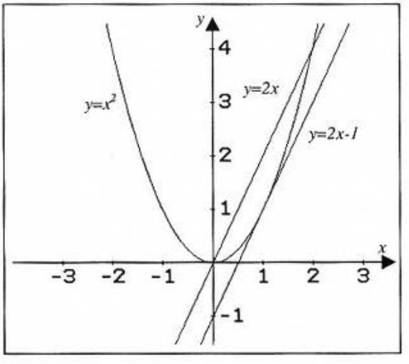


Figura 1.

Víctor explica cómo se obtiene la pendiente de la recta tangente $y=2x-1$, valuando la derivada de $y=x^2$ en $x=1$, que es el punto de tangencia, pero Ricardo no consigue entender. Al comienzo parece que él cree que las rectas tangentes serán siempre de la forma $y=2x+b$, pero gráficamente consigue ver que eso sólo ocurre en $x=1$. Víctor intenta explicarle[2]:

V (Víctor): *–A partir de esa derivada* [se refiere a la función derivada de $y=x^2$] *encontramos esa ecuación* [indica $2x-1$]*... que esa ecuación corresponde a esa recta tangente* [se refiere a la recta tangente en $x=1$].

E (Entrevistadora): *–O sea, ¿estás diciendo que para hallar esa ecuación* [indica $2x-1$] *vos usaste ésa aquí* [indica $2x$]*?*

V: *–No necesariamente la ecuación entera* [de la recta tangente]*, pero para encontrar la pendiente... de esa ecuación* [indica $2x-1$] *usamos ésta de aquí* [indica $2x$]. *Lo que pasa es que coincidió... 2, 2* [se refiere a las pendientes de la recta tangente $y=2x-1$ y de la función derivada $y=2x$], *por eso confunde. Vamos a suponer que yo pidiese una tangente en el punto 2, ahí 2 por 2 sería 4, daría aquí* [se refiere a la derivada valuada en $x=2$], ***ahí sería 4x-2*** [ésa es su previsión para la ecuación de la recta tangente a la parábola en $x=2$]

Aparece aquí, de forma implícita, una **primera conjetura** cuyo origen quedará claro más tarde. Cuando Víctor es cuestionado acerca de la certeza de su previsión para la ecuación de la recta tangente en $x=2$ responde: *"... en el 4x tengo"*. Mientras tanto, Ricardo pregunta si $y=4x$ es una recta tangente y verifica realizando el gráfico en la computadora que eso no ocurre (Figura 2).

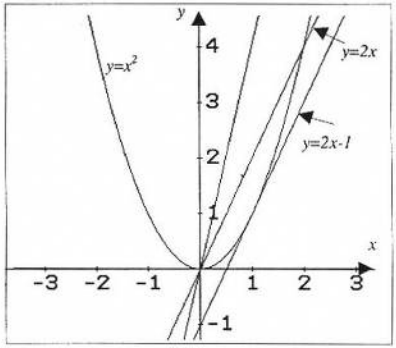


Figura 2.

La discusión sobre cómo encontrar la ecuación de rectas tangentes a $y=x^2$ en cualquier punto se centra, a partir de ahora, en la determinación de la ordenada al origen, asumiendo, a partir de conocimientos previos, que la pendiente se determina utilizando la derivada de $y=x^2$, $y'=2x$. Víctor retoma su primera conjetura:

V: *–... lo que yo vi estaba bien, si es el punto 2, entonces coloco 4x-2* [ésa es su previsión para la ecuación de la recta tangente a $y=x^2$ en $x=2$] *... ahí va a dar bien*

R (Ricardo): *–¿Por qué -2?, -2 sí, todo bien, pero qué razonamiento te llevó a eso? Está bien, porque va a cortar aquí* [indica en el semieje *y* negativo]*, ¿no?, es probable, pero, ¿qué razonamiento te llevó a poner...*

V: *–Porque nosotros colocamos el punto 1 aquí* [indica el comando *tangent*(x^2, *x*, *1*) que ingresaron para calcular la recta tangente a $y=x^2$ en $x=1$] *y aquí colocó -1* [indica la ordenada al origen de la recta $y=2x-1$ proporcionada por la computadora]

