LA RESIGNIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN COMPOSICIÓN $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$

Mayra Báez Melendres, Dinazar Escudero Avila, María Terrones Arellano, Eric Flores Medrano

mbaez@cinvestav.mx

Cinvestav-IPN

Resumen

Situados en la aproximación socioepistemológica, la modelación es vista como una práctica social, un marco de referencia que permite la resignificación de los conceptos matemáticos, es creadora o generadora de conocimiento. El uso de gráficas es precisamente un ejemplo de modelación. En el caso particular del concepto de composición de funciones postulamos que es necesaria la identificación de comportamientos gráficos y la búsqueda de tendencias que permitan establecer relaciones entre la función composición y las funciones que la componen, de tal manera que se puedan reconstruir significados para ese concepto. El presente trabajo plantea una situación de transformación en la cual el *uso de las gráficas*, como un constructo teórico, permite la resignificación de la composición $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$.

Palabras clave

Composición de funciones, Uso de las Gráficas, Resignificación.

Introducción

Tradicionalmente en los cursos de cálculo, se privilegian aspectos algebraicos en el tratamiento de los conceptos matemáticos asociados a este, que no son suficientes para la comprensión de dichos conceptos (Buendía, 2004). En este estudio se considera que en el tratamiento del concepto de composición de funciones, es necesaria la identificación de comportamientos gráficos y tendenciales que le permitan al estudiante establecer relaciones entre la función composición y las funciones que la componen, de tal manera que se llegue a una resignificación[1] del concepto. A continuación describiremos algunos aspectos del marco teórico que dan fundamento a nuestro trabajo.

La aproximación socioepistemológica centra su atención en el estudio de las prácticas sociales, las cuales norman la construcción del conocimiento matemático. En este acercamiento se plantea que la problemática fundamental de la matemática educativa es la confrontación de la obra matemática y la matemática escolar. Para entender la naturaleza de esta confrontación es necesario desarrollar estrategias de investigación orientadas a formular epistemologías que analicen las circunstancias que favorezcan la construcción de conocimiento a partir de prácticas sociales. Para los conceptos matemáticos del cálculo, se han identificado tres epistemologías que se ven reflejadas en situaciones que reorganizan el conocimiento matemático: situación de variación, situación de transformación y situación de aproximación. Cada situación es producto de la relación de cuatro elementos: los significados y sistemas simbólicos, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos (Cordero, 2001). Para la situación de transformación, estos cuatro elementos se refieren a (Suárez, 2008):

- Significados y sistemas simbólicos. Patrones de comportamientos gráficos y analíticos de la función.
- Procedimientos. Variación de parámetros de la función.
- Procesos-objetos. Función como una instrucción que organiza comportamientos.
- Argumento. Comportamiento tendencial de las funciones.

[1] Se entiende por resignificación, “la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan las participantes” (Morales, 2009).

En este sentido, es en la situación de trasformación donde se sitúa el *uso de las gráficas*, el cual es visto como un ejemplo de modelación[2].

Este *uso de las gráficas* no se refiere a tratar a las gráficas como representaciones de funciones, sino que hace referencia a un debate entre la forma y funcionamiento de las gráficas, como patrones de comportamientos gráficos y *comportamientos tendenciales*[3] de las funciones (Cordero, 1998). El funcionamiento se refiere a aquellas circunstancias relacionadas con el uso, que hacen de un conocimiento útil para resolver un problema o para integrar una teoría. La forma hace referencia, a las clases de tareas que quedan determinadas por el funcionamiento pero también determinan nuevas formas y funcionamientos (Suarez, 2008). Para poder atender el comportamiento tendencial de las funciones se requiere determinar patrones gráficos (y a veces analíticos) al considerar previamente un comportamiento específico (forma gráfica o analítica) y establecer relaciones entre formas gráficas y analíticas (Cordero 1998).

