

REPRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA EN LA DIDÁCTICA



Guadalupe Cabañas-Sánchez, Ricardo Cantoral-Uriza
gcabanas.sanchez@gmail.com; rcantor@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN

Resumen

El estudio está centrado en el análisis de la representación del concepto de área como objeto del Cálculo –integral definida– y como objeto de la Geometría, en el discurso matemático escolar. Se exploró para ello, a los programas de enseñanza y libros de texto de matemáticas de nivel básico hasta la universidad. El marco de referencia para llevar adelante dicha exploración, atendió a los usos del área en la matemática escolar, a los contextos en que se presentan y los procedimientos puestos en juego en esa presentación. Los resultados indican que el estudio inicia en la escuela básica y se extiende hasta la universidad. Su explicación ocurre de la Geometría al Análisis, hay un cambio en el lenguaje y en la forma de operar y representar los objetos matemáticos. El concepto de área se estudia fundamentalmente en un contexto estático, el dinámico se halla ligado a variables que cambian con respecto al tiempo. Los hallazgos indican además, que el área se usa para conservar, comparar, medir, estimar, calcular y representar superficies diversas. Los procedimientos varían, debidos al cambio en el lenguaje.

Palabras clave

Área, integral definida, usos, contextos y procedimientos del área.

Introducción

El interés por profundizar en el entendimiento de los fenómenos didácticos ligados a los procesos de aprendizaje del concepto de integral definida –concretamente el de su articulación con el concepto de área–, nos condujo a indagar cómo se representa en el discurso matemático escolar este objeto matemático. En razón de que se estudia desde la explicación escolar como área bajo una curva, la exploración se constituyó alrededor del concepto de área como objeto de la Geometría y como objeto del Cálculo en la didáctica matemática. El propósito es mostrar el recorrido que sigue su presentación en el discurso matemático escolar, a partir de los *usos del área* en la matemática, asimismo, de algunas implicaciones didácticas. El estudio es parte del

análisis a priori de una investigación más amplia, en la que se indaga acerca del papel que desempeña la noción de conservación del área en la explicación escolar de la integral definida (Cabañas y Cantoral, 2008). Los resultados contribuyen en el rediseño de este objeto matemático, a fin de establecer su resignificación en el aula.

La investigación de la cual emerge este escrito está basada en la Socioepistemología, marco teórico que se interesa por explicar los fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas, mediante el examen del papel que desempeña la construcción social del conocimiento desde un enfoque sistémico (Cantoral y Farfán, 2003). Incorpora para ello cuatro componentes: la cognitiva, la epistemológica, la didáctica y la social. Las componentes cognitiva, didáctica y epistemológica, contribuyen en la explicación del funcionamiento didáctico, con la componente social se busca afectar el sistema educativo en el rediseño del discurso matemático, al abordar el estudio de prácticas, previo a la construcción de conceptos. Los resultados reportados aquí, se inscriben en la componente didáctica.

A fin de llevar a cabo el análisis de dicha representación, se eligió como marco de referencia a los usos¹ del área en el discurso matemático escolar. El estudio centrado en los usos se apoya en la tesis de que las entidades matemáticas además de conceptos y afirmaciones tienen usos, mismos que han sido puestos en funcionamiento o utilizados por los grupos humanos en y ante situaciones diversas. Asimismo, por la importancia que tiene tanto para la didáctica como para nuestra investigación, el atender a una significación de los objetos matemáticos centrados en el uso del conocimiento matemático. Los usos a su vez, están asociados a contextos² situacionales distintos, así como a determinados procedimientos³ o acciones. Dado que esta exploración se ubica en la matemática escolar, se atiende especialmente a aquellos usos del área que también se circunscriben a la geometría y a la medición.

¹ Se entiende por *uso* a las formas en que es empleada o adoptada una determinada noción o concepto en un contexto específico (Cabañas y Cantoral, 2008).

