

CONSTRUYENDO EL SIGNIFICADO DE LA OPERATIVIDAD DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS



Rebeca Flores García, Gustavo Martínez Sierra
rebefg@gmail.com, gmartinezzierra@gmail.com
CICATA – IPN

Resumen

La presente investigación que actualmente realizamos, proyecta articularse al trabajo que en Matemática Educativa se está procurando para generar trabajos en torno a los distintos significados asociados a las fracciones así como a su operatividad. Pretendemos mostrar algunas de las evidencias emergidas a partir de la aplicación de un cuestionario en el que se plantearon situaciones tomadas de un reporte de investigación así como de libros de texto y del programa de estudio del nivel secundaria.

Palabras Clave

fracción, significado, operatividad, número racional.

Introducción

En este escrito se presenta un reporte parcial de nuestra investigación acerca de la construcción de significado de la operatividad con los números fraccionarios en estudiantes de secundaria. Investigación que se desarrolla bajo el enfoque de la aproximación socioepistemológica; la cual considera cuatro dimensiones que determinan la construcción del conocimiento en el ser humano: la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la social. Como lo menciona Cantoral (2002), la aproximación socioepistemológica se plantea como tarea el examen del conocimiento situado, aquél que mira y atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el producto de la estrecha relación entre la epistemología y los factores sociales que la enmarcan.

A través de un análisis del estado del arte, es posible observar que diversos investigadores, como lo refieren Perera y Valdemoros (2007), han reconocido que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como su

aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación. Asimismo Fandiño (2005), también reconoce que la noción de fracción y la operatividad correspondiente son de los contenidos más estudiados desde el inicio de la investigación en Educación Matemática, debido quizá a que (junto con la cuestión relacionada de los números decimales) representan una de las áreas de dificultad más comunes en las escuelas de todo el mundo. En dicha investigación identifica errores “típicos” de los estudiantes, entre éstos las dificultades con las operaciones tanto entre fracciones como entre números racionales, el manejo del adjetivo “igual”, el reconocimiento de los diagramas más comunes y manipulación de equivalencias.

Se reconoce entonces que es necesario conceptualizar a la fracción a través de todos sus significados, puesto que una elección de enseñanza con solamente uno o dos de ellos resulta ser inadecuada, al respecto Lamon (2005) subraya que aun no queda claro cómo es que los distintos significados puedan integrarse en la enseñanza. Por su parte Fandiño reporta al menos catorce significados asociados a la noción de fracción, lo cual dificulta aún más su enseñanza.

Se parte de la idea que D’Amore (2005) señala respecto a la noción de significado, destacando que prevalece una necesidad por clarificar la naturaleza del significado a partir de dos categorías de teorías: las teorías realistas (o figurativas) y las teorías pragmáticas; para la primera retoma lo dicho por Godino y Batanero al ser establecidas como una “relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; mientras que para las segundas destaca que las expresiones lingüísticas tienen significados diferentes según sea el uso y el contexto.

Uno de los objetivos del estudio que estamos realizando es determinar cuántos y cuáles son los significados de la noción de fracción que trascienden en su operatividad, hecho que nos obliga a mirar bajo tres ejes su desarrollo, por un lado lo que otros investigadores han encontrado al respecto, por otro lo que el programa de estudio y los libros de texto señalan que habrá de estudiar el alumno y finalmente las evidencias obtenidas de los estudiantes al resolver un cuestionario exploratorio, construido a través de las revisiones realizadas a algunos trabajos de investigación y retomando algunas situaciones planteadas en los libros de texto revisados.

Metodología

Para la realización de este estudio se consideran elementos tanto de carácter teórico, así como curricular y exploratorio.