Así, Víctor supone que la recta tangente a $y=x^2$ en $x=2$ será $y=4x-2$, basándose en la respuesta de la computadora al calcular la recta tangente en $x=1$, como $y=2x-1$. De acuerdo a la conjetura

de Víctor, por ejemplo, la recta tangente a $y=x^2$ en $x=3$ sería $y=6x-3$, en $x=4$ sería $y=8x-4$. Esta primera conjetura no convence a Ricardo que decide trazar en la computadora el gráfico de $y=4x-2$ para verificar si la previsión de Víctor es correcta. Al hacerlo, observan que esa recta no resulta ser tangente a $y=x^2$ en el punto $x=2$ y la primera conjetura de Víctor es refutada.
Ricardo afirma: *"tiene que haber alguna forma de encontrar la ecuación"*, pero Víctor propone trabajar por *"ensayo y error"* hasta llegar a la ecuación cuyo gráfico sea tangente en $x=2$ para *"después llegar a un consenso"*. Así, prueban con los gráficos de $y=4x-3$ y de $y=4x-4$. Al realizar este último gráfico (ver Figura 3) afirman que esa recta resulta ser tangente a la parábola $y=x^2$ en $x=2$. La entrevistadora pregunta por qué y Víctor responde: *"Da la impresión visualmente que está tangenciando en $x=2$"*.

Ricardo propone usar el *Zoom*[3], para tener una mejor visión de lo que está ocurriendo cerca del punto de tangencia *(2,4)*, pero esto no resuelve el problema de determinar si la recta $y=4x-4$ está tangenciando a la parábola en *(2,4)*, ya que al aproximarse al punto *(2,4)*, los gráficos de la recta tangente y la parábola se "confunden" (ver recuadro a la derecha en la Figura 3). Ricardo propone entonces emplear el comando *tangent* para determinar la recta tangente. Víctor dice a la entrevistadora: *"pero usted no quiere que usemos el comando, usted quiere que deduzcamos..."*. Esta expresión podría indicar que, para él, el uso de la computadora en este caso, llevaría a una solución mecánica que no proporciona comprensión. Sin embargo, ante la insistencia de Ricardo acaban ejecutando en la computadora el comando *tangent(x^2, x, 2)*. La computadora muestra la expresión *4(x-1)* y Víctor dice:
V: *—De esa forma ella* [se refiera a la manera en que la computadora proporcionó su respuesta] *ya contó cómo es que lo hace:* ***encuentra la pendiente y multiplica por x-1.***

Ésta es la **segunda conjetura** de Víctor. Sin embargo, cuando intentan verificarla, encontrando la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en $x=3$, observan que $y=6(x-1)$ no es tangente en ese

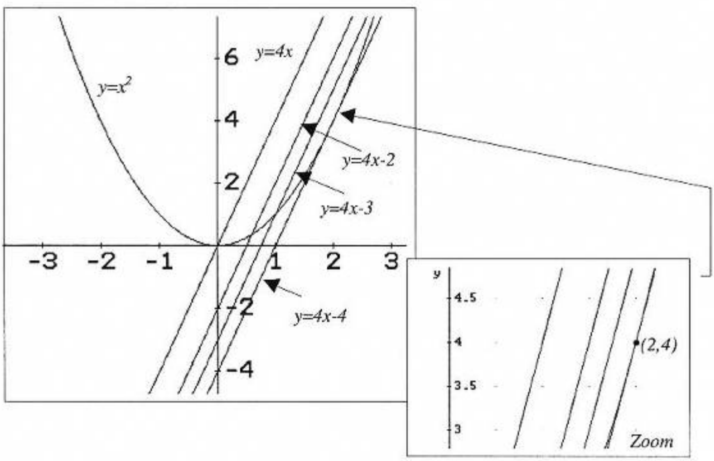


Figura 3.

punto (Figura 4A) y así, esta segunda conjetura de Víctor es refutada. Ricardo afirma, entonces, que la recta tangente en x=3: *"sería 6x menos alguna cosa"* y al experimentar con $y=6x-9$ observa, en el gráfico, que dicha recta parece ser tangente a la parábola en $x=3$ (Figura 4B). Posteriormente lo confirma usando el comando *tangent(x^2, x, 3)*. En la computadora aparece la expresión *3(2x-3)*.