² Los *contextos* serán los entornos situacionales en los que se considera un hecho.

³ Los *procedimientos* van a ser las formas de organización de una situación (Cordero, 2005).

El análisis se organizó alrededor de las preguntas siguientes: *¿Cómo se representa el concepto de área en la Geometría? ¿Cómo transita el concepto de área por la medición? ¿Cómo transita el concepto de área de la Geometría al Cálculo?* Estas preguntas se tomaron como base a fin de explorar el recorrido que sigue el concepto de área en la didáctica matemática, a su vez, si dicho recorrido es un continuo en el sentido de usos.

Aspectos metodológicos

Los datos de este trabajo se derivan de la exploración realizada a los programas de enseñanza de matemáticas, así como a los libros de texto de matemáticas de nivel básico hasta la universidad en nuestro país, concebidos como los medios fundamentales que norman el discurso del profesor y los estudiantes durante las interacciones que se desarrollan en el salón de clases. Los textos de matemáticas que se revisaron de la escuela básica fueron los que se distribuyeron por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en el ciclo escolar 2003-2004. Los libros de matemáticas de secundaria que se revisaron corresponden a una de las colecciones que distribuyó la SEP en 2008. El libro de texto que se revisó para el análisis del área en la Geometría en los niveles medio y superior fue el de Landaverde (1995), utilizado por algunos sistemas educativos, en estos niveles de enseñanza. La representación de la integral definida a la que hacemos referencia en este escrito es la que se presenta en el libro: *Calculus. Cálculo infinitesimal* de Spivak, M. (1999), debido a la demanda de su uso (Cordero, 2003).

Representación del concepto de área e integral definida en la didáctica

El estudio del concepto de área inicia en la escuela básica y se extiende hasta la universidad. El tratamiento didáctico que sigue se va modificando, como resultado de la transposición del saber en la didáctica, que ordena la presentación de los conceptos de menor a mayor grado de complejidad o generalidad. Ello se evidencia en los programas de enseñanza y libros de texto de matemáticas, donde se institucionaliza la forma de organización y presentación de los saberes en la didáctica.

En la enseñanza básica –primaria y secundaria– el estudio de este concepto se articula alrededor de regiones planas limitadas por segmentos lineales, así como de formas circulares siempre cerradas, y por regiones referidas a superficies de cualquier volumen regular. En los niveles medio y superior, se asocia además, a funciones algebraicas⁴ de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > n$, $n \in \mathbb{Z}$ en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Todas estas funciones son continuas en dicho intervalo, por tanto diferenciables en el intervalo abierto. En nivel superior, se vincula también a las funciones trascendentes.

De manera que el orden de presentación en la didáctica de este concepto ocurre de la Geometría al Análisis. Ello implica un cambio en el lenguaje, la introducción de nuevos significados asociados a otros conceptos, del mismo modo, de los procedimientos que se llevan a cabo sobre los objetos matemáticos, y en las formas de representación en el plano cartesiano.

Lo que empezó para los estudiantes en la escuela básica con la medición de áreas sobre objetos geométricos, se extiende a partir del nivel medio superior al estudio de clases especiales de áreas, aquellas cuyos límites inferiores por la derecha y por la izquierda tienen forma de caja, limitadas por arriba, solo por una curva. La explicación de este tipo de representaciones está acotada por las concepciones, procedimientos y el contexto en que se presentan los objetos matemáticos. Las concepciones y los procedimientos están en estrecha conexión (Cordero, 2003).

a) Usos, contextos y procedimientos del área ligados a los objetos geométricos

Los programas de enseñanza de matemáticas indican que en la primaria el concepto de área se estudia alrededor de las formas geométricas y la medición⁵ y se enfoca al desarrollo de habilidades de medición, cálculo aritmético, comparación y estimación de áreas de figuras diversas. Las situaciones que organizan su explicación en los libros de texto se articulan a otros

4 Para el caso de la investigación de la que se deriva este trabajo, las funciones a las que se alude son las algebraicas.