En lo teórico se revisan las ideas planteadas por Kieren (1988) al proponer un modelo de construcción de conocimiento a través de una red de subconstructos de número racional que forma un sistema ideal personal de conocimiento acerca del número en referencia, evidenciando una relación entre cinco significados asociados a la noción de fracción: medida, cociente, operador, razón y parte todo. Además lo planteado por Brousseau en Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2008) en donde se señala que desde la década de los 70's se ha desarrollado una exploración con estudiantes de nivel elemental en Francia, para probar que bajo ciertas condiciones, los niños podrían crear, entender, aprender, utilizar y amar algunas matemáticas que tienen la reputación de ser complicadas, centrándose en enseñar todo lo relativo a números decimales y racionales a través de una secuencia de "situaciones" estructurada de manera cuidadosa, buscando ofrecer a los profesores recursos tanto de enseñanza como de aprendizaje como son:

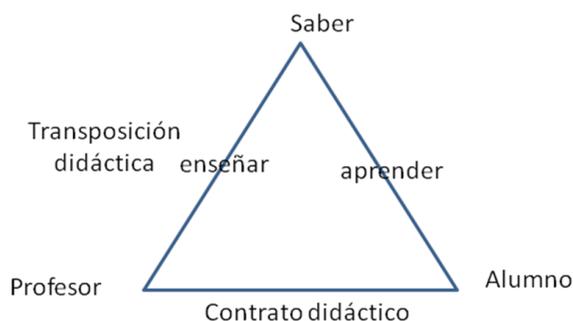
- a) Una enseñanza de nociones matemáticas más cercanas a su definición actual y a los usos de aquellas formas estándares y
- b) La obtención de un aprendizaje de esta matemática como un efecto de actividad matemática más auténtica en la parte correspondiente a los estudiantes.

En el aspecto curricular, en la investigación, se hizo un análisis del Programa de estudios vigente para la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, así como de tres series de libros de texto del mismo nivel, que corresponden a cada uno de los grados escolares del nivel secundaria; esto con la intención de conocer el contenido matemático abordado en este nivel, la estructura de los temas; así como observar la forma en que son presentados los distintos significados vinculados a la noción de fracción.

Con respecto al carácter exploratorio se diseñó y aplicó un cuestionario inicial exploratorio conformado por 6 problemas distintos. La aplicación del cuestionario fue a un grupo de 36 estudiantes (13 hombres y 23 mujeres) que cursaban el primer grado de secundaria, cuyas edades oscilaban entre los 12 y 14 años y quienes se encontraban finalizando el Ciclo Escolar 2008 – 2009

Se reconoce que es importante conceptualizar a la fracción a través de todos sus significados, ¿existirá alguna forma o medio para presentar al estudiante una situación que reúna todos esos significados? Esa interrogante habremos de reflexionarla en este trabajo.

El análisis de las producciones de los estudiantes se realizó contrastando a éstas con lo encontrado tanto en los aspectos teórico y curricular. Ello con la intención de integrar lo encontrado a través del siguiente esquema:



Para el caso que nos ocupa se decidió presentar en este escrito sólo tres de los seis problemas planteados; el análisis completo se reportará al finalizar el trabajo.

Resultados y Discusión

A continuación se muestran algunos resultados de lo encontrado en el programa de estudio, en los libros de texto y en la exploración realizada.

Acerca de lo encontrado en el programa y los libros de texto de primer grado:



Noción de fracción como:	Programa de estudio	Libros de texto		
		Matemáticas 1	Fractal 1	Encuentro con las matemáticas 1
Medida	Ubicación en la recta numérica de fracciones y decimales	Localizar microorganismos en la recta numérica en un intervalo de 0 a 1mm	Ubicar corredores en una pista	Actividad en el que se usa un procedimiento para dividir segmentos en partes iguales
Proporción	Valor faltante Factor constante entero o fraccionario unitario - Regla de 3 - Reparto proporcional	Determinar las dimensiones de piezas de un rompecabezas, duplicar dimensiones y determinar nuevas medidas	Realizar cinco copias a escala del dibujo de una casa.	Determinar la longitud real de un velero.
Operador	Escalas: ampliación o reducción Factor constante fraccionario	Determinar longitudes y áreas de un croquis hecho a escala.	Utilización de factores de escala para ampliar lados de una figura, más del doble, pero menos del triple	Determinar longitudes de células o bacterias utilizando las lentes de un microscopio
Cociente	Reparto proporcional	Reducir un rompecabezas cuyas medidas son números decimales	Repartir en partes iguales una cartulina	Representación de una división a través de dibujos
Porcentaje	Cálculo del IVA Descuentos y aumentos Operaciones bancarias Interpretación de información de gráficas circulares	Calcular el % de cuadritos iluminados de una retícula cuadrada (cuadros de 10 x10)	Elaboración de una tabla de gastos de familia y los porcentajes de ingresos que esos gastos representan	Llenado de una factura con el IVA desglosado
Probabilidad	Cálculo de la probabilidad de un evento	Determinación de la probabilidad de la elaboración de tornillos defectuosos de una fábrica	Calcular la probabilidad de que al lanzar dos monedas salgan dos águilas.	Calcular la probabilidad de obtener un 8 en un lanzamiento en una ruleta
Parte todo	Ubicación de números decimales en la recta numérica	Dividir en partes iguales una superficie o cantidad	Dividir en partes iguales una superficie	Reparto equitativo

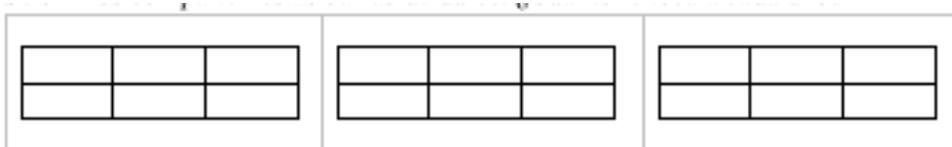
Como podremos observar los libros de texto abordan a través de sus actividades los contenidos señalados en el programa de estudios en torno a algunos de los significados asociados a la fracción, tales como: parte todo, medida, cociente, operador, porcentaje, probabilidad, decimal y proporción. Cabe señalar que en los libros Matemáticas 1 y Fractal 1, en las actividades señaladas para abordar la proporción, se observan evidencias de que

fueron retomadas de tareas que Brousseau en Brousseau, G., Brousseau, N., &Warfield, V. (2008) señala que ha estado explorando con niños de nivel elemental.

Respecto a la operatividad de las fracciones se observa que se introduce inicialmente la suma, la resta no es señalada en el programa – para el primer grado –, los libros de texto la abordan de manera sutil, posteriormente aparece la multiplicación (de fracciones y decimales) ligada con la división pero enfatizándose un lugar especial para los decimales.

Enseguida se muestran algunos de los resultados evidenciados por parte de los estudiantes en de 3 de las 6 situaciones planteadas:

1. Seis niños comparten estas barras de dulce. ¿Cuánto le toca a cada uno?



2. Una mezcla de pintura está compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca representan juntas $\frac{3}{5}$ de la mezcla. La roja es $\frac{1}{4}$ de esos $\frac{3}{5}$. ¿Qué fracción de **toda la mezcla** (Las negritas aparecen en el libro del que se tomó el problema) representa la pintura roja?
3. En dos jarras iguales tenemos una mezcla de agua con jugo de naranja. En una de las jarras, la proporción es de $3:7$; es decir, de 3 partes de agua y 7 de jugo de naranja, mientras que en la otra hay una proporción de $3:5$. Si juntamos el contenido de las dos jarras, ¿cuál será la proporción?

Situaciones caracterizadas en la tabla a continuación:

Una caracterización de los problemas planteados

	Problema 1	Problema 2	Problema 3
<i>Tomado de</i>	Reporte de investigación ¹	Libro de texto: Fractal 1	Libro de texto: Matemáticas 1
<i>Autor (es)</i>	Lamon, S. (1999)	Block, D. et al (2008)	Cantor, R. et al (2008)
<i>N o c i o n e s involucradas</i>	Partición Equivalencia Formación de unidad Parte – todo Cociente Representaciones	Partición Equivalencia Formación de unidad Parte – todo Cociente Representaciones	Partición Equivalencia Formación de unidad Parte – todo Proporción y razón Representaciones
<i>Operaciones</i>	Suma División	Multiplicación	Multiplicación Resta

Lo encontrado en las realizaciones de los estudiantes:

Del problema 1: Concordamos con lo que Lamon (1999) establece, ya que afirma “que una buena forma de presentar la idea de partición es hacerlo visualmente” (p. 78). Bajo esta premisa es como se eligió este problema.

En el trabajo desarrollado por dos estudiantes, se observan las realizaciones expuestas a continuación:

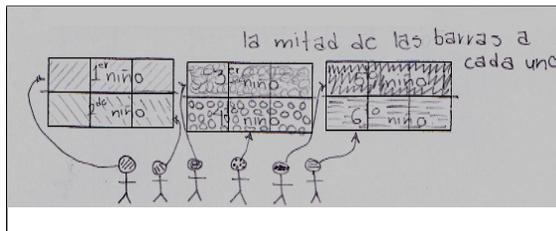


Figura 1

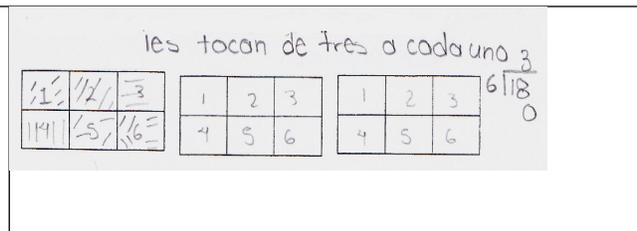


Figura 2

¹ Lamon, S. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Marquette University. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey.

En la Figura 1, la estudiante refiere como respuesta “la mitad de las barras a cada uno”; mientras que en la figura 2, el estudiante señala “3 pedazos cada uno”, esto nos remite a ¿cómo están reflexionando el problema? Por un lado, en la figura 1 se observa el trabajo sobre las tres barras, con marcas para cada tres cuadritos, de manera implícita se deja ver que ha hecho uso de la noción de reparto equitativo y equivalencia al hablar de las mitades de la barra. En la Figura 2, se observa la realización de una división: 18 (total de partes) entre 6 (total de niños), para poder señalar sobre cada barra las 3 partes correspondientes.

Una de las dificultades observadas en las realizaciones de los estudiantes es la identificación del tipo de unidad, al respecto se sugiere ver lo señalado por Lamon (1999, p. 23)

Del problema 2: Identificamos lo que Lamon (1999) señala respecto a la unidad y las comparaciones parte – todo, las cuáles se utilizan para contrastar una o más porciones iguales de una unidad con el número total de porciones iguales en las que se divide a la unidad. Al respecto, presentamos el siguiente caso:

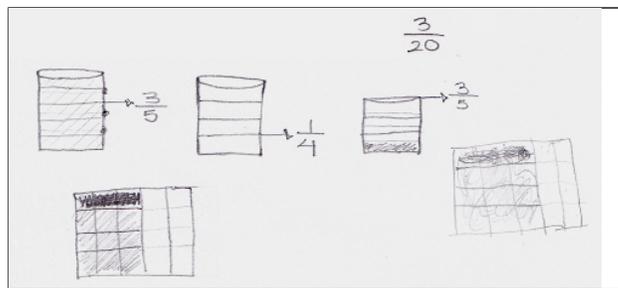


Figura 3

En la respuesta de este estudiante se identifican tres fases en su realización:

a) La primera corresponde a su paso hacia un modelaje del problema, el cual le genera dificultades, ya que su primera unidad la divide en quintos y marca tres de ellas, enseguida dibuja otra unidad pero ahora la divide en cuartos marcando sólo uno. Estos elementos dan cuenta de que esta pensando que su primera unidad, debe ser la misma que la segunda, lo cual más adelante abandona para pasar a otro contexto, el simbólico.

b) La segunda fase sería su paso a una representación simbólica, en la cual encuentra la respuesta.

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$$

c) Aparece una tercera fase, ya que regresa al contexto inicial para modelar una representación que le permita interpretar la información obtenida, como observamos, se apoya del modelo de

áreas para mostrar que $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$ es $\frac{3}{20}$

Entre las dificultades que detectamos, se encuentra la asociada a las cogniciones intuitivas: la inmediatez, al respecto se sugiere ver Fischbein (1994, 103).

Del problema 3: Percibimos que fue uno de los más difíciles de resolver por parte de los estudiantes, debido principalmente a la interpretación lineal que se puede hacer del problema si no se tiene clara la diferencia o relación entre dos nociones como lo son: fracción y razón.

Observemos lo realizado por uno de los estudiantes:

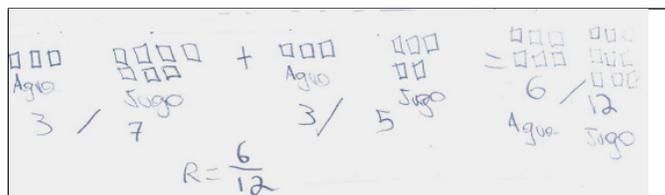


Figura 4

En la realización de este estudiante se percibe que recurre a cierto tipo de representaciones y la idea central descansa en la creencia de que las partes son iguales en las mezclas originales. Se observa la siguiente suma de razones:

$$(3 : 7) + (3 : 5) = (6 : 12)$$



$$(a : b) + (c : d) = (a + c : b + d)$$

Con esto queremos evidenciar algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver ciertos problemas de texto, así como las formas en que podrían establecerse posibles conexiones entre conceptos y operaciones.

Conclusiones

Los resultados hasta el momento obtenidos evidencian la importancia de reflexionar en torno a dos ideas: los significados que son asociados a la noción de fracción y el uso que se le ha dado en un determinado contexto.

Esto debido a que los estudiantes en su mayoría evidencian escasa conexión entre las interpretaciones al momento de hacer uso de ellas en la resolución de algún problema.

Habremos de profundizar acerca de lo que sucede antes de planteamientos de la operación u operaciones realizada por los estudiantes; lo que sucede durante la operatoria y lo que implica el resultado obtenido, así como en lo que se interpreta y si es que lo usan con algún sentido y significado.

Este cuestionario de exploración habrá de posibilitarnos arribar a un argumento que nos permita profundizar en otros de los conceptos que no fueron trabajados en este documento y así orientarnos en el fortalecimiento de las ideas que hemos venido desarrollando.

Bibliografía

Block, D. & García, S. (2008). *Fractal 1. Matemáticas*. Secundaria. México: Ediciones SM.

- Bosch, C. & Gómez, C. (2008). *Encuentro con las matemáticas*. Primero. Secundaria. México: Nuevo México.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 153- 176
- Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15, Tomo 1, 35 - 42. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R., et al. (2008). *Matemáticas 1*. Secundaria. México: Mc Graw Hill.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté.
- Fandiño, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Bologna, Italy.
- Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.
- Lamon, S. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Marquette University. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey.
- Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From Fractions to Rational. En Cuoco, A. (Ed), *The roles of representation in school mathematics*. 2001 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics (pp. 146 - 165) Reston, V.A: National Council of Teacher of Mathematics.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Vol. 2, 162 – 181, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 209–218.
- Secretaría de Educación Pública. (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación básica, Secundaria, Matemáticas*. México.