LA TECNOLOGÍA COMO INSTRUMENTO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO EN LA GEOMETRÍA: EL CASO DEL TEOREMA

Luis Campistrous, Jorge López, Celia Rizo

celrizo@yahoo.com.mx, jorgemar.lopez@gmail.com

Resumen

En este trabajo reportamos avances de una línea de investigación teórica que los autores vienen desarrollando desde hace 10 años sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática y su utilización para contribuir al desarrollo del pensamiento en los estudiantes. Una de las aristas fundamentales de esta línea ha sido el desarrollo de situaciones de aprendizaje que promueven la experimentación y la búsqueda y conducen a la formulación y comprobación de conjeturas, fundamentalmente en Geometría mediante la utilización de software de Geometría Dinámica. Los resultados discutidos en estos trabajos han sido trabajados en cursos para maestros y el curso en línea sobre Geometría de uno de los autores. (Lopez López, J., Hernández, O. (2009)

Palabras clave

Geometría dinámica, Tecnología, Situaciones de aprendizaje, Teorema de Ceva.

Introducción

Las investigaciones de corte teórico, desarrolladas por los autores desde hace 10 años sobre el uso de la **tecnología** en la enseñanza de la Matemática y su utilización para contribuir al desarrollo del pensamiento en los estudiantes, se sustentan, en el plano didáctico, en el **enfoque histórico-cultural** cuya tesis principal para el trabajo en el aula es que los conocimientos son más sólidos y duraderos si son elaborados por el alumno bajo la dirección del maestro y en interacción con sus pares.

En este enfoque es útil el empleo de las **situaciones de aprendizaje** que promueven la experimentación y la búsqueda y conducen a la formulación y comprobación de conjeturas, fundamentalmente en Geometría mediante la utilización de software de Geometría Dinámica. Los resultados teóricos discutidos en estos trabajos han sido trabajados en cursos para maestros cubanos y dominicanos[1] y en el curso en línea[2] sobre Geometría de uno de los autores.(Lopez López, J., Hernández, O. (2009). En el caso de Cuba y Dominicana, se ha experimentado el uso compartido de la tecnología, en Cuba motivada por las posiciones vigotskianas que asumimos y en Dominicana se inició con una para cada alumno y en el desarrollo del curso se fueron dando de baja los equipos, y se ensayó por parejas y fue muy ventajoso el cambio. Desde el punto de vista cualitativo, las evidencias de lo antes realizado sugieren que los resultados pueden ser mejores cuando los alumnos trabajan en cooperación y discuten la resolución de los problemas planteados. En este caso se trata de la investigación de los puntos de Ceva en un triángulo y la generalización de su comportamiento en condiciones de dinamismo.

Antecedentes y metodología

El teorema de Ceva establece condiciones para la concurrencia de cevianas en un triángulo, este problema de la concurrencia de líneas es relativamente tardío en la Geometría; efectivamente la Geometría comienza por el estudio de problemas relacionados con la vida práctica de las comunidades primitivas, según Heath, T. (1981):

"Herodoto dice que Sesostris (Ramses II, alrededor de 1300 AC) distribuyó las tierras entre todos los egipcios en parcelas rectangulares iguales, sobre las que cobraba un impuesto anual; cuando el río arrastraba una porción de la parcela y el dueño pedía una reducción correspondiente de los impuestos, había que enviar inspectores para certificar cuál había sido la reducción en el área".

[1] En Cuba en cursos en actividades programadas de superación interna para docentes cubanos de matemática en preuniversitario y formadores de docentes de matemática de nivel medio superior y en República Dominicana en una maestría en Didáctica de la Matemática en el 2005 que los autores impartieron. Se usó Calculadora Voyage 200 de la Texas, donadas por la Universidad de Puerto Rico, y los programas Geometer's SketchPad, el Cabri Geometry.

[2] Ver en http://geometrygate.blogspot.com/ su implementación y desarrollo.

El curso en línea de Geometría Dinámica II, ha sido diseñado para estudiantes de la Facultad de Educación en Puerto Rico con aspiraciones de especialización en el área de la enseñanza de la matemática. En este curso se estudiarán programas de computadoras que crean ambientes artificiales de exploración geométrica, tales como el Geometer's SketchPad, el Cabri Geometry y el GeoGebra.). No está diseñado para el uso cooperativo, pero no niega esa posibilidad.

En consecuencia, cuando la Geometría se convierte en una ciencia deductiva en manos de los pensadores griegos, en especial Euclides de Alejandría, los problemas son fundamentalmente aquellos que se refieren al aspecto cuantitativo de la ciencia geométrica, sin tomar en consideración los problemas relativos a la posición, la colinealidad o la concurrencia.

No es hasta el siglo I DC que aparece el estudio de condiciones para la alineación de tres puntos en el Teorema de Menelao.[3] No obstante, este teorema permanece olvidado hasta que en el siglo XVII es redescubierto por Giovanni Ceva que lo publica conjuntamente con su teorema que aporta condiciones para la concurrencia de segmentos en un triángulo, es en este teorema que se plantea por primera vez un teorema sobre concurrencia de segmentos.

En efecto, los teoremas sobre puntos notables (incentro y circuncentro) que aparecen en Euclides (Proposiciones 4 y 5 del libro 4) no tienen por objetivo el estudio de la concurrencia de las líneas sino la existencia de las circunferencias correspondientes, ya que las demostraciones terminan sin destacar que los tres segmentos concurren (D.E. Joyce, 1996). Según el anterior autor, con la aparición del teorema de Ceva y su recíproco se abre el camino para el estudio de numerosos centros del triángulo, aunque en la Geometría Escolar este tema permanece ignorado todavía. No es hasta principios del siglo XX que aparece como un tema en los cursos de "Geometría Moderna" que comienzan a introducirse en las Universidades. Shively, L. (1984)

El nombre "Geometría Moderna" o "Geometría Superior", que usualmente se da a estos cursos, es una manifestación de la intención explicita de introducir el estudio de aquellos capítulos de la Geometría que no están contenidos en Euclides, y que representan una actitud más amplia en la que no se reduce el estudio a los aspectos cuantitativos y se hace espacio al estudio de problemas como los de colinealidad y concurrencia.

[3] "Toda transversal que corta a los tres lados (o sus prolongaciones) de un triángulo determina 6 segmentos tales que: la razón formada por el producto de 3 de ellos sin extremos comunes, con el producto de los otros 3, es igual a la unidad".

En la década de los años 80 aparece un recurso que habría de revolucionar el estudio y la didáctica de la Geometría, se trata de los softwares geométricos (Cinderella, Cabrí, Sketchpad) que permiten introducir el dinamismo en las figuras geométricas y estudiar lo que ocurre cuando ciertas partes cambian de posición o de forma.

Estas posibilidades de movilidad favorecen la consideración de los puntos notables clásicos del triángulo bajo una nueva perspectiva y aparecen publicaciones y páginas web dedicadas al estudio de los mismos haciendo uso de los recursos dinámicos[4]. Sin embargo, en la mayoría de los casos el dinamismo se utiliza como una herramienta en manos del profesor para ilustrar o dirigir una conversación socrática; incluso en la versión digital de los Elementos de Euclides que citamos en este trabajo, las figuras poseen dinamismo pero el lector sólo comprueba lo que ya está dicho, no tiene posibilidad de explorar y analizar así como de conjeturar y verificar sus conjeturas. Sin embargo, la tecnología puede y debe jugar un papel diferente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Según Moreno Armella (2002 a), los medios computacionales conducen a una redefinición de las fronteras entre la acción individual y la acción social el estudiante ya que este, auxiliado de sus instrumentos computacionales, construye una versión del conocimiento mediante la intervención permanente del profesor quien a través de sus propuestas conduce al estudiante a una nueva construcción del esquema cognitivo que subyace a su construcción. Esto significa, entre otras cosas, que las herramientas computacionales son instrumentos de mediación que contribuyen a la elaboración individual de los conocimientos por los alumnos. No obstante, en esta elaboración, es esencial que este proceso se realice bajo la dirección del profesor que prepara el ambiente en el que debe trabajar y explorar el alumno, según las exigencias cognitivas de los conceptos en juego y las características del grupo con el cual trabaja, dándoles, como hemos mencionado antes, la posibilidad de interactuar en pequeños grupos y tomar decisiones compartidas.

[4] Ver por ejemplo Ortega, A. Viñas, M 2005, Campistrous, L. y López, J. 2006 y http://www.ite.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/contenido.htm consultada el día 8 de Octubre de 2009.

Este papel de mediación de las herramientas computacionales, es de suma importancia para la cognición y tomando en cuenta el amplio alcance que damos al término tecnología, (ver Campistrous, L.; Rizo, C., 2008), se refiere no sólo a las computadoras y supercalculadoras sino también al papel cuadriculado, los geoplanos con ligas, los geoplanos electrónicos y los applets) es algo que ha estado presente a lo largo de la historia pues como dice en la introducción a su libro Oralidad y Escritura, W. Ong (1999, p.11): "Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento dentro de la ciencia... se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana".

En el caso de las herramientas de mediación a que estamos haciendo referencia podemos distinguir dos etapas en su utilización en la elaboración del conocimiento matemático escolar: en una primera etapa la herramienta de mediación no modifica sino complementa el pensamiento del estudiante, es una herramienta pues su aporte es externo al pensamiento del estudiante; con el uso se puede llegar a una segunda etapa en la que llega a modificar las estrategias de resolución de problemas, a producir cambios en la manera misma de plantear el problema. En esta etapa, según Moreno Armella, L. (2002), la tecnología genera cambios en la forma de pensar del estudiante, la herramienta se ha tornado en un instrumento (en sentido Vigotskiano) matemático del estudiante.

Como se define en Campistrous, L.; Rizo, C. (2008) "Las situaciones de aprendizaje, … son actividades de exploración para el alumno, que en el caso de la geometría se concretan en un sistema de tareas sobre figuras geométricas, que representan una situación lo suficientemente abierta para no inhibir la búsqueda por parte del mismo, y en la que es posible realizar transformaciones con el fin de explorar cómo cambian dichas figuras y sus propiedades y que les permite analizar el nuevo objeto de aprendizaje." Dichas situaciones favorecen en los alumnos las actividades de exploración y búsqueda de nuevas propiedades de las figuras dadas, convirtiéndose su proceso de aprendizaje en una actividad rica en experiencias personales, que deben ser socializadas en el grupo. Es importante destacar que cuando se habla de las situaciones de aprendizaje con el uso de la tecnología, Campistrous, L.; Rizo, C. (2007) se refieren a una concepción que abarca desde los primeros grados de la escuela primaria hasta la educación media superior y la superior.

En esta concepción se consideran tres momentos para el trabajo con la Geometría Dinámica en la escuela:

- Un primer momento preparatoria para las edades de 6-7 años que se puede comenzar desde el preescolar, donde se inicia lo que hemos denominado **trabajo intuitivo operativo** con figuras geométricas elementales, en el que el alumno **mediante percepción** (la vista y el tacto fundamentalmente). Es decir, mediante acciones primarias de identificación de conceptos, en la cual la manipulación de modelos concretos es la base fundamental de las acciones de aprendizaje, va incorporando a su primitivo sistema conceptual los nuevos conceptos geométricos y **los memoriza por percepción,** sin tener aun un conocimiento de las propiedades características.

En esta etapa se comienza con el papel cuadriculado (como la forma más elemental de la tecnología) y se llega al uso del geoplano clásico de ligas y al geoplano electrónico.

- Un segundo momento en el que los alumnos utilizan calculadoras y computadoras, pero el alumno se limita a manipular los applets que han sido diseñados por el maestro y en los que la estructura interna de la herramienta le permanece oculta, él no tiene que aprender a construir las representaciones.
- Un tercer momento en el que los alumnos ya utilizan las calculadoras y computadoras plenamente, es decir conocen la estructura interna del software y diseñan su exploración de acuerdo a la actividad de aprendizaje planteada.

En los artículos mencionados aparece la concepción de la línea de trabajo seguida y varios ejemplos de las situaciones de aprendizaje desde los grados iniciales de la escuela primaria hasta la educación media superior. En particular en Campistrous, L.; López, J. (2006) se discuten situaciones de aprendizaje que utilizan los puntos notables de un triángulo (centros del triángulo como diremos a menudo) y permiten a los alumnos explorar en situaciones dinámicas las trayectorias de dichos puntos, formular conjeturas sobre su naturaleza y verificar sus conjeturas.

Situaciones de aprendizaje: su concepción en el caso del Teorema de Ceva

En Campistrous, L.; López, J. (2006) se estudia, como dijimos antes, la trayectoria de los puntos notables clásicos cuando uno de los vértices recorre la circunferencia circunscrita; aquí hacemos una breve referencia a estas situaciones de aprendizaje para destacar su construcción y preparar el terreno para lo que haremos posteriormente.

Las situaciones de aprendizaje se desarrollan en este nivel construyendo lo que llamamos el **ambiente de exploración** que se describe solicitando al alumno que realice las construcciones y exploraciones, se incluyen además una serie de preguntas guías que orientan hacia el objetivo perseguido pero no sustituyen la libertad de búsqueda del alumno. La situación de exploración y las guías de exploración se realizan bajo la dirección del profesor y se discuten en el equipo de trabajo.

Caso 1: Baricentro

En este caso retomamos la situación con todos sus elementos pero resumiendo; la estructura y concepción se conserva en las restantes situaciones a las que sólo haremos breves referencias. En todos los caso la discusión completa está en la referencia mencionada.

Ambiente de exploración

Construye una circunferencia e inscribe en ella un triángulo de modo que los vértices puedan moverse libremente sobre la circunferencia.

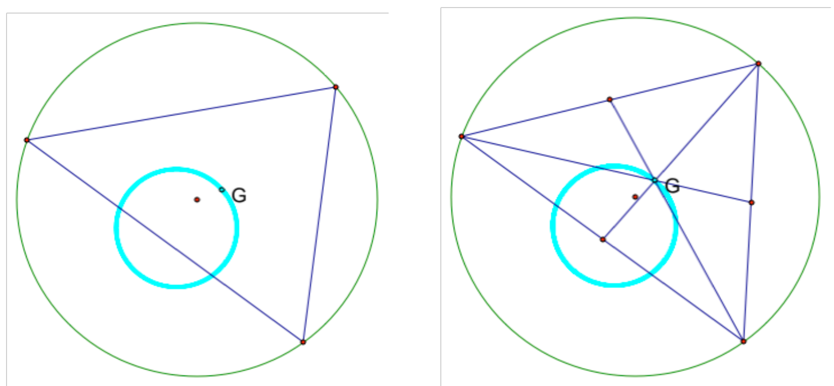
Construye el baricentro del triángulo. ¿Qué ocurre con el baricentro si los vértices cambian de posición?

Marca el baricentro de tal modo que deje su traza al moverse. Observa la traza cuando uno de los vértices se mueve sobre la circunferencia.

Conjetura cuál será la traza si uno de los vértices recorre la circunferencia completa.

Realiza el movimiento y comprueba tu conjetura.

Analiza la relación entre la traza obtenida y la circunferencia sobre la cual se realiza el movimiento. Explora. ¿Hay algún punto invariante? ¿Cuál transformación es posible? ¿Qué relación existe entre la posible existencia de un punto invariante y la forma de determinar el baricentro?



a) Figura 1 b)

a figura 1 ilustra la traza obtenida y una situación de exploración que permite conjeturar y demostrar que la circunferencia obtenida es la imagen punto a punto de la circunferencia circunscrita por una homotecia de centro en el punto medio del lado que permanece fijo y razón 1/3.

Caso 2: Ortocentro

En esta situación se orienta de manera semejante la construcción y exploración con el ortocentro, a diferencia del caso anterior aquí la exploración apunta a que la imagen es una circunferencia congruente con la anterior pero que no se describe como imagen punto a punto de la circunscrita.

Por esta razón se incluyen en la guía preguntas que llaman la atención sobre los ángulos, se insiste en la posible existencia de puntos invariantes y cuál es la transformación posible.

La figura 2(a) y b)) ilustra la traza obtenida y una situación de exploración que permite conjeturar y demostrar que la imagen obtenida es una circunferencia pero que no se describe como la imagen homotética del vértice en movimiento, aunque es homotética con la circunferencia circunscrita pues todas las circunferencias son homotéticas entre sí. (En este caso los alumnos descubren que hay dos puntos invariantes (A y B) y, por tanto, la transformación posible es una simetría axial de eje AB, no una homotecia. Las consideraciones sobre los ángulos muestran que la imagen se compone de dos arcos capaces)

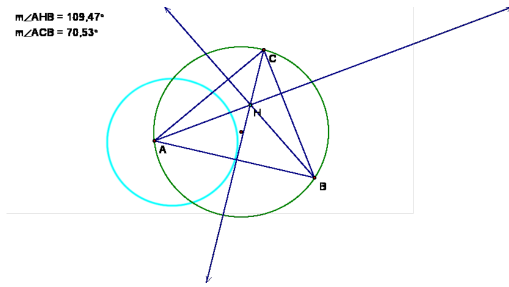


Figura 2a)

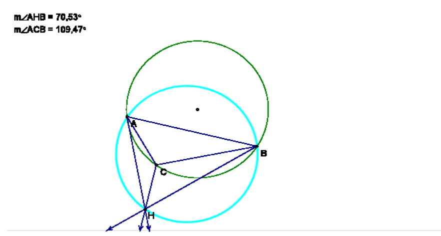
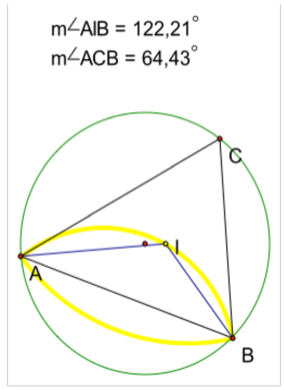


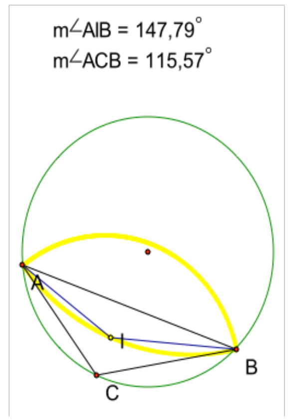
Figura 2b)

Caso 3: Incentro

De manera análoga se construye la situación de aprendizaje referida al incentro, al igual que con el ortocentro se llama la atención sobre los ángulos y sobre lo que ocurre al pasar por los puntos A y B. Aquí hay que añadir la pregunta sobre la existencia de una transformación.

La figura 3 ilustra la traza obtenida y una situación de exploración que permite a los alumnos conjeturar y demostrar que la imagen obtenida está formada por dos arcos de circunferencias diferentes que se obtienen mediante dos transformaciones diferentes ya que al pasar por los puntos A y B la transformación cambia.





Esta situación de aprendizaje puede ser explotada aún más, pero lo mostrado es suficiente para los objetivos perseguidos en esta presentación.

Caso 4: Punto de Gergonne

Ambiente de exploración

Construye una circunferencia e inscribe en ella un triángulo de modo que los vértices puedan moverse libremente sobre la circunferencia.

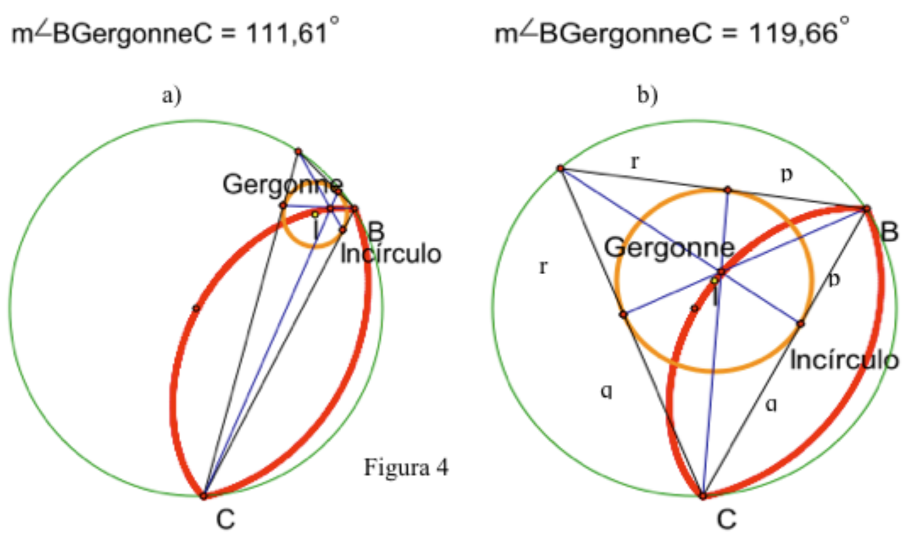


Figura 4

Construye el incírculo del triángulo y determina los puntos de tangencia con los lados. Traza los segmentos determinados por cada vértice y el punto de tangencia sobre el lado opuesto. ¿Qué sugiere la figura? ¿Puedes verificar tu conjetura? ¿Te es útil el Teorema de Ceva para la verificación? El punto cuya existencia has conjeturado se llama punto de Gergonne. ¿Qué ocurre con el punto de Gergonne si los vértices cambian de posición? (En esta parte de la actividad los alumnos llegan a conjeturar que las cevianas concurren en un punto y lo verifican utilizando el recíproco de Ceva, gracias al hecho conocido de que las tangentes trazadas de un punto a una circunferencia son iguales como ilustra la figura 4b)).

Marca el punto de Gergonne de tal modo que deje su traza al moverse. Observa la traza cuando uno de los vértices se mueve sobre la circunferencia.

Conjetura cuál será la traza si uno de los vértices recorre la circunferencia completa.
Realiza el movimiento y comprueba tu conjetura.

¿Será también en este caso la figura formada por arcos de circunferencia? Explora. ¿Qué ocurre con los ángulos? Formula una conjetura.

¿Puedes confirmar tus conjeturas?
En este caso la guía de observación de nuevo llama la atención sobre los ángulos y sobre la existencia de una transformación. La figura 4 ilustra la traza obtenida y una situación de exploración que permite conjeturar y demostrar que la imagen obtenida no está formada por arcos de circunferencia ya que los ángulos varían y que, además, al pasar por los puntos A y B cambia la transformación. Debido al objetivo perseguido, que se trabaja en el siguiente apartado, no se trata de determinar la curva que describe el punto de Gergonne.

Caso 5: el caso general

Las situaciones de aprendizaje introducidas en el apartado anterior ilustran la forma en la que los alumnos, bajo la dirección del profesor, pueden involucrarse en una actividad matemática creativa, pueden explorar aprovechando las ventajas del procesador geométrico y llegar a formular conjeturas e involucrarse en su demostración. Además pueden llegar a descubrir el papel de las demostraciones y su necesidad: asegurar la validez de una conjetura matemática.

Las limitaciones de espacio nos obligan a presentar sólo el esquema mínimo de las situaciones de aprendizaje, omitiendo las discusiones y las demostraciones, el lector interesado puede obtener una discusión completa de la mayoría de ellas en la bibliografía de los autores mencionada en el texto. No obstante hacerlo así refleja más fielmente la actividad del aula ya que los resultados no están dados, sino que se redescubren en la situación de aprendizaje, teniendo en cuenta que lo más importante no son los resultados en sí, sino los procesos de exploración, búsqueda, conjeturación y verificación. Además la actuación del profesor no se encamina a una conversación socrática (de preguntas y respuestas) en la que el profesor planifica las preguntas y el alumno se limita a responder, sino que se encamina a señalar preguntas abiertas que dejan en libertad de actuar y conjeturar a los alumnos.

De la misma forma esquemática y compacta presentamos la última actividad de aprendizaje a considerar. Con esta situación de aprendizaje los alumnos se involucran en una actividad que además de los procesos ya mencionados incluye también una generalización en sentido matemático. Esta actividad se presenta después de haber trabajado varias situaciones como las anteriores y requiere una mayor participación del profesor en la dirección de la actividad.

Ambiente de exploración:

Revisa las situaciones que se han trabajado anteriormente, ¿qué tienen en común los puntos investigados en ellas? ¿Se comportan igual todos los puntos de Ceva analizados cuando uno de los vértices del triángulo recorre la circunferencia circunscrita? ¿Puedes hacer alguna conjetura? Explora con un punto de Ceva general. ¿Puedes conjeturar ahora? (En esta parte de la actividad los alumnos, explorando con puntos de Ceva diferentes, llegan a conjeturar que en el caso general se obtiene siempre una circunferencia. Esto, en principio, resulta contradictorio con los resultados anteriores y condiciona para el resto de la exploración).

Traza una circunferencia e inscribe en ella un triángulo. Escoge puntos sobre los lados y traza las cevianas, ¿cuántos puntos puedes escoger libremente para que las cevianas sean concurrentes? ¿Cuál es la traza si uno de los vértices recorre la circunferencia circunscrita? ¿Qué ocurre si escoges otro vértice? ¿Si escoges el tercero? ¿Encuentras puntos invariantes? ¿Qué

transformación parece realizarse en cada caso? ¿Con cuál de los puntos clásicos encuentras coincidencia? ¿Qué hay de común entre ese punto y el que has considerado en el caso general? ¿Qué diferencia encuentras con respecto a los otros? Piensa en la forma en que se determinan los puntos sobre los lados! Formula una conjetura sobre las condiciones para que el punto de Ceva describa una figura homotética de la circunferencia circunscrita. Demuestra tu conjetura. Utiliza el Teorema de Ceva! (En esta parte los alumnos llegan a conjeturar que se obtiene una circunferencia homotética y que la razón y centro de homotecia varían al cambiar el vértice, siendo el centro el pie del punto de Ceva sobre el lado fijo. Utilizando el recíproco del teorema de Ceva llegan a determinar la razón de homotecia para cada vértice. También reconocen la analogía con el baricentro y que en efecto es un caso especial. Finalmente con estos resultados llegan a conjeturar que una condición suficiente para obtener que el punto de Ceva describa una imagen "por homotecia", punto a punto de la circunferencia circunscrita es que las razones que determinan los pies de los puntos de Ceva sobre los lados del triángulo sean invariantes. Al llamar la atención sobre los puntos clásicos se esclarece la aparente contradicción, pues el único que determina razones invariantes es el baricentro, en el que las razones son todas iguales a ½).
En la figura 5 se han representado los resultados de mover cada uno de los vértices.

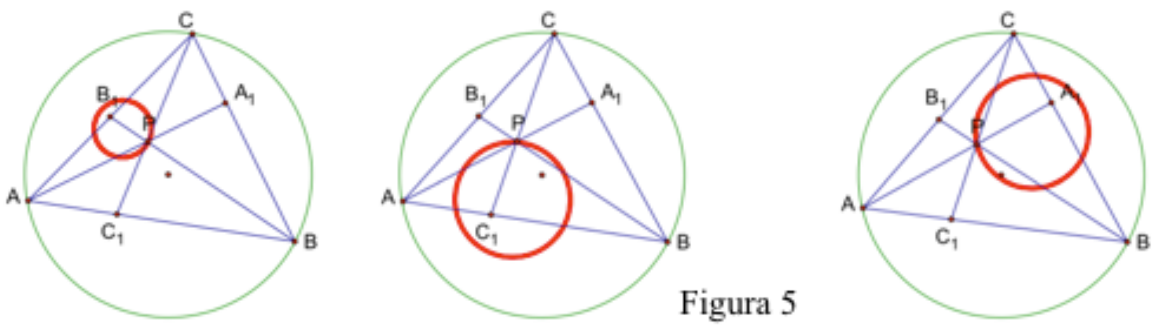


Figura 5

Conclusiones

Como reflexiones teóricas finales, sobre la base de la experiencia en el uso de la tecnología en la escuela, es necesario destacar que el inusitado desarrollo tecnológico que se ha producido en los últimos años, y el que se va a producir en el futuro, ha generado y generará una serie de cambios en la concepción teórica misma de lo que es el aprendizaje y de cómo este se produce, que en el caso de la matemática puede impactar a toda su concepción didáctica actual.

Estos cambios podrían tener influencias positivas y también negativas si no se prevén y se investiga seriamente en esa dirección. En este sentido estas influencias pueden producirse en **las mismas bases de la concepción filosófica y psicopedagógica** que sustentan las posiciones pedagógicas, en especial las que se sustentan en el enfoque histórico cultural, y también en **la didáctica específica** de la matemática.

En el caso del trabajo que se ha presentado se evidencia cómo el uso de la tecnología permite modificar la forma en que se ha trabajado históricamente la Geometría y convertirla en una actividad en la que los alumnos (bajo la dirección del profesor, en una etapa inicial, y con mayor independencia en la medida que se avanza en esta forma de dirigir el proceso) realizan pequeñas investigaciones de naturaleza matemática y, además de aprender de forma más sólida y duradera, desarrollan su pensamiento matemático.

En este caso, se han puesto de relieve líneas fundamentales en las cuales la tecnología puede contribuir al desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos: el cambio en la forma de dirigir el proceso de aprendizaje con un énfasis hacia los significados, los problemas abiertos mediante las denominadas situaciones de aprendizajes, la resolución de problemas y la utilización de la tecnología como una herramienta heurística, la posibilidad de plantear procesos de búsqueda y formulación de conjeturas y, en conclusión, **la transformación de la Geometría escolar en Geometría dinámica.**

Bibliografía

Arsalan Wares (2004) Conjectures and proofs in a dynamic geometry environment. Int. *J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 35, No. 1, 1–10*

Campistrous, L.; López, J. (2001) La calculadora como una herramienta heurística. *Revista UNO Didáctica de la matemática Nº 28 (2001)*: 84-99

Campistrous, L.; López, J. (2006) Geometría dinámica. *Publicaciones CRAIM*. Universidad de Puerto Rico.

Campistrous, L.; Rizo, C. (2007) Geometría dinámica en la escuela ¿mito o realidad? *Revista UNO Didáctica de la Matemática* Nº. 45, 2007, 61-79

Campistrous, L.; Rizo, C. (2008) Una didáctica para el tratamiento de las situaciones de aprendizaje de Geometría con enfoque dinámico en la escuela. *Revista UNO Didáctica de la Matemática Nº 49*, (2008): 73-86

D.E. Joyce (1996) *Euclid´s Elements.* Obtenido el 12 de junio de 2005 de http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. 12/06/05. (Copyright 1996, 1997,1998. D. E. Joyce. Dep.de Matemática y Computación. Clark University).

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html Consultado por última vez el 8 de Octubre de 2009.

Legendre, A.M, (1807) *Elementos de Geometría con notas*. Imprenta de Repulles. Madrid. Traducido por Gilman, A. Martin, I. (2002) *Geometría Universitaria*. Thomson Learning. México.

López, J., Hernández, O. (2009) *Geometría Dinámica II* (Mate 8980).

http://geometrygate.blogspot.com/ consultado por última vez Octubre 8 de 2009

Moreno Armella, L. (2002a) "Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización, capítulo 1 del libro "*Memorias del Seminario Nacional de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*", Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2002. http://www.eduteka.org/pdfdir/MENTechMath1B.php

http://www.mineducacion.gov.co/documentos/alldocs.asp?it=87&s=1&id=29

Moreno Armella, L. (2002b) Instrumentos matemáticos computacionales, MEN 2002. *Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas (2002).* Serie Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana.

Ortega, A.; Viñas, M. (2005) *Una experiencia docente en torno a la geometría del triángulo con cabri. Informe de investigación.* Obtenido el 20 de noviembre del 2008 de http://ares.unimet.edu.ve/academic/investigaciones/TIC/496.doc

Ong, W. (1999). *Oralidad y Escritura, Tecnologías de la Palabra*. Fondo de Cultura Económica, México.

Shively, L. (1984) *Geometría Moderna*. Editorial Continental. México.