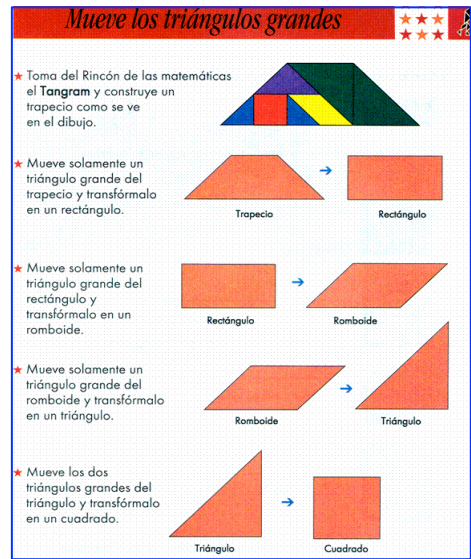
5 El análisis se basó en la reforma de 1993, debido a que en la reforma actual (2008), se siguen utilizando los libros de texto de segundo hasta quinto año (SEP, 1993). En la reciente reforma, se atiende a competencias matemáticas.

conceptos y significados de la matemática, y atraviesan los tres ciclos escolares⁶ en que se constituye la enseñanza elemental –la primaria–. Su estudio es graduado en percepción, atendiendo a los propósitos de los contenidos de enseñanza. Las situaciones iniciales por ejemplo, están basadas en la manipulación de material tangible –tangram y geoplano–, como un medio para aproximar a los estudiantes a este concepto. Se sigue el trabajo con unidades de medida de área arbitraria, para institucionalizar la unidad cuadrada, y de esa manera dar paso al establecimiento de fórmulas básicas a fin de calcular áreas de polígonos regulares, a la que se suma la fórmula para calcular el área del círculo, y las referidas a superficies de cierto tipo de volúmenes regulares. El trabajo sobre material tangible se observa a través de los tres ciclos de enseñanza, aunque a un nivel de uso menor que en el primero.

La exploración a los libros de matemáticas de primaria revela seis formas de uso del área: *se utiliza para comparar, conservar, medir, estimar, calcular y representar superficies*. Estos usos se ponen en funcionamiento a través de diversas acciones o procedimientos que se llevan a cabo sobre los objetos geométricos, tales como: transformaciones como planos, trazos, aproximación de valores, conteo de unidades de área, asociación de cantidades y fórmulas. Un resultado que se deriva de alguna de estas acciones es que las *formas*, los *tamaños* o las *posiciones relativas* de las figuras geométricas pueden cambiar. Ello depende del propósito de la situación.

⁶ El nivel de enseñanza elemental (primaria) se constituye de tres ciclos: primer ciclo por primero y segundo año, segundo ciclo por tercero y cuarto, y; tercer ciclo por quinto y sexto año.

La actividad propuesta en la lección 110 del libro de matemáticas de segundo grado de primaria “*Mueve los triángulos grandes*” (ver figura 1.), evidencia usos del área en el discurso matemático escolar. En ella se ubica a los estudiantes a descomponer y recomponer el tangram a fin de que construyan los polígonos que se indican. Las acciones que llevan a cabo los estudiantes se organizan alrededor de la conservación del área. Es decir se les sitúa a que usen el área de una superficie representada por medio del tangram, para que sea conservada. El resultado es que obtienen una figura de *forma diferente* y en una *posición relativa distinta* a la original, sin que la medida del área cambie. Es decir, *se conserva*. La comparación y la representación de áreas son dos *usos* que emergen en esta actividad. El primero resulta de explorar visualmente o por medio del tacto, las *formas*, los *tamaños* y las *posiciones relativas* de las figuras. La representación como uso se presenta en dos momentos, en la situación inicial y en la final.



