



Alejandro Del Castillo Escobedo, Gisela Montiel Espinosa

alejandrodcastilloescobedo@gmail.com, gmontiel@ipn.mx

C.B.T.i.s No.164, Tecnológico de Madero; Cicata Legaria IPN

Resumen

Los procesos de cambio se estudian desde el nivel primaria. Durante la secundaria se trata el tema de la recta mediante el uso de tablas y las gráficas de funciones elementales del tipo $y=mx + b$. En el nivel bachillerato, y a pesar de que los estudiantes cursan la materia de Geometría Analítica, no usan dichos procesos para determinar la ecuación de la recta. En el nivel universitario, nuestra experiencia docente nos muestra de que a pesar de que es un tema estudiado por los estudiantes en sus estudios preuniversitarios, en general, los jóvenes no relacionan la ecuación de la recta con su comportamiento variacional y no se han apropiado del concepto de función lineal. El problema de investigación que nos ocupa es el de estudiar, con jóvenes de nivel universitario de ingeniería durante un curso de cálculo diferencial, acerca de las dificultades de aprendizaje y construcción del concepto de función lineal, para introducir dicho tema se hace uso de un recurso tecnológico, un Ambiente Gráfico Dinámico (AGD).

Palabras Claves

Ambiente Gráfico Dinámico, Covariacional, Función Lineal, Variación.

Introducción

Las matemáticas se utilizan cada días más en el entorno en que vivimos, y están relacionadas con muchas de las diversas áreas de la actividad del ser humano y, en una sociedad más competitiva y más tecnológica, se espera que la escuela pueda formar los seres "que matemáticamente sepan leer y escribir", que puedan reflexionar críticamente, solucionar problemas, tomar decisiones, adoptando un papel más activo y más autónomo.

Siendo esto así, es urgente proporcionar ambientes más ricos de enseñanza/aprendizaje, más desafiante por sus retos y más estimulante donde los estudiantes puedan desarrollar su

capacidad de explorar, de conjeturar, de pensar lógicamente y de utilizar la información disponible.

El enfoque tradicional en la enseñanza-aprendizaje del cálculo, en cualquier nivel escolar, ha estado siempre enfocado en aspectos formales, basado en cálculos y manipulaciones simbólicas como pre-requisitos necesarios (Del Castillo y Montiel, 2007). En este trabajo se pretende mostrar de que manera, un ambiente de software, permite la elaboración de actividades significativas (actividades donde el estudiante descubra el sentido de lo que aprende), para el estudio de las variaciones de una cantidad. Todo lo anterior antes de que el alumno tenga a su disposición las mencionadas técnicas simbólicas de la manipulación (las mismas que fueron consideradas esenciales para un acercamiento al cálculo).

En las instituciones de nivel universitario, y en particular, en las encargadas del desarrollo de ingenieros, los estudiantes deben de tener un profundo conocimiento del cálculo y además, se deben de favorecer formas de pensamiento y lenguaje variacional. Podemos concluir que el concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia y en la investigación en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionada por su carácter estático, algebraico y algorítmico (fórmula→tabla→puntos en el plano→gráfica) (Del Castillo y Montiel, 2007).

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica relacionada con la enseñanza del concepto de función lineal. En la propuesta, mediante el uso de representaciones gráficas dinámicas, y el uso de tecnología, el objetivo es determinar que tanto se favorece el desarrollo del pensamiento covariacional¹ en el estudiante. El marco teórico está apoyado en el enfoque instrumental, basado en la distinción entre objeto (artefacto) usado por un sujeto y el objeto junto con el tipo de actividad empleada (instrumento) (Verillon y Rabardel, 1995).

¹ Actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes mientras se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí. Consiste en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí. (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Hsu, 2002). Relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. (Ferrari, 2004)

El Ambiente Gráfico Dinámico

Nosotros definimos un Ambiente Gráfico Dinámico (**AGD**) como un escenario construido sobre la base de un programa computacional, que permite el manejo articulado de distintas representaciones del concepto escolar de función.

En nuestro trabajo, el Software de Geometría Dinámica (SGD) denominado *Geometer's Sketchpad*, ha servido de base para nuestro **AGD**, y es a partir de dicho SGD que se han diseñado las actividades que más adelante se mencionan.