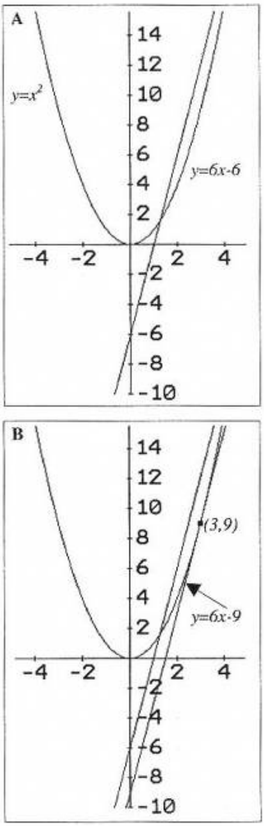


Figura 4.

Basándose en la respuesta de la computadora, Víctor propone una **tercera conjetura**:

V: *—Me parece que aquí se puede ver. Entonces,* ***con la función derivada encuentra la pendiente de la recta tangente, y con $y=x^2$, que es la primitiva, va a elevar a x^2 y va a encontrar ese término independiente*** [se refiere a la ordenada al origen de la recta tangente].

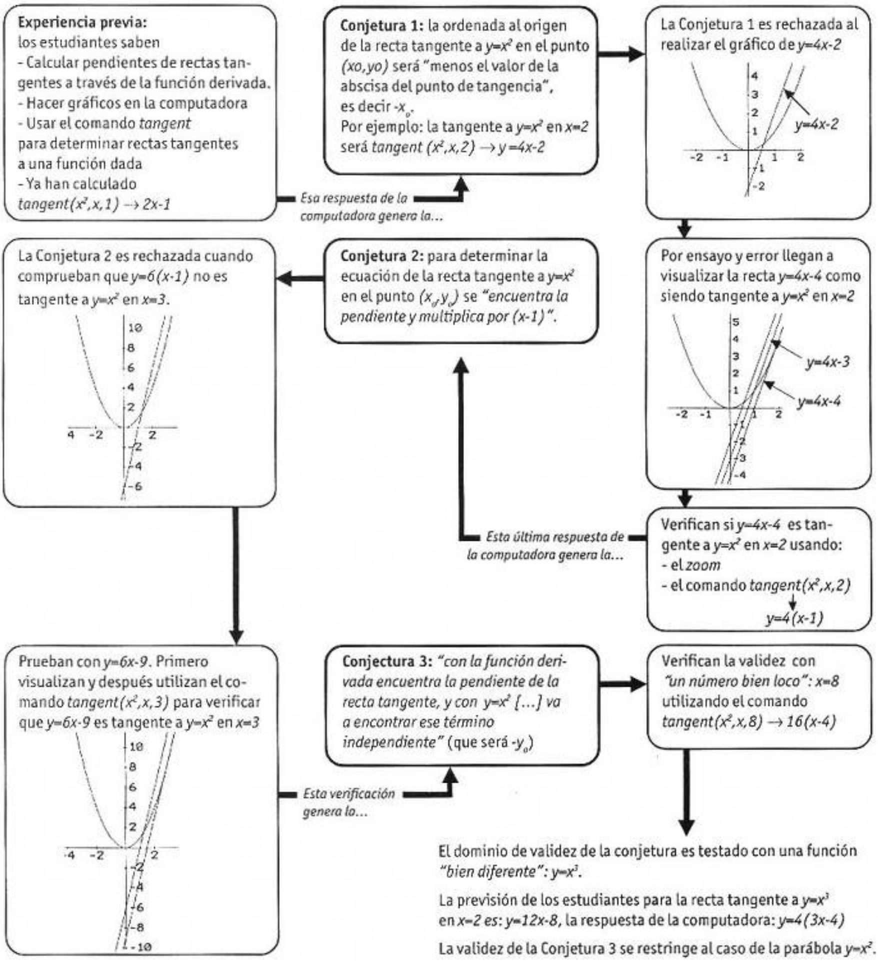
O sea, la ordenada del punto de tangencia (precedida por un signo -) estaría proporcionando el valor de la ordenada al origen de la recta tangente. Para verificar la validez de su conjetura, Víctor expresa que va a elegir *"un número bien loco"*, $x=8$, y calcular la recta tangente a $y=x^2$ en dicho punto, usando el comando *tangent(x^2,x,8)*. Antes de ejecutarlo, Víctor predice, siguiendo su conjetura que, la ecuación de la recta tangente sería: $y=16x-64$, y comprueba que eso es correcto. Después de esta comprobación en un caso particular, Víctor propone verificar la validez de la conjetura para otra función diferente de $y=x^2$. Para Víctor, ya no hay dudas de la validez de su conjetura en el caso de la parábola, entonces ahora procura verificar su validez en otro contexto. Propone la función $y=x^3$, diciendo: *"una bien diferente de esa, mejor* [se refiere a la parábola $y=x^2$] *para ver si se cumple"*. El estudiante propone encontrar la recta tangente a $y=x^3$ en el punto $x=2$. Escribe en la computadora el comando que le permitirá obtener la expresión de la recta deseada y, antes de ejecutarlo calcula en el papel la ecuación de la recta tangente de acuerdo a su conjetura: $y=12x-8$. Al ejecutar el comando de la computadora aparece la expresión *4(3x-4)*. No hay coincidencia y la conjetura de Víctor, válida para $y=x^2$, no puede ser extendida para otras funciones.