La intención didáctica que se percibe en este tipo de situaciones, es que previo a que los estudiantes midan, apoyados con unidades de medida y a que determinen áreas apoyados en el uso de fórmulas, deberán explorar cualidades de diversas superficies, con el propósito de que reconozcan atributos con relación a la *forma*, *tamaño* y *posición relativa* de los objetos geométricos. A su vez, que identifiquen patrones. El reconocimiento de estos atributos se sustenta en la visualización y el tacto, resultado de la manipulación de objetos tangibles o de los trazos ejecutados una vez que trabajan sobre retículas. Las acciones que se espera lleven a cabo los estudiantes al manipular material concreto son: recortar, pegar, armar, relacionar, repartir, ubicar o unir superficies. Las relativas al trabajo sobre la retícula son: superponer y reproducir figuras, pintar, copiar, dibujar y unir puntos. En ambos casos, se apoyan de sus manos u otras partes de su cuerpo. Posterior a ello, aparecen usos como la estimación, medición, cálculo aritmético y representación de regiones de áreas que cambian de forma en superficie o de

posición o de tamaño bien su combinación. El cálculo de áreas se sitúa alrededor de las fórmulas, que se construyen de manera empírica a partir de cuarto grado de primaria. Se inicia con la fórmula para calcular el área del rectángulo, se sigue la del triángulo, el cuadrado y así sucesivamente. El contexto en que se presenta tales usos es en el estático. Estos usos a su vez, se conectan a otros conceptos y significados de la matemática, ejemplo de ello son: el significado de la multiplicación, el de los números fraccionarios y decimales, los histogramas de frecuencia y la mediana.

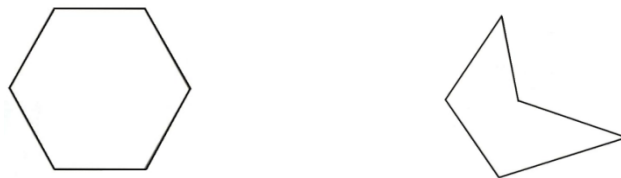
En el nivel de enseñanza secundaria el concepto de área es parte de los contenidos del eje denominado *Forma, espacio y medida*, uno de los tres ejes en que se organizan los contenidos matemáticos⁷. Se pretende que los estudiantes desarrollen competencias argumentativas, como resultado del análisis de trazos ejecutados en algunas transformaciones y con las relaciones de congruencia y semejanza. Su estudio gira alrededor de la geometría y la medición. Del mismo modo que en la primaria, se desarrolla mediante actividades que se articulan a otros conceptos y significados de la matemática, así como de otras áreas de las ciencias, en su conexión con el resto de los ejes temáticos. Las primeras actividades referidas al área tienen que ver con la reconstrucción de fórmulas básicas para el cálculo de áreas de las figuras geométricas ya estudiadas en la primaria, sin el uso de cuadrícula. En razón de que hay un cambio en el lenguaje matemático en secundaria, las situaciones de enseñanza previas al trabajo formal con el área y otros conceptos, se orientan a explicar en lenguaje natural, el significado de algunas fórmulas geométricas y otros objetos matemáticos, a fin de interpretar las letras (literales) como números generales con los que sea posible operar posteriormente. Este cambio se da por el hecho de que la matemática en este nivel se estudia en conexión estrecha con el álgebra, a su vez, mediante el análisis de relaciones entre lados y ángulos de los polígonos semejantes y congruentes.

⁷ Los contenidos de matemáticas en secundaria están organizados alrededor de tres ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida, y; Manejo de la información..*

Los programas de enseñanza así como los libros de texto de matemáticas, evidencian que el área se estudia sobre los mismos seis tipos de usos caracterizados previamente. Con la salvedad de que hay una extensión en los procedimientos que se llevan a cabo, un cambio en el lenguaje, en el tipo de situaciones y en la forma de abordar a los objetos geométricos. Los procedimientos ligados a tales usos son: las transformaciones en el plano, aproximación de valores, conteo de unidades de área, trabajo con fórmulas, relaciones de congruencia y semejanza y el trabajo con ecuaciones. Estos usos se hallan ligados a otros contenidos de la matemática, tal es el caso de: los números fraccionarios y decimales, los procedimientos aritméticos, con la probabilidad y la estadística, y con el uso de literales y las ecuaciones algebraicas.