Con base en lo anterior, consideramos dos aspectos relevantes que permiten precisar los elementos de la situación de transformación para este estudio: 1) el diseño de situación está centrado en un caso particular de la composición de funciones: $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$, siendo siempre $f(x)$ la función exponencial y $g(x)$ una función cualquiera (a excepción del logaritmo); 2) solo se consideran las formas gráficas de estas funciones para la identificación de patrones y comportamientos, y el establecimiento de las relaciones entre ellas. Quedando de la siguiente manera:

[2] Desde el enfoque socioepistemológico, la modelación es vista como una práctica social, un marco de referencia que permite la resignificación de los conceptos matemáticos, es creadora o generadora de conocimiento (Cordero, 2006; Morales, 2009).

[3] El comportamiento tendencial de las funciones es un argumento que establece relaciones entre funciones y se da en situaciones de cálculo donde se discuten aspectos globales de variación. Es así que la gráfica de una función es un comportamiento global, es decir, se mira en forma completa (Cordero, 1998).

- Significados y sistemas simbólicos: patrones de comportamiento gráfico.
- Procedimientos: variación de parámetros. En este caso la función $g(x)$ es el parámetro que varía.
- Procesos-objetos: la gráfica como instrucción que organiza comportamientos[4].
- Argumentos: el comportamiento tendencial de las funciones.

Con base en estos elementos se busca responder cómo el comportamiento tendencial logra la resignificación de la composición de funciones.

El objetivo es establecer relaciones entre los comportamientos[5] gráficos y tendenciales de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x)$ y $(f \circ g)(x)$, de manera que, conociendo el comportamiento de la exponencial y el comportamiento de la función arbitraria $g(x)$, se pueda describir el comportamiento de la composición.

Estas relaciones estarán determinadas por el siguiente análisis, en el que se describen y justifican algunas consideraciones para este caso particular de composición:

[4] Entendemos "la gráfica como instrucción que organiza comportamientos" en el sentido de que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ permiten determinar los comportamientos de $(f \circ g)(x)$, y viceversa, el comportamiento de $(f \circ g)(x)$ permite determinar la gráfica de $g(x)$, considerando que $f(x)$ es la gráfica de la función exponencial.

[5] De aquí en adelante, cuando se hable de "comportamientos" nos estaremos refiriendo tanto a los gráficos como a los tendenciales.

1. Como la función exponencial es una función continua para todo a en los reales, se cumple que:

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

1.1 Si $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \infty$

1.2 Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = 0$

1.3 Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = 1$

2. Para cualquier valor $g(x_0) = k \in \mathbb{R}$, $e^k > 0$, más aún, $e^k > k$. Este resultado se deduce de la expansión en serie de Taylor de la función exponencial.

3. Las abscisas de los puntos máximos y mínimos de $g(x)$ lo son también de $(f \circ g)(x)$ y viceversa.

4. Las discontinuidades de $g(x)$ lo son también para $(f \circ g)(x)$[6].

Las consideraciones anteriores se refieren a las relaciones de comportamiento entre $f(x) = e^x$ y la composición, y entre $g(x)$ y la composición. Quedando establecidos cinco comportamientos globales que describimos a continuación:

- En los intervalos en que la imagen de $g(x)$ no tiende a infinito[8] la composición tiene un comportamiento similar que el de $g(x)$.
- Si la imagen de $g(x)$ tiende a más infinito, la composición también lo hace y lo hace con el mismo comportamiento.

[6] Cabe resaltar que el punto 4 se cumple para cualesquiera que sean $f(x)$ y $g(x)$.

- Si la imagen de $g(x)$ tiende a menos infinito, la composición tiende a cero cada vez más lento.
- La función composición es siempre positiva.
- La función composición está siempre por arriba de $g(x)$.

Son precisamente estas últimas consideraciones globales las que se toman en cuenta en el diseño de situación. Con estas, es posible describir las características de la gráfica de la composición dado el comportamiento gráfico de la función $g(x)$, y viceversa, dada la gráfica de la composición, establecer qué características debe tener la gráfica de $g(x)$.

Metodología

Se propone un diseño de situación sobre la composición de funciones fundamentado en el uso de las gráficas. El diseño consta de tres fases, y en cada fase se muestran las gráficas de las funciones y se pide describir los comportamientos, o realizar acciones sobre las gráficas para observarlos. Se busca que los gráficos por sí mismos den elementos al estudiante que le permitan identificar los comportamientos gráficos y buscar tendencias que lo lleven a establecer las relaciones entre las gráficas de las funciones y a describir o responder lo que se pide, de tal manera que llegue a resignificar la composición de funciones, en particular la composición $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$.

Considerando los cinco comportamientos globales antes descritos, a continuación se describen las tres fases de la situación de transformación propuesta:

- ***Fase 1***

Se compone de cuatro ejercicios. En cada uno se le presentan al estudiante ventanas con gráficas: una con la función exponencial $f(x)$ y la otra gráfica con una función $g(x)$ y la correspondiente función composición de estas. Posteriormente se le pide al estudiante que describa el comportamiento de las funciones (a través del reconocimiento de patrones gráficos), de tal manera que obtenga elementos para reflexionar y contestar en torno a los comportamientos globales que se desean evidenciar en esta fase. Este análisis se repite en cada uno de los ejercicios de esta fase, con el fin de hacer evidentes los comportamientos correspondientes.

Objetivo

En esta fase se pretende que el estudiante logre establecer las relaciones entre tres de los comportamientos globales de las funciones, a saber, las tendencias a más infinito, a menos infinito y el comportamiento de la composición $(f \circ g)(x)$ cuando $g(x)$ no tiende a menos infinito o más infinito.

En el Ejercicio 1 se evidencia el comportamiento: $g_1(x)$ no tiende a menos infinito o más infinito, y se sostiene que el estudiante podrá establecer una relación de similitud (A este comportamiento se le llamará de aquí en adelante *el relacionado con la forma* atendiendo a este resultado) entre el comportamiento de la gráfica de $g_1(x)$ y el comportamiento de la gráfica de la composición (ver figura 1).

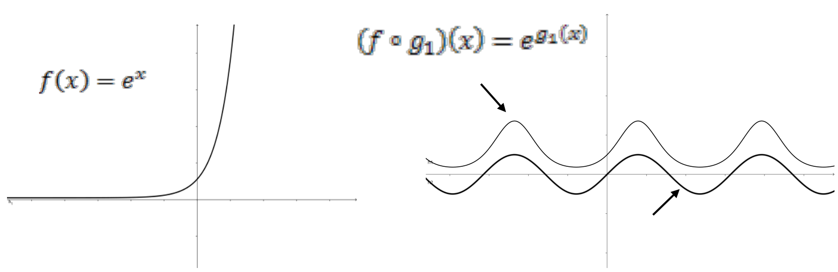


Figura 1.

En el Ejercicio II, las gráficas (figura 2) muestran dos comportamientos: el relacionado con la forma, y el que determina la tendencia hacia más infinito. El estudiante podrá reconocer que la forma de la función composición es semejante a la forma de la función $g_2(x)$ en todos los reales. Y que cuando la función $g_2(x)$ tiende a más infinito la función compuesta también lo hace.

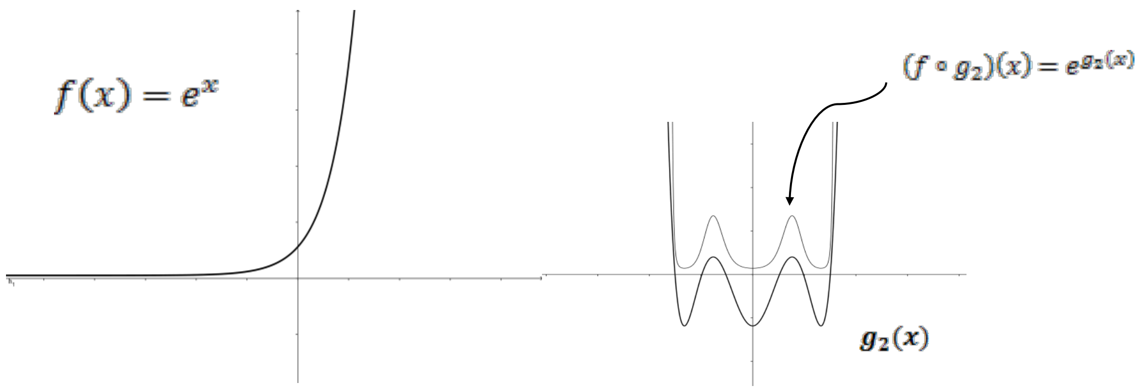


Figura 2.

