

ELEMENTOS QUE COMPONEN EL SIGNIFICADO DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN LIBROS DE TEXTO DEL NIVEL SUPERIOR



Leslie Bedolla Chávez, Erika Suguey Maldonado Mejía, Flaviano Godínez Jaimes

Universidad Autónoma de Guerrero

bedocha_les86@hotmail.com, elikamm@hotmail.com, fgodinezj@gmail.com

Resumen

En este escrito se reportan los resultados de nuestra investigación acerca de los elementos del significado (campos de problemas, algoritmos y procedimientos, lenguaje, definiciones y propiedades y argumentos) de las Medidas de Tendencia Central presentes en libros de texto que utilizan profesores de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, apoyado en la Teoría de los Significados Sistémicos. Los resultados muestran que en los libros de texto existe una variedad de elementos del significado de las medidas de tendencia central así como algunas inconsistencias, principalmente en definiciones y propiedades.

Palabras Claves

Medidas de Tendencia Central, Elementos del Significado, Teoría de los Significados Sistémicos (TSS).

Introducción

En las últimas décadas se ha intensificado el uso masivo de la estadística en todo el mundo como ciencia interdisciplinar, debido principalmente a la necesidad de describir e interpretar datos sobre temas variados que aparecen en la vida cotidiana. Por tal razón, la estadística se ha incorporado de forma generalizada al currículo de matemáticas.

Esto ha llevado que algunos investigadores se preocupen por los problemas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la estadística en los diferentes niveles educativos, pero estos estudios aun son muy escasos en comparación con investigaciones en otras ramas de las matemáticas.

En México son muy pocos los investigadores que estudian los problemas de la estadística en el ámbito escolar, en comparación con otros países, como Estados Unidos y España. Las investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, han estudiado principalmente los conceptos de Medidas de Tendencia Central (MTC), como media, mediana y moda (Mayén, *et al.*, 2007; Cobo y Batanero, 2004; Puerto, *et al.*, 2004; Cobo y Batanero, 2000; y Batanero, 2000), estos trabajos han reportado que existen errores y dificultades en la comprensión del significado de esos conceptos por parte de estudiantes de distintos niveles educativos. Según Batanero (2001) una de las causas de estos problemas es que los profesores que imparten los temas de estadística no tienen una preparación específica en esta rama de las matemáticas y esto da como consecuencia, que sean muy pocos los profesores que incluyan los temas de estadística y probabilidad en su enseñanza.

Por otro lado, Sánchez y Cobo (1996) y Ortiz (1999) citado en Batanero (2001), señalan que aunque existen libros de texto excelentes, la investigación didáctica ha mostrado como algunos errores conceptuales y una pedagogía inadecuada se transmite con una frecuencia mayor en los libros de texto. Debido a que existen errores y dificultades en la comprensión de las MTC, en este trabajo nos preocupamos en estudiar uno de los principales materiales didácticos que se utiliza en el proceso enseñanza-aprendizaje: libros de texto, puesto que son la herramienta didáctica más utilizada por el profesor e influyen fuertemente en el aprendizaje de los estudiantes, es de interés analizar cómo son presentados los conceptos de MTC en los libros de texto, ya que como indica Cobo y Batanero (2004) si en un texto aparece un significado sesgado, este puede llegar a transmitirse a los alumnos.

Se planteó para este trabajo la siguiente pregunta ¿cómo son presentados los elementos del significado de las medidas de tendencia central en los libros de texto del Nivel Superior, específicamente de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero? y como objetivos: identificar cómo son presentados los conceptos de Medidas de Tendencia Central en los libros de texto utilizados en la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) y analizar, caracterizar y agrupar los

problemas propuestos, algoritmos de cálculo, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos de los conceptos de media, mediana y moda en los libros de texto.

El marco teórico es el propuesto por Godino (2003) llamada Teoría de los Significados Sistémicos (TSS). La TSS plantea que para analizar mejor los procesos de enseñanza-aprendizaje y utilizar un mismo lenguaje en el análisis de las posibles disfunciones y dificultades de los alumnos que participan en una institución de enseñanza se debe contemplar la idea de objeto matemático y su significado desde una doble faceta, institucional y personal. Es decir, que para analizar el significado en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, interesa descomponer el significado global en entidades más elementales. Por lo que en esta teoría para poder analizar los diferentes tipos de prácticas significativas con relación a un objeto matemático, se describen y diferencian categorías de elementos en el significado sistémico del objeto matemático, como son:

Campos de Problemas: situaciones-problemas que inducen a actividades matemáticas, como ejemplos, ejercicios y problemas que se plantean para aplicar las definiciones, los algoritmos, las propiedades y el lenguaje (términos, símbolos y gráficos) de un objeto matemático.

Algoritmos y Procedimientos: son los pasos que se realizan para resolver un tipo ó campo de problemas, es decir, las operaciones y los procedimientos que se ponen en juego en la actividad matemática.

Lenguaje: son expresiones, palabras, notaciones, símbolos, tablas y gráficos que caracterizan y constituyen una forma abreviada del concepto y que son utilizadas en la resolución de un campo de problemas.

Definiciones y Propiedades: se entienden por caracterizaciones y descripciones generales (conceptos, proposiciones) de un objeto matemático que se aplican para resolver campos de problemas en la actividad matemática.

Argumentos: las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos se ligán entre sí mediante argumentos o razonamientos que sirven para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades de los objetos matemáticos.

La TSS indica que estos elementos pueden ser considerados para analizar cualquier objeto, de manera que para esta investigación tomamos la descripción de los elementos que se consideran para dar respuesta al problema del significado de un objeto matemático. Los consideramos, no para determinar el significado de cada uno de los elementos, ni para determinar el significado de las MTC en general, sino para analizar e identificar cómo son presentados cada uno de los elementos del significado de las MTC en algunos libros de texto de Nivel Superior.

Metodología

Como el interés de nuestro trabajo se centró en analizar los libros de texto que utilizan profesores que imparten la materia donde se involucran a los conceptos de MTC (media, mediana y moda), realizamos primeramente una revisión del Plan y Programa de Estudios (2000) de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM-UAG, el propósito fue identificar la bibliografía que se recomienda para el profesor y el objetivo de la materia, posteriormente una “entrevista” a los profesores que imparten la asignatura; esto con la finalidad de considerar los libros que utilizan para su práctica docente. Una vez seleccionados los libros realizamos el análisis de su contenido sobre la media, mediana y moda. Los libros fueron:

Libro 1 (L1). Estadística Elemental de Robert Johnson; Libro 2 (L2). Estadística de Andrés Chávez Rodrigo, Covarrubias Melgar Dante, Galán Hernández Horacio, López Salmerón Nahúm, Méndez Mauricio Juan y Menéndez Acuña Ernesto; Libro 3 (L3). Estadística para Administradores de Richard I. Levin y David S. Rubin; Libro 4 (L4). Métodos Estadísticos un Enfoque Interdisciplinario de Said Infante Gil y Guillermo P. Zárate de Lara; Libro 5 (L5). Probabilidad y Estadística para Ingenieros de R.E. Walpole y R.H. Myers; Libro 6 (L6). Bioestadística de Francisca Ríus Díaz, Francisco Javier Barón López, Elisa Sánchez Font y Luis Parras Guijosa.

Utilizamos la siguiente codificación para los campos de problemas: PM1 Problema uno de la Media y de forma similar PM2, PM3, PM4, PM5, PM6 y PM7; PME1 Problema uno de la Mediana y de forma similar PME2, PME3 y PME4; PMO1 Problema uno de la Moda y de forma similar para PMO2, PMO3 y PMO4; para los algoritmos de cálculo AM1 Algoritmo uno de la Media y de forma similar AM2, AM3, AM4, AM5, AM6, AM7, AM8, AM9 y AM10; AME1 Algoritmo uno de la Mediana y de forma similar AME2; AMO1 Algoritmo uno de la Moda y de forma similar AMO2 y AMO3; y para el problema uno de Medidas de Tendencia Central PMTC1.

Resultados y Discusión

El análisis realizado mostró que los elementos del significado presente en los libros de texto son muchos y tienen distinto tratamiento, a continuación se describen para cada una de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda).

Los *campos de problemas* asociados a la **media** se presentan para un conjunto de datos sin agrupar y para un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias simples o tablas de frecuencias por intervalo. También se diferencian según el tipo de variables. Se identificaron siete tipos de campos de problemas relacionados con la media, los cuales se describen en la tabla 1 donde se hace explícito la frecuencia de cada campo de problema asociado con la media en los libros de texto.

Tabla 1. Campos de Problemas asociados a la media

Campos de Problemas	L1	L2	L3	L4	L5	L6
PM1. Dado un conjunto de datos sin agrupar, calcular la media aritmética.	X	X	X	X	X	X
PM2. Dado un conjunto de datos (mayor a 30) agrupados en tablas de frecuencias simples, calcular la media.	X	X				
PM3. Dado un conjunto de datos (mayor a 30) agrupados en tablas de frecuencias por intervalos, calcular la media.		X	X	X		X
PM4. Dado un conjunto de datos con valores muy grandes o muy pequeños sin agrupar, calcular la media usando el método de codificación.	X			X		
PM5. Dado un conjunto de datos con valores muy grandes o muy pequeños y agrupados en tablas de frecuencias simples y por intervalos, calcular la media usando el método de codificación.	X		X	X		
PM6. Dado un conjunto de datos, calcular la media ponderada.		X	X			
PM7. Comparación de dos conjuntos de datos (numéricamente o gráficamente), después que se haya calculado la media.		X	X	X		

En cuanto a los *campos de problemas* asociados a la **mediana** estos están definidos para un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos y para un conjunto de datos sin agrupar, en estos últimos para un número de datos par e impar. Además, también se toma en consideración el tipo de variable, que pueden ser cuantitativas y cualitativas ordinales. Para esta medida se identificaron cuatro tipos de campos de problemas. En la tabla 2 se presentan los campos de problemas de la mediana, así como su frecuencia en cada uno de los libros.

Tabla 2. Campos de problemas Asociados con la mediana



Campos de Problemas	L1	L2	L3	L4	L5	L6
PME1. Dado un conjunto de datos sin agrupar, calcular la mediana (número de datos par)	X	X	X	X	X	X
PME2. Dado un conjunto de datos sin agrupar, calcular la mediana (número de datos impar).	X	X	X	X	X	X
PME3. Dado un conjunto de datos cualitativos ordinales, calcular la mediana.	X		X			
PME4. Dado un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos, calcular la mediana		X	X	X		X

Por último, los *campos de problemas* de la **moda** se encontraron definidos para un conjunto de datos sin agrupar y para un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias simples y por intervalos. Además esta medida se puede calcular en situaciones-problemas que involucren tanto datos cuantitativos como datos cualitativos (nominales y ordinales).

Se encontraron cuatro tipos de campos de problemas para la moda, también en la tabla 3 se presenta la frecuencia que tubo cada problema en cada uno de los libros.

Tabla 3. Campos de problemas Asociados con la moda

Campos de Problemas	L1	L2	L3	L4	L5	L6
PMO1. Dado un conjunto de datos numéricos sin agrupar, calcular la moda.	X	X	X	X	X	X
PMO2. Dado un conjunto de datos cualitativos agrupados en tablas de frecuencias simples, calcular la moda.		X	X			
PMO3. Dado un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias simples, calcular la moda.		X	X			
PMO4. Dado un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos, calcular la moda.		X	X	X		X

Otro elemento, lo constituyen los algoritmos y procedimientos. En cuanto a los *algoritmos* y *procedimientos* de la **media**, estos dependen de la forma de presentación del conjunto de datos así como también del tipo de variable, pues la media está definida únicamente para variables cuantitativas (discretas y continuas). Hay algoritmos para un conjunto de datos no agrupados y para un conjunto de datos agrupados en tablas de frecuencias simples y por intervalos. Se encontraron cinco tipos de algoritmos.

Tabla 4. Algoritmos y Procedimientos para la media

Algoritmos y Procedimientos	L1	L2	L3	L4	L5	L6
AM1. Cálculo de la media para datos no agrupados.	X	X	X	X	X	X
AM2. Cálculo de la media para datos agrupados en tablas de frecuencias simples.		X				

AM3. Cálculo de la media para datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos.		X	X	X		X
AM4. Cálculo de la media para datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos utilizando el método de codificación.	X		X	X		
AM5. Cálculo de la media ponderada.		X	X			

Sobre los *algoritmos y procedimientos* de la mediana, este algoritmo no es único, sino que depende del tipo de datos, de la forma de presentación de los mismos e incluso del número de ellos. Para el cálculo de la mediana, hay algoritmos para un conjunto de datos no agrupados y agrupados en tablas de frecuencias por intervalos. En la tabla 5 se muestra la frecuencia que tuvieron en cada uno de los libros analizados.

Tabla 5. Algoritmos y Procedimientos para la mediana

Campos de Problemas	L1	L2	L3	L4	L5	L6
AME1. Cálculo de la mediana para datos no agrupados.	X	X	X	X	X	X
AME2. Cálculo de la mediana para datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos.		X	X	X		X

Por último los *algoritmos y procedimientos* de la **moda** dependen de cómo estén presentados los datos, que se trate de variables cualitativas ó de variables continuas con valores agrupados en tablas de frecuencias simples o por intervalos.

Tabla 6. Algoritmos y Procedimientos para la moda.

Algoritmos y Procedimientos	L1	L2	L3	L4	L5	L6
AMO1. Cálculo de la moda para datos no agrupados.	X	X	X	X	X	X
AMO2. Cálculo de la moda para datos agrupados en tablas de frecuencias simples.		X	X			
AMO3. Cálculo de la moda para datos agrupados en tablas de frecuencias por intervalos.		X	X	X		X

Otro elemento que compone el significado de un objeto matemático es el Lenguaje. Por lenguaje se consideran todas las representaciones como términos, palabras, expresiones, símbolos, tablas, gráficos del objeto abstracto, que sirven para representar a los conceptos y propiedades, así como para describir los problemas y sus datos. Enseguida mostramos los resultados de acuerdo con el elemento de *términos y expresiones*.

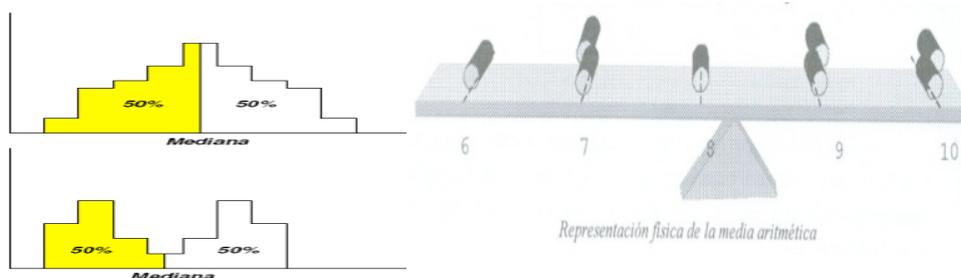
Tabla 7. Términos y Expresiones característicos de la media, mediana y moda

Términos y Expresiones	Media	Mediana	Moda
Población	X	X	X
Conjunto de Datos	X	X	X
Conjunto de Datos sin Agrupar	X	X	X
Conjunto de Datos Agrupados	X	X	X
Tablas de Frecuencias Simples	X	X	X
Tablas de Frecuencias por Intervalos	X	X	X
Límite Inferior	X	X	X
Límite Superior	X	X	X
Variable	X	X	X
Parámetro	X	X	X
Distribución de Frecuencias	X	X	X
Centro	X	X	
Observaciones	X	X	X

Los términos y expresiones relacionados con la **media, mediana y moda** son muy distintos, pues hay diferentes palabras que sirven para resolver campos de problemas. En cuanto a las *notaciones*

y símbolos ($\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{x} = \frac{\sum(f \cdot x)}{n}$, $Me(x) = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$) relacionados con la **media, mediana y**

moda estos los encontramos representados para datos no agrupados y para datos agrupados en tablas de frecuencias simples y por intervalos. Por último otro lenguaje lo constituyen las *tablas y gráficos* que son característicos en estadística, estos son introducidos con problemas, ejercicios o para describir algunas propiedades.



Otro elemento son las *definiciones y propiedades*. Se encontraron que las definiciones están escritas de distinta manera en los seis libros para los conceptos de media, mediana y para MTC. En cuanto a la definición de MTC, se encontró que definen a las MTC en el sentido de que tienden a localizar el punto medio de un conjunto de datos (L1 y L2) y como los valores que localizan el centro de un conjunto de datos (L3 y L5). Sin embargo, L3 define MTC como medidas de posición, pero esta definición no es correcta, puesto que las medidas de posición determinan los valores que dividen al conjunto de datos en proporciones dadas. En cuanto a las definiciones de media, L1 y L3 la definen como el promedio de un conjunto de datos, L4, L5 y L6 la definen con su algoritmo de cálculo “suma de todos sus valores dividida por n”, y también L4 hace referencia que la media es el punto de equilibrio, pero esta definición es una interpretación geométrica.

La **mediana** se define como el valor que no supera ni es superado por más de la mitad de las observaciones (L2, L3 y L6), L4 y L5 la definen con su algoritmo de cálculo y L1 la define como el número medio que se obtiene cuando las piezas de datos se ponen en orden de acuerdo con su tamaño. Por último, la moda se define en los seis libros como el valor que ocurre con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

Por lo que se refiere a las *propiedades de las MTC* se observó una propiedad de la **media** que es mostrada en los seis libros: la media es muy sensible a valores extremos. Por otro lado, la propiedad de que la suma de los cuadrados de las desviaciones de cada valor respecto a la media es un valor mínimo se denota incorrectamente por $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min$.

De las propiedades de la **mediana**, son frecuentes las siguientes que se refieren a que la mediana a diferencia de la media no se ve distorsionada por la presencia de valores extremos (L2, L3, L5 y L6) y la otra es que la mediana resulta mejor medida de posición central aún cuando la población está sesgada negativa o positivamente. Al igual que la media, en las propiedades de la mediana también se encontraron errores, la mediana se puede calcular para datos cualitativos esta propiedad no es aplicable para cualquier situación, por ejemplo si se pide calcular la mediana para los datos de estado de salud: sano, sano, enfermo y muy enfermo.

Por último, observamos que la **moda** no posee muchas propiedades como la media y mediana, además, en la mayoría de los libros no presentan las mismas propiedades como en el caso de la media y mediana. La única propiedad que se ve reflejada en L2, L3 y L5 se refiere a que la moda se puede calcular para datos cualitativos como para datos cuantitativos.

El último elemento que analizamos, se refiere a los *argumentos* que se emplean para probar algunos problemas, definiciones y propiedades de las MTC. Los tipos de argumentos que se utilizan en los libros para justificar algunas propiedades, se presentan con ejemplos y ejercicios particulares. No se encontró otro tipo de argumento. Además, los únicos libros que presentan los argumentos para las propiedades características de las MTC son L2, L3 y L6. Nos percatamos que L1 no presenta ningún argumento para la media, mediana y moda.

Conclusiones

Con los resultados del análisis de los elementos de las MTC en los libros de texto se podría contribuir en la explicación de la problemática que vive la estadística en el sistema educativo, ya que algunos trabajos de investigación que han centrado su interés en estudiar la comprensión del significado de los conceptos de MTC han reportado que existen errores y dificultades en la comprensión de estos conceptos en estudiantes de distintos niveles de escolaridad. Además con los resultados del análisis de los elementos del significado, permitirán en su momento, junto con otras investigaciones, reducir tanto los errores como las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes para la comprensión de las MTC, y de esta manera contribuir en la mejora de la enseñanza - aprendizaje de la estadística y probabilidad en nuestro sistema educativo.

Debido a la variedad y diferencia de cada uno de los elementos del significado de las MTC presentes en algunos libros de texto de Nivel Superior, así como la inconsistencia de algunas definiciones y propiedades, consideramos que es necesario analizar con detenimiento el significado tanto institucional como personal de la media, mediana y moda; y no sólo del Nivel Superior sino desde los niveles en que estas MTC son estudiadas. Como sugiere Godino (2003) que para analizar mejor los procesos de enseñanza - aprendizaje y utilizar un mismo lenguaje en el análisis de las posibles disfunciones y dificultades de los alumnos que participan en una institución de enseñanza, se tiene que investigar el objeto matemático y su significado desde

una doble faceta, desde lo institucional y lo personal, para poder así diseñar herramientas didácticas que contribuyan en la mejora de la enseñanza – aprendizaje en este caso de la Estadística.

Bibliografía

Batanero, C. (2000). Significado y Comprensión de las Medidas de Posición Central. *UNO* 25, 41-58.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Obtenido en noviembre 24, 2008 del sitio web de Universidad de Granada <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones/index.htm>

Cobo, B y Batanero, C. (2000). La Mediana en la Educación Secundaria Obligatoria: ¿Un concepto sencillo? *UNO* 23, 85-96.

Cobo, B. (2003). *Significado de las Medidas de Posición Central para los Estudiantes de Secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Granada.

Cobo, B y Batanero, C. (2004). Significado de la Media en los Libros de Texto de Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias* 22(1), 5-18.

Chávez, R., Covarrubias, D., Galán, H., López, N., Méndez, J y Menéndez, E. (2001). *Estadística*. México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Facultad de Ciencias de la Educación: Universidad de Granada.

Infante, S y Zárate, G. (2005). *Métodos Estadísticos un Enfoque Interdisciplinario*. Trillas: México.

Johnson, R. (2002). *Estadística Elemental*. Trillas: México.

Levin, R y Rubin, D. (1996). *Estadística para Administradores*. Editorial Pearson.

Mayen, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las Medidas de Posición en Estudiantes Mexicanos de Bachillerato. *Revista Iberoamericana en Educación Matemática*. 9, 187-201.

Puerto, S., Seminara, S. y Minnaard, C, (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación* 43, 3-25.

Ríus, F., Barón, F., Sanchez, E y Parras, L. (s. f.). *Bioestadística: Métodos y Aplicaciones*. Obtenido en diciembre 4, 2008 del sitio web de la Universidad de Málaga <http://www.bioestadistica.uma.es/libro/>

Walpole, R. y Myers, R. (1986). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. México: Mc Graw-Hill.