Una actividad propuesta en uno de los libros de matemáticas de primer año de secundaria distribuido por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en 2008, exhibe usos del área.

2. Transforma las siguientes figuras en otro polígono, pero que conserven sus áreas.
Explica el método que usaste.



En esta actividad, tomada de la sección *Ejercicios para consolidar los conocimientos del libro de Matemáticas 1^º* pág. 109, los alumnos son requeridos para que transformen dos polígonos –uno convexo y otro no convexo–, con la condición de que la medida del área se conserve. En el proceso de solución podrán aparecer diversos procedimientos, que estarán sujetos a los conocimientos matemáticos que pongan en juego. Algunos podrían estar asociados a acciones

⁸ Cantoral, R., Farfán, R.M., Montiel, G., Lezama, J., Molina, G., Cabañas, G., Castañeda, A., Sánchez, M. y Martínez-Sierra, G. (2008). *Matemáticas 1. Libro de matemáticas para secundaria*.

como descomponer y recomponer las figuras o apoyarse en los movimientos o bien en las relaciones de paralelismo. En esta actividad nuevamente aparecen la conservación, la comparación y la representación de áreas a manera de uso. En el entendido que la conservación del área en la situación arriba descrita, aparecerá como actividad, como noción y como uso.

En secundaria este concepto se localiza además, en las relaciones de congruencia y semejanza de triángulos, asimismo con los teoremas de Tales y de Pitágoras. En el estudio del teorema de Pitágoras, se invita a los profesores de matemáticas –en los programas de enseñanza– para que contribuyan a que los estudiantes conozcan las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. La intención es que logren un manejo adecuado de la fórmula que expresa esa relación. Es decir, se orienta al trabajo algorítmico. En la explicación de este teorema, el área se *usa para conservar, comparar, representar y calcular* la superficie que conforma el cuadrado bajo el cual se estudia. Para el caso de las relaciones de congruencia y semejanza, aun cuando los usos que aparecen del área son la comparación y representación de áreas (la conservación es otro uso que se asocia a las relaciones de congruencia), las explicaciones atienden más bien, a explorar los lados y ángulos de las figuras.

En los niveles de enseñanza medio y superior, el estudio del área se incorpora tanto a la Geometría como a los principios del Análisis Matemático. En Geometría, se halla ligado a los procesos deductivos, tal es el caso de las relaciones de semejanza y de congruencia, los teoremas de Tales y de Pitágoras, temas que se estudian con mayor profundidad que en secundaria. También se halla en torno a la Geometría Analítica, donde se determinan áreas de polígonos mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra, en un determinado sistema de coordenadas.

En bachillerato y en la universidad, el área se usa para *comparar, conservar, medir, estimar, calcular y representar superficies*. Con la salvedad de que la conservación del área como uso en la didáctica se circunscribe únicamente a situaciones referidas a la Geometría Euclidiana, especialmente en el estudio del teorema de Pitágoras y las relaciones de congruencia. La

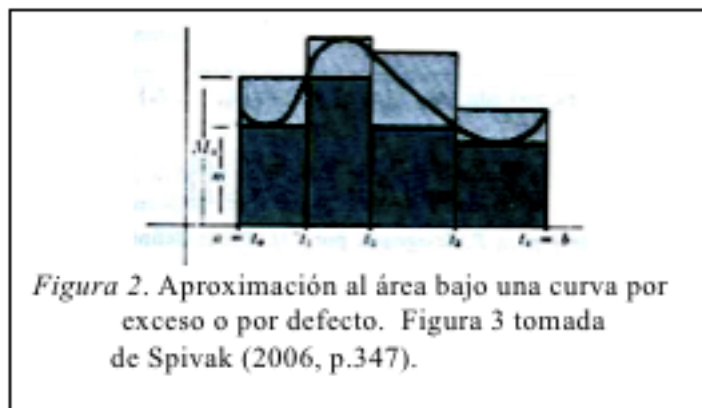
estimación de área por su parte, se localiza sólo en el Análisis, al momento en que se explica el área como integral.