Los comportamientos a evidenciar en el Ejercicio 3 son: el relacionado con la forma y el de la tendencia a menos infinito. En este ejercicio, se hace hincapié en la forma y el comportamiento de la gráfica de la composición según la forma y comportamiento de las gráficas de $f(x)$ y $g_3(x)$ (ver figura 3).

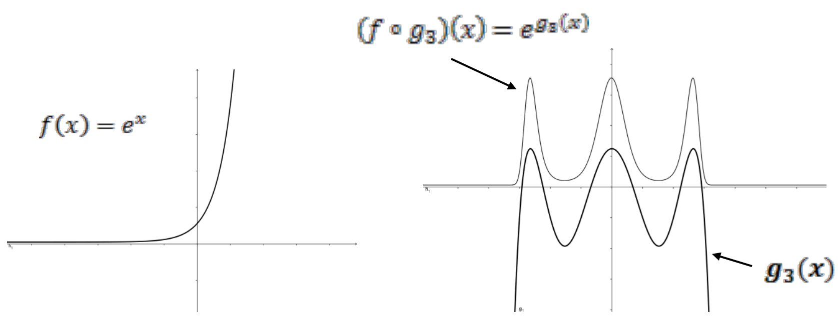


Figura 3.

Con las gráficas de la figura 4 se pretende identificar tres comportamientos globales: el relacionado con la forma, la tendencia a más infinito y la tendencia a menos infinito. Se trata de que el estudiante observe que estos comportamientos pueden presentarse simultáneamente en una misma función.

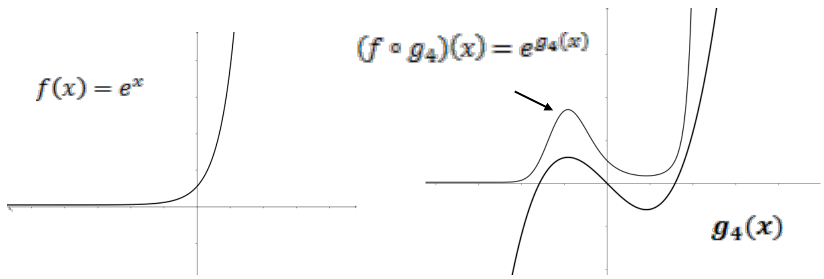


Figura 4.

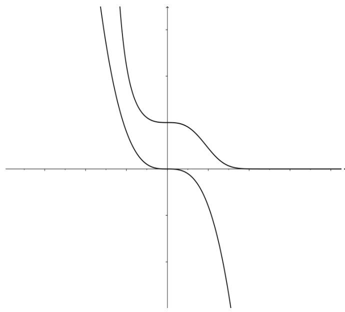
- ***Fase 2***

Se compone de dos ejercicios en los que se pide identificar algunos aspectos gráficos que permitan obtener los dos comportamientos globales restantes y así establecer las relaciones entre $g(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

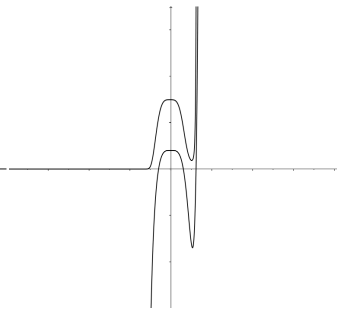
Objetivo

Que el estudiante reconozca los dos comportamientos globales restantes: la gráfica de la composición está siempre por arriba del eje 🄰 y por arriba de la gráfica de la función $g(x)$ y reafirme los comportamientos anteriores.

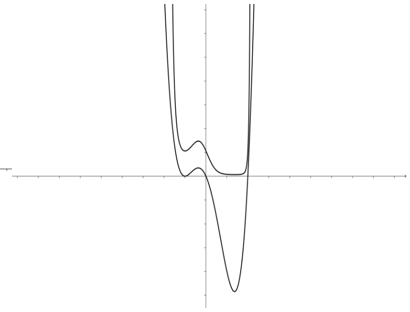
En el Ejercicio 1 se pide al estudiante que identifique, en cada ventana de trabajo, las partes de las gráficas que están más alejadas, o las más cercanas entre sí. La intención principal es, por un lado, reconocer que dichas gráficas no guardan un paralelismo (Entendemos paralelismo en el sentido de que las gráficas no tienen la misma distancia entre cada par correspondiente.) aunque poseen una forma similar para algunos intervalos de $g(x)$. Y por otro lado, observar que la gráfica de la composición siempre está por encima del eje de las x.



Ventana 1

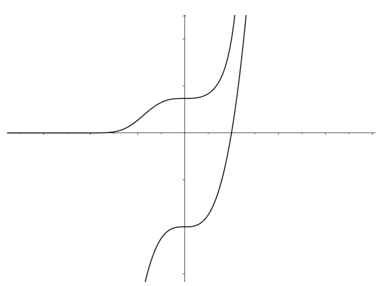


Ventana 2

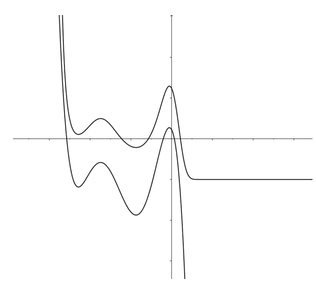


Ventana 3

En el Ejercicio II se busca hacer énfasis en el último comportamiento global de la función composición: que la gráfica de $(f \circ g)(x)$ se encuentra siempre por arriba de la gráfica de la función $g(x)$.



Ventana 1



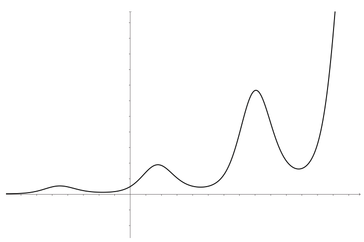
Ventana 2

- ***Fase 3***

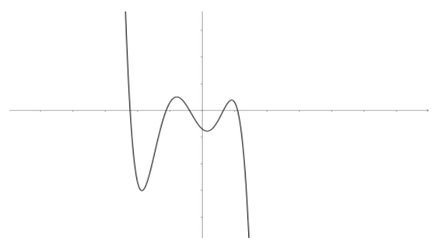
Para poder evidenciar que el estudiante ha logrado establecer relaciones entre los comportamientos de $f(x)$, $g(x)$ y $(f \circ g)(x)$, se proponen dos ejercicios claves que permiten el uso de las relaciones anteriores entre los comportamientos gráficos.

Objetivo

El objetivo de esta fase es observar cómo refleja el estudiante que los cinco comportamientos globales le permiten describir y bosquejar el comportamiento de $(f \circ g)(x)$ dada la gráfica de $g(x)$, y describir y bosquejar el comportamiento de $g(x)$ dada la gráfica de $(f \circ g)(x)$.



I) La siguiente es la gráfica de $g(x)$, bosqueja sobre el mismo plano la gráfica de $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$



II) La siguiente es la gráfica de $(f \circ g)(x) = e^{g(x)}$, bosqueja sobre el mismo plano la gráfica de $g(x)$.

Discusión

En este trabajo se presenta una propuesta de diseño de situación para el tratamiento de la composición de funciones, en particular, para la composición $(f \circ g)(x)$, donde $f(x)$ es siempre la función exponencial y $g(x)$ una función cualquiera (exceptuando el logaritmo). Más aún se pretende que el estudiante llegue a la Resignificación de este concepto matemático a través de la determinación de comportamientos gráficos y tendenciales. Sostenemos como hipótesis, que se logrará tal resignificación cuando el estudiante logre establecer las relaciones de comportamientos gráficos y tendenciales entre la gráfica de la composición y las gráficas de las funciones que la componen, y que además las use para afrontar una situación. Específicamente, se pretende que a través de esas relaciones se pueda predecir un comportamiento gráfico.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico).* Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav. México

Cordero, F (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Numero1, 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México pp. 103-128.

Morales, M. (2008). *Resignificación de la serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación. Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico.* Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav. México.