Para el caso particular de nuestra investigación, este ambiente incluye la simulación de un fenómeno de movimiento y las representaciones gráfica, algebraica y numérica (tabular).

El **AGD** permite diseñar secuencias que permite a los estudiantes acceder al significado de función (no solo geométrico sino también numérico) como objeto que incorpora una relación asimétrica de covariación entre dos trayectorias una dependiente de la otra y, por lo tanto, entre dos variables una dependiente de la otra. De esta forma, el **AGD** representa relaciones funcionales que no necesariamente están especificadas por símbolos, tablas o gráficas. (Del Castillo y Montiel, 2009).

Se considera que el ambiente geométrico dinámico puede proporcionar la representación básica de la variación y de la dependencia funcional, y a partir de esto introducir en el estudiante la idea de función. Considerando a la curva como la representación espacial de una función en el plano coordenado como la trayectoria de un punto en movimiento P con coordenadas $(x, f(x))$, donde el punto A representa la variable independiente y se mueve sobre el eje de las abscisas, la orden o instrucción Trace (Traza, Rastro) nos permite pasear por o explorar dicha trayectoria o curva. mientras que la orden Drag (Arrastre) permite

experimentar la combinación de dos movimientos interrelacionados, así como la dependencia de movimiento entre los puntos básicos y los puntos contruidos que le permiten experimentar con una simulación de movimiento real (Del Castillo y Montiel, 2007).

Un **AGD** se caracteriza por el movimiento, movimiento donde se preservan las relaciones construidas entre cada uno de sus elementos. Con lápiz y papel no se puede representar directamente la variación, en este ambiente se puede experimentar bajo la forma de movimiento. La idea de variación tiene sus raíces en el movimiento, los puntos pueden desplazarse por la pantalla y representar variables básicas. Por lo tanto, el **AGD**, incorpora y conecta de manera sólida las ideas de variación y de dependencia funcional (Falcalde, Laborde y Mariotti, 2003).

Elementos Teóricos

Esta investigación tiene su fundamento en lo que se denomina la génesis instrumental: El proceso de un artefacto – en nuestro caso, el **AGD** – que se convierte en un instrumento en las manos de un usuario, en nuestro caso, el estudiante. En este proceso no trivial, y que lleva mucho tiempo, se establece una relación bilateral entre el artefacto y el usuario: el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (la instrumentalización), y por otra parte, las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (la instrumentación). (Verillon y Rabardel, 1995).



Trouche (2004) afirma que un instrumento puede considerarse una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto (o parte de él) y de una componente psicológica (la organización de la actividad con un fin dado). El instrumento es entonces el producto de una historia: El usuario a partir de un artefacto, construye un instrumento, en un entorno determinado, para realizar una tarea específica. Esta historia, que se denomina génesis instrumental, vea figura A, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo.

En el curso del proceso de instrumentalización, el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto, derivadas de su primera uso. El sujeto se adapta al artefacto. El sujeto puede también construir nuevas funciones del artefacto, así es el artefacto el que se adapta a las necesidades del usuario.

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los esquemas de uso tienen una componente privado, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores. De la misma forma que la utilización de las señales psicológicas influye sobre los pensamientos del sujeto, la génesis instrumental permite hacer evolucionar las concepciones del sujeto relativo al objeto contemplado por el instrumento. Las concepciones evolucionan por la adaptación a las dificultades de las herramientas y también por la consideración de las potencialidades. El progresivo descubrimiento del sujeto de las propiedades (intrínsecas) de los artefactos va acompañado de la adaptación de sus esquemas, así como los cambios en la significación del instrumento resultante de la asociación del artefacto con los nuevos esquemas.

Metodología

Para poder llevar a cabo nuestra investigación adoptamos algunos elementos metodológicos de la Ingeniería Didáctica. Una primera tarea fue describir el estado en el que se encuentra el concepto de función entre los estudiantes.

Los estudiantes con los que trabajamos representan apenas parcialmente a nuestra región, son alumnos, procedentes de varios estados conurbados, de uno de los varios cursos de matemáticas que se imparten en un Tecnológico, institución que a su vez, es una más dentro de la extensa oferta educativa en la zona.

Aún cuando el aprender a usar el **AGD** por parte de los estudiantes puede ser simultáneo a la realización de algunas actividades, se llevó a cabo una sesión de introducción para el manejo del **AGD**, ésta parte se realizó sin trabajar o tocar el tema de estudio. Las hojas de trabajo para el alumno, incluían detalles y explicaciones sobre los comandos a utilizar. La intención principal era que el estudiante se involucrará con los diferentes elementos que se le presentarían al manejar nuestro software.

Se diseñaron las actividades de aprendizaje y las secuencias didácticas, después de ponerlas en práctica entre los jóvenes, se analizaron los resultados. Las actividades que se diseñaron tiene el objetivo de permitir a los estudiantes acceder al significado de función (no solo geométrico sino también numérico) como objeto que incorpora una relación asimétrica de covariación entre dos trayectorias una dependiente de la otra y, por lo tanto, entre dos variables una dependiente de la otra.

Las actividades que proponemos para este proyecto tienen como finalidad principal mostrar la relación entre el desplazamiento de un objeto y su gráfica tiempo versus posición. Mediante el desarrollo escalonado de dichas actividades se van obteniendo resultados parciales, cada vez más generales, que ponen al alcance del estudiante algunos resultados matemáticos. Estos resultados, en su aspecto más formal, pueden estar, muy alejados del nivel educativo de los alumnos. El **AGD** permite, de forma muy elemental, simular una situación física y acompañarla de descripciones gráficas. La observación de las regularidades que se manifiestan en estas gráficas permite a los alumnos construir significados intuitivos para propiedades que se

formalizarán en etapas posteriores, cuando los alumnos desarrollen los conocimientos algebraicos y analíticos suficientes.

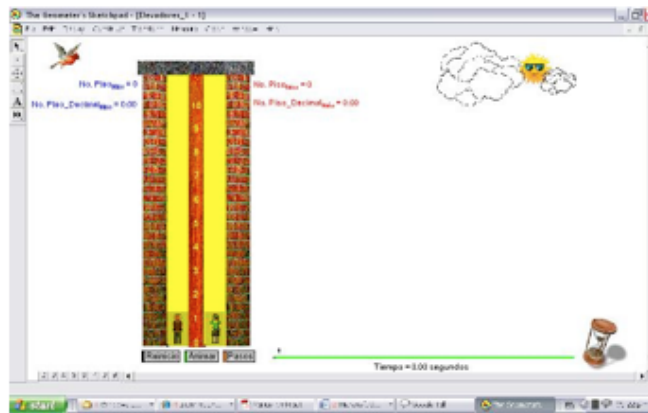
Tomando como punto de partida tales observaciones, hemos confeccionado un conjunto de actividades para llevarlas a cabo. Para cada una de las actividades se elaboraron hojas de trabajo que se entregó a cada estudiante en fotocopias. El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de estudiantes.

Objetivos de las actividades

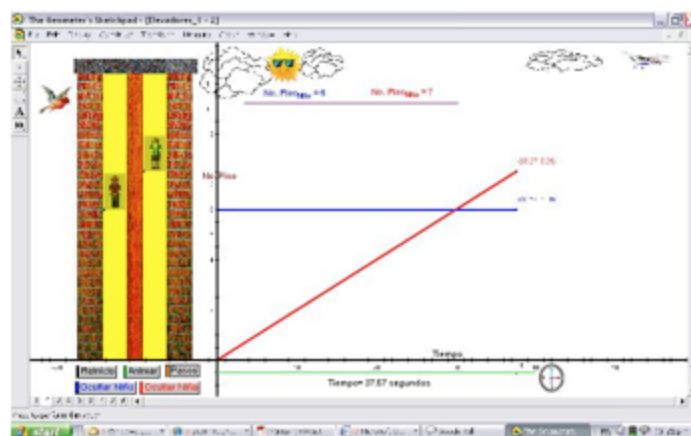
- Considerando la velocidad como el concepto central de todo el desarrollo, interrelacionar, para diferentes tipos de movimientos las gráficas de posición. Sin efectuar el cálculo explícito de la pendiente (de la función de posición en un punto), es posible establecer por ejemplo, que una modificación en la velocidad se corresponde con un cambio en la inclinación de los segmentos de la gráfica de posición (supuesta esta una función lineal a trozos)
- Establecer una conexión entre el movimiento observado y su registro en forma tabular y en forma gráfica. Por ejemplo, mediante el recurso de la simulación del movimiento de los elevadores se puede observar que un trazo con pendiente negativa corresponde a ir descendiendo pisos o que, en trazos con pendiente cero, se corresponde con la inmovilidad del objeto (velocidad cero).

Actividad 1. Se presenta por primera vez al estudiante la simulación del movimiento de los dos elevadores. Se le pide identificar cada uno de los elementos que se le muestran en la pantalla. Se le pide hacer mención de los diferentes valores que puede tomar la variable independiente,

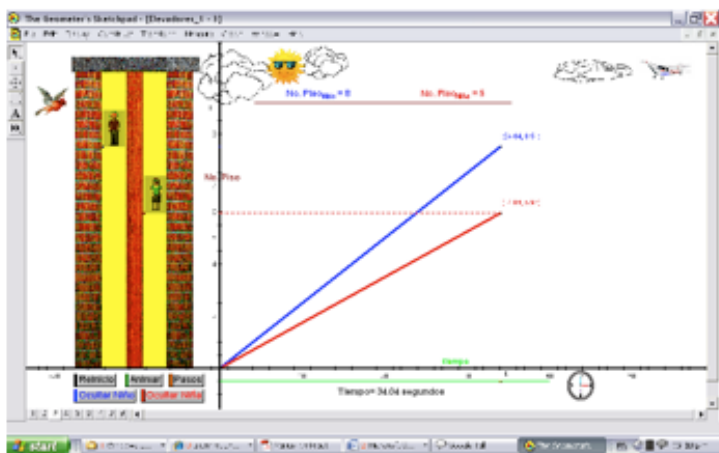
el tiempo, esto es, se trabaja con el Dominio de la función. Se propone encontrar las ecuaciones que gobiernan los movimientos de los elevadores.



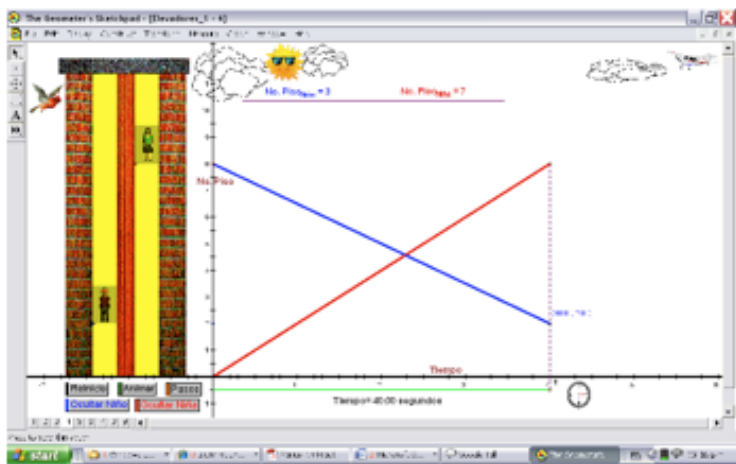
Actividad 2. En esta actividad, además de los elevadores, se muestra una gráfica cartesiana de la posición de los elevadores con respecto al tiempo. Se hace reflexionar al estudiante sobre cual de los sujetos no modifica su posición, en que momento los sujetos coinciden en alguno de los pisos, y se asocia la recta de pendiente positiva con el movimiento ascendente del elevador. Se busca relacionar las coordenadas (que se muestran junto a los puntos que generan la gráfica) con el movimiento que se representa. Se pide llenar una tabla con diferentes valores del tiempo y las correspondientes posiciones de los sujetos.



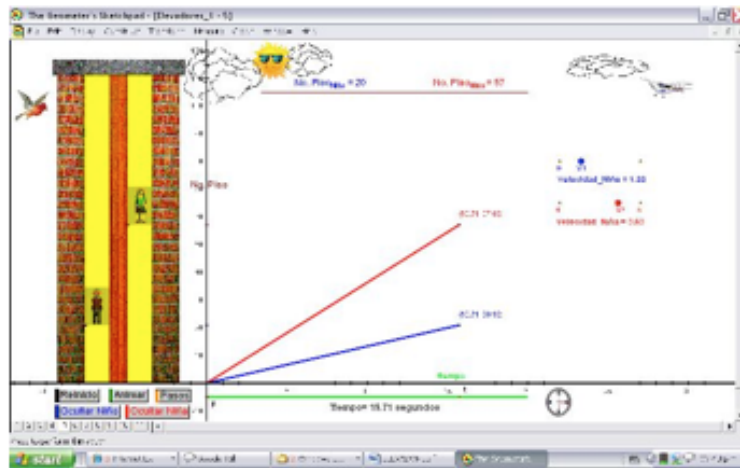
Actividad 3. En esta actividad se comparan dos rectas con pendiente positiva, se busca relacionar la recta de pendiente mayor con el elevador que presenta mayor velocidad. Se busca que enfoque su atención en el comportamiento de los cambios que experimenta x (tiempo) y y (posición) en todo el dominio de la función, debe observar que la relación de proporcionalidad entre los cambios de y respecto a x permanece constante.



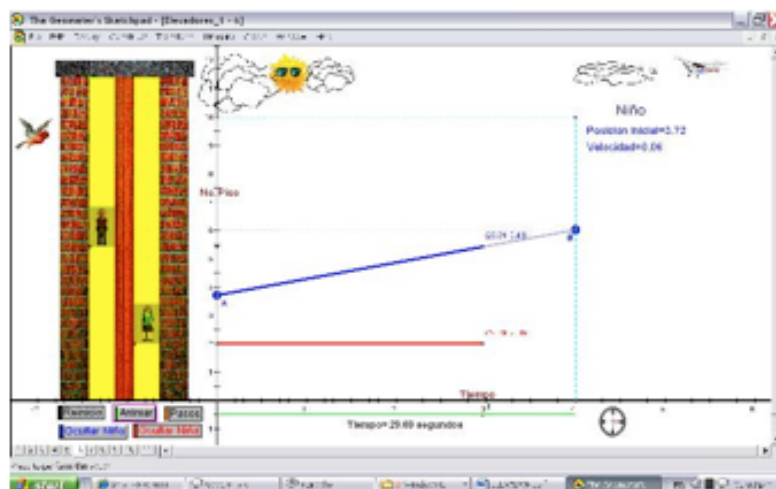
Actividad 4. En esta actividad se comparan dos rectas con diferente signo en su pendiente, se busca relacionar la recta de pendiente mayor con el elevador que presenta mayor velocidad. Se relaciona la intersección de la recta con el eje Y con la posición inicial del elevador. Se debe observar que las relaciones de proporcionalidad entre los cambios de y respecto a x , para cada uno de los elevadores, permanece constante, pero son de signos contrarios.



Actividad 5. En esta actividad se manipulan las velocidades de los elevadores mediante dos sliders (deslizadores). A mayor velocidad, mayor altura alcanza el elevador. Además de lo anterior, el estudiante debe verificar que al modificar la velocidad de los elevadores, también se modifica la pendiente de cada una de las rectas.

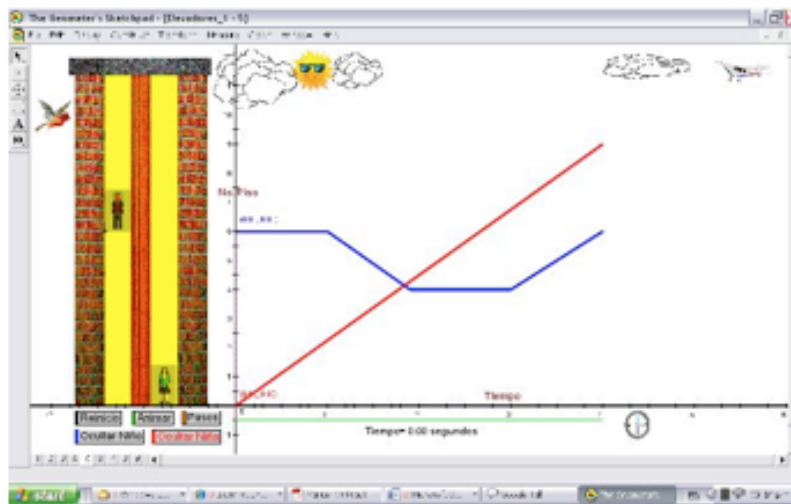


Actividad 6. En esta actividad el estudiante puede manipular la gráfica cartesiana desplazando verticalmente los puntos en color azul A y B. En la parte superior derecha de la pantalla se muestra la información relativa al niño: posición inicial y velocidad. Se cuestiona al estudiante sobre como debe ser la gráfica para que el elevador ascienda, como debe ser la gráfica para que el elevador descienda. Se le pide obtener las gráficas de dos movimientos del elevador donde sus posiciones iniciales son las mismas.

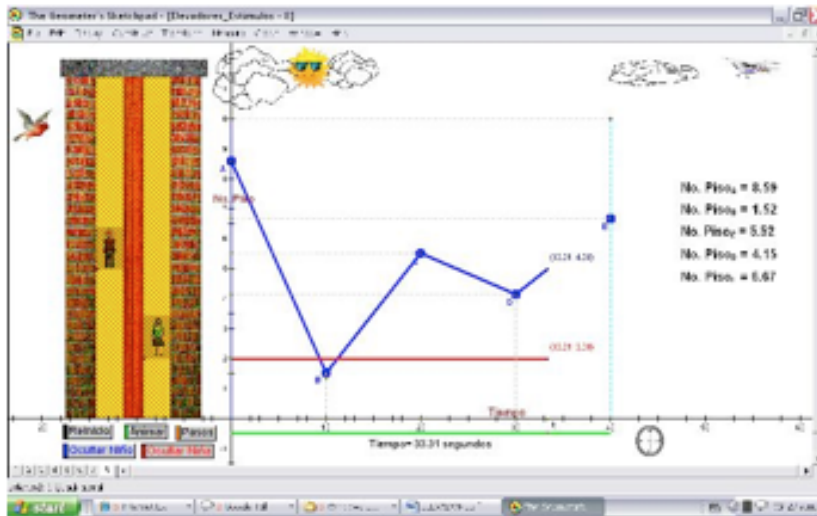


Se le pide obtener las gráficas de dos movimientos del elevador donde su velocidad es la misma pero sus posiciones iniciales no son las mismas.

Actividad 7. En esta actividad el estudiante se enfrenta a un nuevo tipo de gráfica: una función lineal a trozos. Se le pide investigar en que intervalos de tiempo el elevador no cambia de posición; en que momentos el elevador asciende y desciende y relacionar dichos movimientos con el gráfico correspondiente. Finalmente se le pide representar mediante un gráfico cartesiano el movimiento de un elevador que cumpla con ciertos requisitos: posición inicial, cambio de posición de un piso a otro en un determinado tiempo, etc.



Actividad 8. En esta actividad el alumno trabaja con otra gráfica manipulable visualmente. El estudiante puede manipular la gráfica cartesiana desplazando verticalmente los 5 puntos A, B, C, D y E. En la parte superior derecha de la pantalla se muestra la información que relaciona la posición de cada uno de los puntos con el número de piso a donde llegará el elevador. Se le presentan al estudiante una serie de ejercicios donde se le pide crear gráficas que representen diferentes movimientos del elevador.



Resultados y Discusión

Una vez que se diseñaron las actividades de aprendizaje las llevamos al salón de clases con 18 estudiantes de nivel universitario de ingeniería, todos repetidores de la materia Matemáticas I (Cálculo Diferencial) en el Instituto Tecnológico de la localidad. Los estudiantes siguiendo las instrucciones dadas por el profesor, cargaron el software y lo configuraron para su propia PC. Discutieron y resolvieron cada una de las actividades con las orientaciones correspondientes del profesor de la asignatura, que en este caso era el mismo investigador. Se utilizaron 4 sesiones de aproximadamente dos horas cada una de ellas. Para cada una de las actividades se elaboraron hojas de trabajo que se entregó a cada estudiante en fotocopias. El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones fue un salón de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de estudiantes. Todas las actividades fueron realizadas fuera de la jornada escolar, con la finalidad de no afectar las actividades del calendario académico de la materia cursada en ese momento por los estudiantes.

Los primeros resultados obtenidos señalan dificultades para entender una situación física mostrada a través de una simulación y en ella identificar variables, relaciones algebraicas, y dominios y rangos de funciones. A pesar de que es un tema estudiado por los estudiantes en sus

estudios preuniversitarios, en general, los jóvenes no se han apropiado del concepto de función lineal.

La estrategia de relacionar el movimiento ascendente (descendente) del elevador con una función lineal creciente (decreciente) fue comprendida y asimilada por la mayoría de los estudiantes. Inclusive en la actividad 8, la de mayor complejidad por trabajar con una función lineal a trozos, los resultados fueron muy buenos. Por otra parte, un aspecto no esperado es que los estudiantes mostraran dificultades para localizar puntos en el plano cartesiano.

Al trabajar con la razón de proporcionalidad de los cambios (Δx y Δy) la mitad de los estudiantes contestaron correctamente aunque queda la duda si dicha razón no fue obtenida por el conocimiento previo de la ecuación de la recta $y = mx + b$. Otro aspecto a considerar es la dificultad que representa la notación Δ en los estudiantes, para algunos al hablar de Δx , consideran esta notación como dos objetos separados, por una parte a Δ y por otra parte a x .

Manipula los puntos, pulsa el botón **REINICIO** y luego el botón **ANIMAR**, observa y contesta:

Para cada uno de los siguientes ejercicios debes crear una gráfica que represente el siguiente movimiento del niño:

65.- Que su posición inicial sea el piso 8.

66.- Que su posición durante los 40 segundos sea siempre el piso 4.

67.- Que su movimiento durante los 40 segundos sea con velocidad constante y negativa.

68.- Que su movimiento durante los 40 segundos sea con velocidad constante y positiva.

69.- Que su posición inicial sea el piso 2 y su movimiento durante los 40 segundos sea con velocidad constante y positiva.

70.- Que su posición inicial sea el piso 9 y su movimiento durante los 40 segundos sea con velocidad constante y negativa.

71.- Que su posición inicial sea el piso 10 y su movimiento durante los primeros 20 segundos sea con velocidad constante y negativa; y en los restantes 20 segundos su movimiento sea con velocidad constante y positiva.

72.- Que su posición inicial sea el piso 1 y su movimiento durante los primeros 20 segundos sea con velocidad constante y positiva; y en los restantes 20 segundos su movimiento sea con velocidad constante y negativa.

Dos terceras partes de los estudiantes pudieron determinar correctamente la ecuación de la recta cuando les fue solicitada. La mayoría de los estudiantes pudo identificar el punto inicial de movimiento con la intersección de la recta con el eje y , también pudieron relacionar la velocidad del elevador con la pendiente de la recta, aunque se observan problemas cuando se trabajan pendientes y velocidades negativas.

Otras dificultades mostradas por los estudiantes se dieron cuando se le pidió crear gráficas que representen diferentes movimientos del elevador (Ver Figura J), al parecer existen dificultades para entender una situación física mostrada a través de la simulación, identificar las variables y sus relaciones algebraicas.

Conclusiones

Los resultados nos señalan dificultades por parte de los estudiantes, para entender una situación física mostrada a través de una simulación y en ella identificar variables y sus relaciones algebraicas. Consideramos que uno de los principales motivos de lo anterior es por el escaso trabajo desarrollado con elementos visuales entre los jóvenes. No están acostumbrados a resolver este tipo de problemas. Inclusive algunos estudiantes consideran, de acuerdo a comentarios vertidos por ellos mismos, que la materia que están cursando actualmente de nuevo (son repetidores) se parece sólo en algunas partes a la que cursaron el semestre pasado. Los estudiantes parecen más proclives a realizar operaciones algebraicas o numéricas que al desarrollo de sus capacidades para visualizar y analizar gráficas. Otra cuestión importante es el indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes con el objeto de tener un mejor nivel de partida en la investigación. También se presentaron algunas irregularidades en la puntualidad y la asistencia, sobre todo en la puntualidad, de los estudiantes a las sesiones dedicadas a la investigación. Aún cuando su participación fue de carácter voluntario y con buenas intenciones, no se pudieron corregir este tipo de fallas en el desarrollo de la investigación. La intención a futuro es seguir perfeccionando nuestra investigación corrigiendo aquellos aspectos que pueden ser factores para una mejor evaluación del desempeño de los alumnos.

Referencias Bibliográficas

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), pp. 352–378

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 568-580. México.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). Desarrollo del pensamiento covariacional en un ambiente gráfico dinámico. Hacia una génesis instrumental. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22 (pp. 1671-1680). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Falcade R., Laborde C. y Mariotti M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*. 66, 317–333.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1).

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.

Verillon P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), pp. 77-101.