b) Usos, contextos y procedimientos del área ligados a la integral definida

En el discurso matemático escolar los procesos de integración son tratados en el último año de la enseñanza media y en el primero de la enseñanza superior, a partir de dos vertientes: la integral indefinida y la integral definida. El concepto de integral definida se asocia a expresiones simbólicas y representaciones geométricas. Las formas más usuales de concebir estas representaciones son: la integral como la operación inversa de la derivada y la integral como el método de determinación del área bajo una curva para funciones continuas, sobre intervalos cerrados. Una representación geométrica del concepto de integral cuando la función es positiva, es aquella del área bajo una curva, donde el símbolo \int expresa el valor de dicha área. Su explicación se basa en una particular utilización del concepto de límite.

En Spivak (2006) la formulación de la integral definida es una interpretación de la integral de Riemman en términos conjuntistas, en la que se sustituye el proceso de convergencia por propiedades de conjuntos cerrados en un campo ordenado y completo, el ínfimo y el supremo. La definición de integral indica cómo hallar la integral de f en $[a,b]$, cuando f es integrable, sin que se conozca cuáles funciones son integrables (Cordero, 2003). No obstante, Spivak enuncia dos teoremas, que concibe fundamentales en ese proceso.

La explicación asociada a la presentación que Spivak hace de la integral, se realiza a través de la división del intervalo de integración $[a,b]$ en subintervalos a fin de determinar un valor aproximado del área representada por debajo de la gráfica de la curva que se encuentra por encima del eje de las x (ver figura 2). Se construyen rectángulos que cubran la región, ya sea por encima o por debajo, contruidos como en la figura 2. El valor aproximado del área se obtiene así, a partir de la suma de las áreas de los rectángulos contruidos. El cálculo del área de estos rectángulos utiliza la fórmula elemental “base por altura”.



A fin de presentar a la integral, Spivak requiere definir: partición de un intervalo y suma inferior y superior (para mayor detalle, véase Spivak, 2006). Una vez que define a la integral, Spivak discurre acerca de las condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad para dar paso a la demostración del teorema fundamental del Cálculo, para finalmente precisar sobre el tipo de discontinuidades de una función derivada (Cordero, 2003). La integral definida en Spivak (2006) se presenta en el contexto del teorema fundamental del Cálculo y se relaciona con la definición de integral según el concepto de función y el concepto de primitiva a partir de la definición de integral. Estos aspectos señalan al objeto *función* y al objeto *analítico* como los puntos nodales de las diferentes presentaciones de la integral (Cordero, 2003). Los usos del área aparecen en el proceso de definición de la integral en Spivak son: la estimación, comparación, representación, medición y cálculo de áreas.

Consideraciones finales

El estudio del área inicia en la enseñanza básica con la Geometría y la medición –sobre objetos geométricos–, y se extiende a la matemática que se enseña en los niveles de enseñanza medio y superior sobre otro tipo de objetos, las funciones, que se introducen en los cursos de Cálculo (o principios del Análisis). Su estudio se presenta a niveles perceptivos graduados, hasta establecer su definición formal mediante la integral definida. El lenguaje, los procedimientos y las formas de representación de los objetos cambian conforme evoluciona su explicación. En un primer momento se ubica a los estudiantes a trabajar sobre material tangible –nivel básico–, a fin de

