

APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE FRACCIONES QUE DESARROLLAN LOS MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN



Marcela Iveth Carrillo Pérez y Marta Elena Valdemoros Álvarez

marcecarrillo08@yahoo.com.mx, mvaldemo@civestav.mx

CINVESTAV

Resumen

El presente documento es un escrito de avance de investigación relativo al aprendizaje y enseñanza de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición en maestros en formación del tercer semestre de la licenciatura en Educación Primaria impartida en la Escuela Normal de la Ciudad de México, puesto que estos mecanismos son la base de adquisición de todo el conocimiento relativo a las fracciones. El método diseñado para esta investigación consta de dos cuestionarios aplicados en momentos distintos (Fase 1 y Fase 2), observación participante en las clases impartidas para y por los maestros en formación y, por último, entrevistas, teniendo como propósito elaborar estudio de casos. Cabe mencionar que dicha investigación aún está en proceso, por lo que sólo presentamos algunos resultados del cuestionario de la Fase 1, relacionados a los procesos de partición realizados por los maestros en formación.

Palabras Clave

maestros en formación, fracciones, equivalencia y partición.

Introducción

Comúnmente, la palabra fracción está relacionada con dividir un entero en partes iguales, pero su concepto va más allá de esta interpretación dado que tras muchos estudios de investigación se han identificado diversos significados.

En nuestro **Marco Teórico** recuperamos a Freudenthal (1983), para quien las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional, el cual tiene tres distintos significados importantes, uno de ellos es la fracción como **fracturador** (dividir en partes) lo que puede ser reversible, irreversible o meramente simbólico. Otro significado desarrollado por Freudenthal es de **comparador** que está relacionado a la fracción como medida y por último, el significado de **operador** que permite contraer o dilatar una cuantificación inicial.

Kieren (1983), puntualiza que las fracciones están constituidas por cuatro constructos elementales: **medida, cociente, razón, operador** y un quinto constructo que genera el lenguaje de fracción: **la relación parte-todo**. Este último puede relacionarse con cada uno de los otros cuatro constructos por medio de la identificación de unidad apropiada a la circunstancia; es decir, el conocimiento de fracciones es un conjunto de elementos que se interconectan.

Tomando en cuenta que las fracciones tienen una naturaleza cotidiana (Freudenthal, 1983) pero en la enseñanza se tornan abstractas es de vital importancia desarrollar herramientas que permitan el desarrollo de la construcción de los distintos significados de la fracción.

De acuerdo con Valdemoros (2008), los distintos significados que se le atribuyen a las fracciones sientan las bases para tener una mejora en el desarrollo posterior de conceptos, asimismo, Kieren (1988), muestra en su red semántica que el concepto de fracción está formado por diversas uniones entre “constructos mentales humanos” y “hechos externos”. Para llegar a los constructos de un nivel más alto es necesario apoyarse en actividades concretas, tales como: **la partición, la equivalencia** y el reconocimiento de unidades divisibles.

La partición es considerada como la equidivisión de una cantidad continua o discreta en un número dado de partes. Esta actividad tiene una génesis social, la acción de repartir, mientras que la equivalencia surge en el sentido de “igualdad” o de “lo mismo”, donde la comprensión de ésta es uno de los fundamentos para los constructos de fracción; por ello existen nociones de equivalencia no formales pero esenciales en el desarrollo de estos constructo (Kieren, 1988).

En nuestra interpretación la importancia de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición son los elementos necesarios que los maestros de primaria deben incorporar de manera cotidiana dentro del aula puesto que estos mecanismos son la base de adquisición de todo el conocimiento relativo a las fracciones. Con base en lo anterior nos preguntamos cómo están adquiriendo, construyendo y llevando a la práctica los **maestros en**

formación estos elementos esenciales, es decir, identificar sus concepciones acerca de dichos mecanismos, ya que según Ernest (2000) y Contreras (1999), citados en Martínez (2004), las actividades desarrolladas por los profesores están orientadas por sus propias concepciones.

De acuerdo con Martínez (2006), las concepciones son producto de la construcción cognitiva a través de la interacción con la información del entorno del sujeto, por lo que no sólo existen concepciones de objetos matemáticos sino también del aprendizaje y la enseñanza de los mismos.

Nuestro **Problema de investigación** está enfocado a **explorar y analizar qué es lo que algunos maestros en formación del tercer semestre de la licenciatura en Educación Primaria** (impartida en la escuela Normal de la ciudad de México), **conocen y aprenden para elaborar planes de clase orientados a enseñar las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos, en la primaria.** De tal planteamiento derivamos las siguientes **preguntas de investigación**:

- ¿Qué concepción tienen los maestros de primaria en formación acerca de las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos?
- ¿Cómo se aborda la equivalencia entre fracciones y los procesos de partición de todos continuos y discretos en las sesiones de enseñanza de la escuela Normal?
- ¿Cómo diseñan tareas vinculadas a la relación de equivalencia y a los procesos de partición?
- ¿Qué tratamientos dan los maestros en formación a las relaciones de equivalencia entre fracciones y los procesos de partición en vinculación con el todo continuo y el todo discreto, en el salón de clase de la primaria?

Método

En esta investigación de tipo cualitativo es de suma importancia plantear dónde, con quiénes y cómo llevaremos a cabo la indagación que dará respuestas a las preguntas de investigación planteadas anteriormente.

Escenario. La investigación se lleva a cabo en la escuela Nacional de Maestros de Educación Primaria, ubicada al noroeste de la ciudad de México, la cual es la institución pública de educación superior más importante de la ciudad y zona conurbada dedicada a formar, únicamente, profesores de Educación Primaria.

Sujetos. Los mismos son veinticinco alumnos del tercer semestre de Licenciatura en Educación Primaria, ya que durante este semestre se desarrolla el contenido de fracciones en la asignatura Enseñanza de las Matemáticas II; además, en dicho período los maestros en formación cuentan con dos temporadas de práctica, en las cuales diseñan y efectúan planes de clase de matemáticas.

Nuestro **Plan general** está orientado a elaborar estudio de casos con maestros en formación, así que el método desarrollado es el siguiente:

1. Aplicación del cuestionario inicial a los maestros en formación. Fase 1.
2. Observación directa de las sesiones impartidas a los profesores en formación.
3. Aplicación del cuestionario de seguimiento para compararlo *a posteriori*, con el cuestionario inicial. Fase 2.
4. Entrevista semiestructurada a los maestros en formación.
5. Observación directa de las sesiones impartidas por los profesores en formación.

Instrumentos metodológicos. A continuación se especifican el cómo y el porqué de los mismos:

Cuestionario. Nuestra investigación cuenta con la aplicación de dos cuestionarios, los cuales fueron resueltos en tiempos distintos, es por ello que se denominaron Fase 1 y 2, puesto que nuestro objetivo específico es comparar los cambios, si es que los hay, en cuanto a las

concepciones de aprendizaje y de enseñanza de los maestros en formación respecto a las relaciones de equivalencia y procesos de partición.

Ambos cuestionarios constan de tres tareas basadas en partición y equivalencia proporcionadas por el investigador donde el maestro en formación resuelva de maneras distintas dichas tareas, justifique sus respuestas e identifique el contenido matemático en la tarea y reconozca qué significado de fracción se está usando. Además de elaborar tareas para sus estudiantes con respecto a las fracciones.

Observación participante. Se realizará en forma directa al presenciar las clases impartidas a los maestros en formación con el objetivo particular de dar cuenta de cómo son abordados las relaciones de equivalencia y los procesos de partición en la escuela Normal.

También se llevará a cabo durante los períodos de prácticas donde los maestros en formación ejerzan la enseñanza en la escuela primaria, teniendo como objetivo mirar en la práctica las tareas diseñadas por ellos mismos.

Entrevista. Los cuestionarios y la observación de las clases de los maestros en formación tienen como objetivo específico el seleccionar a nuestros candidatos a entrevista, puesto que esta última es el instrumento fundamental en el desarrollo del estudio de casos.

La entrevista será de “corte didáctico” (Valdemoros 1998), y en ella resolverán tareas específicas y elaborarán planes de clase referidos a las relaciones de equivalencia y procesos de partición. La cantidad de dichas entrevistas será prevista de acuerdo con las necesidades de cada caso.

Validación. En cuanto al cuestionario se llevó a cabo a través del piloteo en un grupo de personas con características similares a nuestros sujetos de estudio. Esto nos permitió experimentar de manera real qué ocurre con el tiempo, las indicaciones de los cuestionarios y



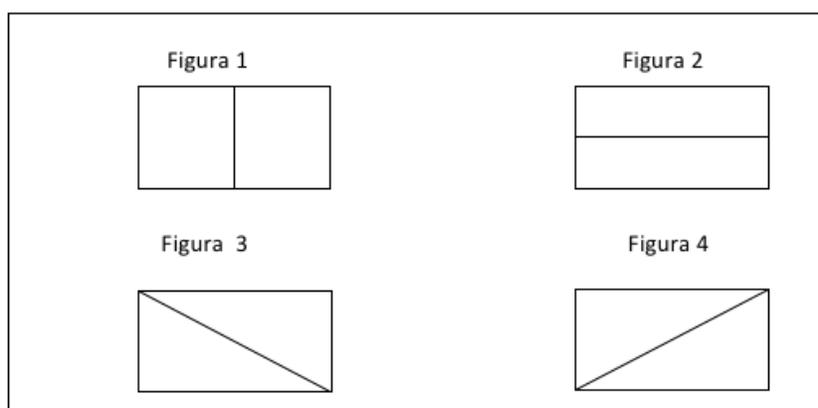
las tareas en el mismo. Esta experiencia previa permitió realizar las modificaciones pertinentes a nuestro instrumento para obtener respuestas claras que ayudaron a nuestra investigación.

Modelo de análisis de resultados. Se considerarán como centrales las siguientes categorías de análisis: a) Concepciones, b) Enseñanza recibida, c) Ideas de partición d) Resolución de problemas y, e) planteamiento de resolución de problemas.

Resultados iniciales

En este apartado expondremos los resultados obtenidos por los maestros en formación en el **cuestionario de la Fase 1** acerca de las particiones realizadas en rectángulos de igual tamaño, cabe mencionar que se les pidió partir de cuatro maneras distintas en medios, tercios y cuartos como se muestra a continuación. Con respecto al análisis de estos resultados iniciales, en este momento nos encontramos procesándolos (por esa razón no arribamos conclusiones preliminares aún).

- **MEDIOS**



Cuadro A. Partición en medios

Estas particiones son las más comunes en los maestros de formación. En las dos primeras se observa **la bipartición**, es decir los normalistas localizaron el centro del lado horizontal del rectángulo y trazan un segmento que llega al otro lado horizontal (Figura 1). Asimismo utilizaron el mismo procedimiento en los lados verticales del rectángulo dando origen a la figura dos.

En las figuras tres y cuatro utilizaron **la congruencia** al tomar en cuenta que al realizar las particiones las figuras resultantes son iguales.

Cabe mencionar que la mayoría de los maestros en formación realizaron las particiones arriba elaboradas, puesto que 20/25 registran estas soluciones en distinto orden de ejecución pero con los mismos resultados.

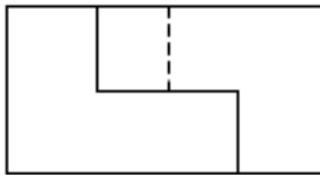
Dos alumnos (Alma y Cinthia) realizaron la partición que se muestra a continuación:



En esta partición observamos que **la congruencia** consiste en realizar dos trapecios semejantes con la misma área.

Gerardo realizó una partición donde observamos nuevamente **la congruencia** dando origen a dos hexágonos irregulares. Cabe mencionar que en la elaboración de éstos notamos de manera sutil **la equivalencia**, ya que se observan líneas tenues que apoyaron su partición.

En este proceso identificamos que Gerardo ubica la mitad del rectángulo (línea punteada) y posteriormente realiza biparticiones para elaborar sus hexágonos.

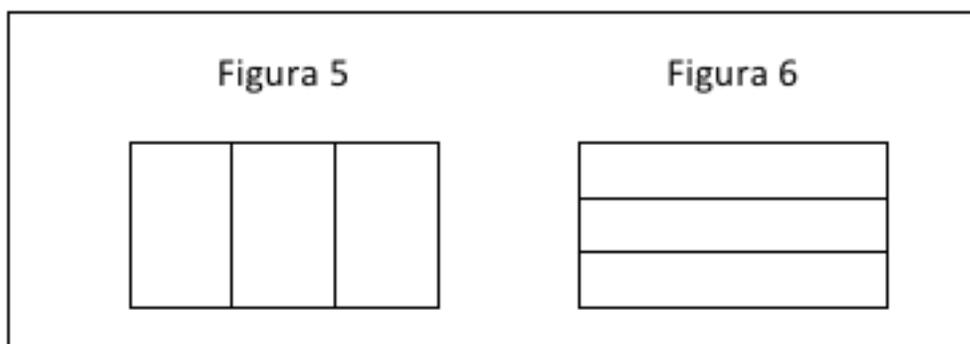


Carol realiza las mismas particiones que Gerardo pero sin la dedicación que Gerardo expone al realizar sus hexágonos.

- *TERCIOS*

Los veinticinco maestros en formación de nuestra investigación tuvieron en común dos particiones del Cuadro B, las cuales tienen **congruencia y equidivisión** dentro de las posibilidades de los maestros en formación puesto no tenían instrumentos de medición que les permitiera hacerla de manera estricta.

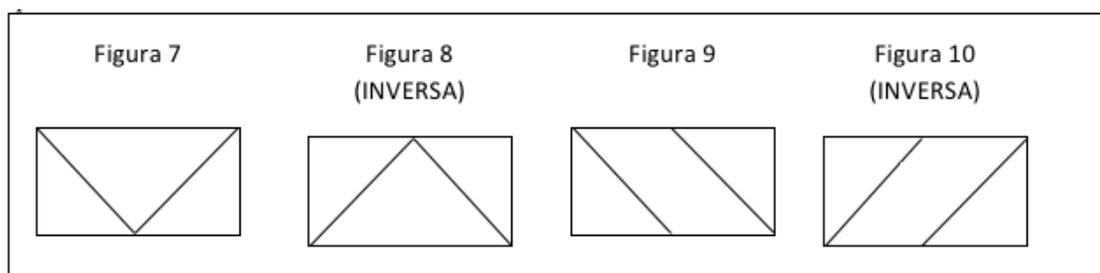




Cuadro B. Partición en tercios

Cabe mencionar que once profesores sólo realizaron las dos particiones descritas anteriormente de las cuatro solicitadas debido a la poca experiencia que tienen en partir tercios.

Otros maestros subdividieron en **tres** partes los dos rectángulos restantes pero no en **tercios**, puesto que no hay presencia de **equidivisión** en estas particiones. A continuación desglosaremos estas particiones:



Cuadro C. Partición en tres partes desiguales

En la Figura 7 trazaron una línea desde los vértices superiores al centro de la base del rectángulo y a la inversa como lo muestra la Figura 8. Con este tipo de partición observamos que los profesores no toman en cuenta la igualdad de área, sólo identificaron la formación de tres triángulos rectángulos pero sólo dos de ellos son iguales.

En la Figura 9 observamos que la partición se realizó con base a los vértices opuestos hacia el centro de los lados horizontales del triángulo dando origen a dos triángulos rectángulos y un romboide. Asimismo la Figura 10 es la inversa de la Figura 9.

A continuación exponemos detalladamente cuales figuras utilizaron los profesores en formación:

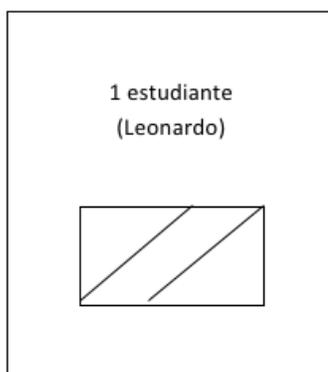
Tabla 1.

Solo una figura	Figura inversa	Combinación de figuras	OTROS
2 normalistas (Figura 4)	3 normalistas (Figuras 3 y 4) 1 normalista (Figuras 5 y 6)	2 normalistas (Figuras 4 y 5) 1 normalista (Figuras 3 y 5)	<ul style="list-style-type: none"> • Marisol (utiliza congruencia con dos de las tres figuras que surgen de sus repartos) • Ángela (intenta repartir el rectángulo con la “Y” que se utiliza en el círculo)

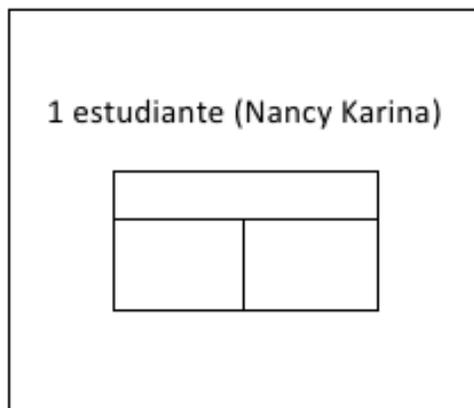
Ahora expondremos los casos donde los alumnos realmente reparten en tercios.

La solución de Leonardo fue en la dirección de las figuras 9 y 10 arriba mencionadas, pero hizo **uso de la compensación de área**, por lo que no va del vértice al centro de lado horizontal, sino un poco más, mostrando así la importancia que le da a la compensación. Él realizó anotaciones en su partición donde expuso la congruencia en igualdad de área a través de fórmulas para comprobarlo. Cabe mencionar que no realiza la comprobación pero lo deja mencionado en sus anotaciones.

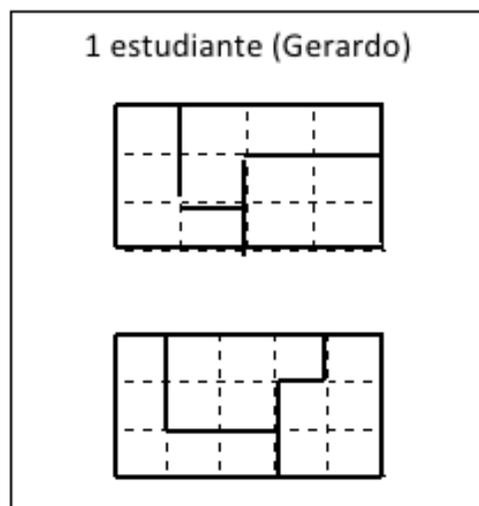
La otra partición la realizó a través de la inversa de la figura mostrada pero sin las anotaciones y el cuidado de la primera, dejando implícito que el procedimiento es el mismo



Interpretando la solución aquí mostrada, Nancy se apoyó en la **congruencia** de áreas, para lograr esto suponemos que realizó la partición mental (no hay nada escrito que lo indique) en sextos y realizó **la equivalencia** donde cada tercio está compuesto de dos sextos. La otra partición es inversa a la mostrada quedando el rectángulo delgado en la base.



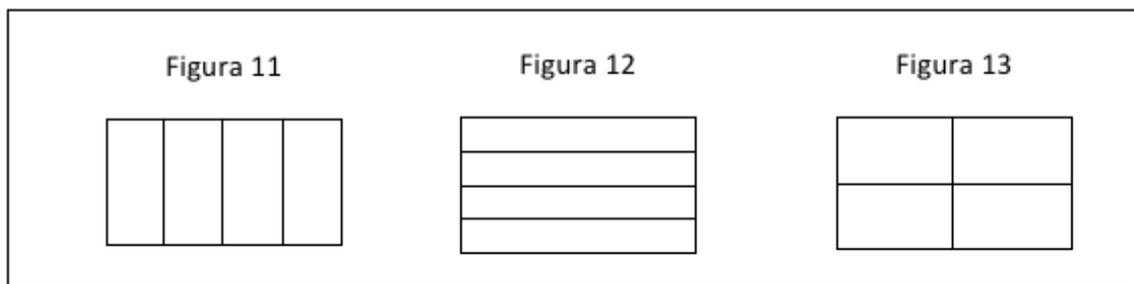
Nuevamente, Gerardo mostró claramente **la equivalencia** en la partición de los rectángulos en tercios puesto que realiza un cuadrículado con líneas tenues donde se ésta es observada. El primer rectángulo lo divide en doce cuadrillos (doceavos) y el segundo en quince (quinceavos). Posteriormente contó los cuadrillos para realizar **la congruencia de áreas**.



- CUARTOS

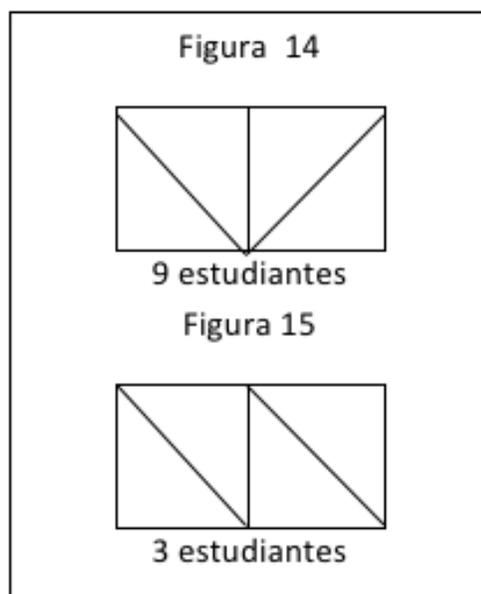
En esta tarea los maestros en formación muestran claramente **la bipartición** puesto que utilizaron el partir en medios lo que anteriormente ya estaba e la mitad. Todos los maestros en formación de nuestra investigación tienen en común dos particiones (Figura 11 y 12), la cuales

podríamos llamar **elementales**, puesto que son las maneras más intuitivas de partir. La Figura 13 surge de la unión de las dos biparticiones básicas de cualquier figura.



Cuadro D. Partición en cuartos

En nuestra investigación 21/25 realizan estas tres particiones, por lo que la partición del rectángulo restante da origen a los siguientes dos grupos:

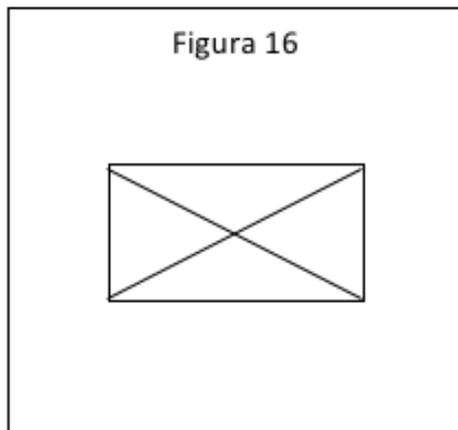


Para la partición en cuartos de estos rectángulos fue necesario realizar la partición a la mitad a través de una línea que corta lados horizontales de la figura. Posteriormente realizaron **la bipartición** de estas dos mitades a través de la partición utilizada en medios que consiste en partir a la mitad un rectángulo utilizando los vértices. En las figuras 14 y 15 mostramos estas particiones que se basan en procedimientos iguales, pero el sentido de la segunda partición es distinto.

Cabe mencionar que pocas personas realizaron la partición de la Figura 5.

Esta partición consistió en unir dos **particiones en medios**, las cuales dieron origen a una congruencia de áreas que no se observa claramente pero que se intuye, puesto que es conocido que partir a la mitad una mitad da origen a los cuartos.

Por ello, la bipartición del rectángulo a través de los vértices dando origen a los cuartos aunque no sean a la vista partes idénticas.



Las particiones mostradas en la Figura 11 a la Figura 15 son todas las que encontramos en los resultados de nuestro primer cuestionario y 20/25.

Cabe mencionar que cinco normalistas no pertenecen a los grupos anteriores puesto que, no completan la tarea es decir sólo realizan dos o tres particiones.

Bibliografía

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. En: W. Zwang (Ed), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Boston, E. E. U.U. : Birkhauser. 506 – 508.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development, En J. Hiebert y M. Behr (Ed), *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston, E.E.U.U.: National Council of Teachers of Mathematics. 162 – 181.

Martínez, M. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 6 (1).

Martínez, M. (2006). *Educación Matemática para todos Vol. 1*. México: Comité Regional Norte de Cooperación con La UNESCO. 54 – 87.

Secretaría de Educación Pública (1997). *Plan de estudios para la Licenciatura en Educación Primaria*, México.

Valdemoros, M. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones. Estudio de caso. En: F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Editorial Iberoamericana. 465- 481

Valdemoros, M y Ruiz, F (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(1), 127-157.

Vygotski, L. (1934). Pensamiento y lenguaje, en Vygostki, L. *Obras escogidas II*. Madrid: Visor, 1982. 287 – 295.