Después del fracaso de su última conjetura, en el sentido que su validez no se extiende para funciones distintas de $y=x^2$, Víctor dice que *"usando la yo-yo-mi-xo-xo*[4] [se refiere a la fórmula $y-y_o=m\,(x-x_o)$ donde $m=f'(x_o)$] *da justito"*, y a continuación afirma que de esa forma *"lo voy a hacer mecánicamen-*

te y ahí no voy a entender nada". A partir de esa afirmación el trabajo de los estudiantes pasa a estar centrado en la necesidad que manifiesta Víctor de comprender esa fórmula que él ya conoce.

Resumiendo: un esquema y un modelo

En síntesis, el ejemplo muestra el proceso de pensamiento seguido por dos estudiantes en el transcurso de la tarea de determinar la ecuación de la recta tangente a $y=x^2$ en el punto (x_o,y_o). Se pueden ver las conjeturas que generan mientras trabajan con la computadora y cómo fueron siendo refutadas, reformuladas o validadas. Al intentar extender el dominio de validez de la última conjetura para otras funciones, además de $y=x^2$, y no conseguirlo, una fórmula familiar es recordada: $y-y_o=m(x-x_o)$ y esto indica el inicio de un nuevo episodio. Un esquema que sintetiza el trabajo desarrollado por Víctor y Ricardo se muestra a continuación:



En este esquema puede verse que a partir de la experiencia previa de los estudiantes, en términos de conocimientos matemáticos y del empleo de la computadora para determinar la recta tangente a $y=x^2$ en $x=1$, se genera la Conjetura 1 que puede ser enunciada de la siguiente manera:

> **Conjetura 1:** Para determinar la pendiente de la recta tangente a $y=x^2$ en (x_o,y_o) es empleada la derivada $(y=2x)$, mientras que el valor de la ordenada al origen está dado por la abscisa del punto de tangencia precedida por el signo menos, es decir $-x_o$.
> En este caso, la recta tangente a $y=x^2$ en (x_o,y_o) sería $y=(2.x_o)x-x_o$.

Para intentar comprobar la validez de esta conjetura, los alumnos deciden verificar si $y=4x-2$ es la recta tangente en $x=2$, pero al realizar el gráfico en la computadora, la conjetura es desechada. Los estudiantes prueban con otras rectas hasta llegar a $y=4x-4$ que "parece" ser tangente a la parábola $y=x^2$ en $x=2$. Para verificar esto utilizan dos estrategias. Una estrategia es el uso del comando *Zoom* para aproximarse al punto de tangencia. Esta estrategia no resuelve el problema ya que una característica de las funciones derivables es su "rectificación local". Así, al efectuar un *Zoom* en un entorno del punto $(2,4)$ el gráfico de la parábola y el de su recta tangente $y=4x-4$ se confunden. La segunda estrategia empleada por los estudiantes es el uso del comando *tangent*, para determinar la recta tangente a través de la computadora. La forma en que la computadora escribe la ecuación de la recta tangente en $x=2$ $(4(x-1))$, sugiere a Víctor una segunda conjetura:

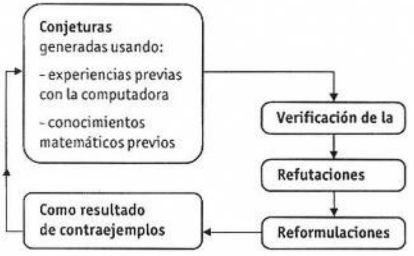
> **Conjetura 2:** La ecuación de la recta tangente será igual al valor de la pendiente multiplicado por $(x-1)$.
> En este caso, la recta tangente a $y=x^2$ en (x_o, y_o) sería $y=(2.x_o)(x-1)$.

A fin de verificar su validez, trazan el gráfico de $y=6(x-1)$ para ver si resulta ser tangente a $y=x^2$ en $x=3$. Nuevamente la conjetura es rechazada. Prueban con $y=6x-9$ y ven que aparenta tangenciar a la parábola en $x=3$. Después de ejecutar el comando *tangent*$(x^2, x, 3)$ verifican que, efectivamente, $y=6x-9$ es tangente en $x=3$. Surge, entonces, la tercera conjetura:

> **Conjetura 3:** Para determinar la pendiente se usa la función derivada y la ordenada al origen es el valor de la ordenada del punto de tangencia con signo menos, es decir $-y_o$.
> En este caso la recta tangente a $y=x^2$ en (x_o,y_o) sería $y=(2.x_o)x-y_o$.

La validez general de la última conjetura es testada a través de *"números locos"*. Esto asegura su generalización en el caso de la parábola, no hay necesidad de prueba. La extensión del dominio de validez de la conjetura es limitada cuando *"una función bien diferente"* (en este caso $y=x^3$) no verifica la conjetura. Este contraejemplo restringe la validez de la conjetura para el caso de la parábola $y=x^2$.

Es importante observar cómo Víctor va generando conjeturas a partir de las respuestas de la computadora, lo cual estaría indicando la posible participación de la computadora en el marco de un abordaje más experimental en la enseñanza de la Matemática. Por otro lado, vale la pena notar que para ambos estudiantes, un caso particular puede tanto refutar una conjetura como comprobarla como válida. La elección de un *"número bien loco"* parece garantizar la generalización de su conjetura para cualquier valor x. Siendo que el objetivo de esta entrevista era presentar evidencia de cómo funciona un colectivo pensante particular, no se solicitó una justificación más rigurosa que asegurara la validez de la conjetura. Sin embargo, en un ambiente de escolaridad formal, este sería el momento apropiado para trabajar ese aspecto, atendiendo a la necesidad matemática de justificar la evidencia gráfica o numérica mostrada por la computadora. Un modelo simplificado del pensamiento de los estudiantes, inspirado en Davis & Hersh (1988) podría esquematizarse de la siguiente forma:



Las estrategias de los estudiantes trabajando una cuestión matemática en un ambiente computacional, son caracterizadas por un zig-zag de conjeturas que son refutadas y después reformuladas. Tales conjeturas son testadas utilizando estrategias tanto gráficas como computacionales. El análisis de casos particulares y las respuestas que la computadora proporciona son la fuente que permite la generación de nuevas conjeturas a partir de contraejemplos que refutan las anteriores. Los aspectos visuales y las respuestas provenientes de la computadora influencian el estilo de construcción matemática seguida por los estudiantes. Tal construcción no sigue un estilo deductivo, sino más bien inductivo, pues a partir de ejemplos particulares se van formulando afirmaciones cuya validez general debe ser justificada posteriormente.

Consideraciones finales

El ejemplo presentado en este artículo trae algunas evidencias que muestran cómo los medios utilizados, en este caso la computadora, impregnan y reorganizan el pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, es compatible con los conceptos de Borba (1994), quien ha indicado la no neutralidad de los medios utilizados en la producción matemática, tanto en contextos de investigación como en ambientes educacionales. Del mismo modo en que Gvirtz (1999) designa al cuaderno como un estructurante de la dinámica del aula, podríamos afirmar, haciendo una extensión de las palabras de esa autora, que las TICs pueden constituirse en un estructurante de la dinámica de la producción matemática entre los estudiantes.

El episodio relatado también es un ejemplo de colectivo pensante (Lévy, 1993) en acción que muestra cómo un sistema, constituido por estudiantes, computadora e investigadora, desarrolla una tarea matemática que, aunque tradicional, como lo es determinar ecuaciones de rectas tangentes, adquiere nuevos matices. La participación de la computadora en esa actividad matemática ha sido esencial para generar conjeturas, refutarlas o validarlas, mostrando la posibilidad de un trabajo matemático con énfasis en la visualización y en la experimentación. Este tipo de trabajo puede ser considerado como un ejemplo de uso "no domesticado" (Borba & Penteado, 2001) de la tecnología en un ámbito educacional, ya que no hay directivas rígidas que limiten su empleo. Mientras tanto, esto no significa que no existan normas relacionadas a la utilización de la computadora en el contexto escolar. Hershkowitz & Schwarz (1997) han enunciado, entre otras, un conjunto de normas sociomatemáticas directamente relacionadas con el uso de herramientas tecnológicas en clases de Matemática y que nos brindan una guía a ser tenida en cuenta a la hora de integrar las TICs en el curriculum escolar. Estos autores enuncian dichas normas de la siguiente forma:

- Las operaciones algorítmicas basadas en la re-

solución de cálculos básicos carecen de valor.
- Es más valioso la organización del trabajo como una actividad de exploración.
- Los resultados brindados por las herramientas tecnológicas no pueden ser considerados como justificaciones, aunque pueden ayudar a generarlas.
- El trabajo inductivo precisa alguna prueba o justificación que vaya más allá de la evidencia mostrada por la computadora.
- El uso de varias representaciones es muy útil para captar el significado de los problemas, resolverlos y, a veces, ayudar a generar nuevas ideas.

Si analizamos la actividad matemática desarrollada por Víctor y Ricardo a la luz de estas normas podemos encontrar que algunas de ellas están presentes: la actividad exploratoria e inductiva, el uso de representaciones múltiples y el planteo de la necesidad de justificaciones posteriores de las hipótesis generadas a partir de la evidencia mostrada por la computadora.
Finalmente, cabe acotar que el episodio relatado sólo pretende brindar evidencias que sustenten las perspectivas teóricas que fueron antes presentadas, sin pretensiones de estar buscando generalizaciones válidas en cualquier contexto. Son claras sus limitaciones, ya que se trata de un trabajo, si se quiere, "de laboratorio", llevado a cabo con estudiantes que se interesaron en participar de la experiencia. No es ese el contexto de un aula común de Matemática universitaria o de cualquier nivel educativo. Sin embargo, una manera de acceder a los procesos de pensamiento de los estudiantes en estos ambientes es a través de este tipo de estudios, y de ahí el valor de sus resultados, que deben ser considerados en un marco más amplio, constituido por el conjunto de estudios realizados por diversos investigadores del área de la Educación Matemática y que van constituyendo un cuerpo de resultados que aportan evidencias que respalden y den sentido a posibles propuestas curriculares que pretendan integrar nuevas tecnologías en las clases de Matemática.

Agradecimiento: a Cristina Esteley por sus valiosas sugerencias y observaciones realizadas en versiones previas de este artículo.

Notas

(1) Este trabajo fue realizado mientras era alumna de doctorado, bajo la dirección del Dr. Marcelo Borba, del *Programa de Pós Graduação em Educação Matemática* de la *Universidade Estadual Paulista* (UNESP - Rio Claro) siendo miembro del *Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática* (GPIMEM) de la misma universidad, con el apoyo financiero de CNPq y CAPES, agencias de apoyo a la investigación de Brasil.

(2) En los trechos de la entrevista incluidos en este artículo, los diálogos aparecen en letra *itálica*. Entre corchetes se colocan explicaciones que pretenden ayudar a la comprensión del contexto. Los trechos que están en letra ***negrita itálica*** indican la aparición de conjeturas.

(3) Se refiere a un comando del software *Derive* que permite aumentar o reducir el tamaño del gráfico.

(4) Esta expresión es una regla mnemotécnica empleada por los estudiantes brasileños para recordar la fórmula $y-y_o= m\ (x-x_o)$ que permite determinar la ecuación de una recta de pendiente conocida (m) que pasa por el punto (x_o, y_o).