que perciban cualidades de las figuras con relación a las *formas, tamaños y posiciones relativas*, se sigue el uso de cuadrícula, seguidamente se establece el trabajo con algoritmos, que va desde fórmulas básicas hasta el trabajo con integrales. Estas últimas, se introducen a partir del nivel medio superior. En Geometría, este concepto se estudia alrededor de los objetos geométricos. Se circunscribe a regiones planas limitadas por segmentos lineales y de formas circulares siempre cerradas, y por regiones referidas a superficies de cualquier volumen regular. En los niveles medio y superior, se asocia además, a funciones algebraicas de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > n$, $n \in \mathbb{Z}$ en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Todas estas funciones son continuas en dicho intervalo, por tanto diferenciables en el intervalo abierto. En nivel superior, se articula también a las funciones trascendentes.

Se identifican seis usos del área en la didáctica matemática: *se utiliza para medir, comparar, conservar, estimar, calcular y representar superficies*. Sin embargo, se observa una interrupción de estos usos tanto en su recorrido por la Geometría y la medición, como por el Análisis. Ejemplo de ello es que en el estudio del área como integral, la conservación del área está ausente en el proceso de definición, debidos a su explicación, que consiste de procesos de aproximación. Aunque también se observó que el uso de la conservación del área se omite posterior a la explicación de la integral, aun cuando subyace en algunas transformaciones analíticas, tal es el caso del método de cambio de variable.

En la representación de la integral definida en el discurso matemático escolar, su estudio obvia la exploración de relaciones entre los diferentes usos del área y de los significados asociados, al centrarse en aspectos formales y privilegiar el tratamiento algorítmico. Un resultado es que no se contribuye a estabilizar el concepto de área entre los estudiantes, o en el mejor de los casos, a que logren establecer una conexión adecuada entre ambos conceptos. Otro aspecto tiene que ver con las elecciones didácticas, tanto en Geometría como en Análisis. En Geometría, generalmente están centradas sobre figuras regulares. En Análisis, una vez que se explica a la integral, se omite el que los estudiantes exploren relaciones entre diversos usos del área, a partir de determinadas transformaciones analíticas, lo que se constituye en un obstáculo didáctico.

La representación del concepto de área como integral definida y como objeto de la geometría en el discurso matemático escolar nos indica que su estudio no es un continuo, ya que aparecen rupturas en los usos del área tanto en su explicación como integral, como posterior a ello.

Referencias bibliográficas

Ávila, A., Balbuena, H. y Bollás, P. (1994). *Matemáticas. Cuarto grado* (4ª ed. rev.). México, Toluca, Estado de México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. y Castrejón, J. (1993). *Matemáticas. Tercer grado* (3ª ed.). México, Puebla, Puebla: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Fuenlabrada, I. R. y Waldegg, G. (2000). *Matemáticas. Quinto grado* (4ª ed. rev.). México, D.F.: SEP.

Balbuena, H., Block, D. F., Fuenlabrada, I. R. y Waldegg, G. (2001). *Matemáticas. Sexto grado*. México, D.F.: SEP.

Block, D. F., Carvajal, A. L., Fuenlabrada, I. R. y Martínez, N. P. (1993). *Matemáticas. Primer grado* (5ª ed.). México, D.F.: SEP.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2008). La conservación en el estudio del área. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp.196-226), 2ª. reimp. España: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Cantoral, R., Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Montiel, G., Lezama, J., Molina, G., Cabañas, G., Castañeda, A., Sánchez, M. y Martínez-Sierra, G. (2008). *Matemáticas 1. Libro de matemáticas para secundaria*.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De León, H. J., Fuenlabrada, I. R., González, N. R., Guzmán, M., Martiradoni, Z. y Ortega, J. L. (1994). *Matemáticas. Segundo grado* (4ª ed. rev.). México, D.F.: SEP.

Landaverde, F.J. (1995). *Curso de Geometría*. México: Progreso.

Spivak, M. (2006). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté