



Eric Flores Medrano

eflores@cinvestav.mx

Cinvestav-IPN

Resumen

Las últimas dos décadas se ha venido desarrollando, al seno de la Socioepistemología, una línea de investigación conocida como Pensamiento y Lenguaje Variacional, cuyo propósito expreso es tender puentes entre la investigación y el trabajo en aula para la matemática de la variación y cambio. Al paso del tiempo, surge la necesidad de conciliar algunos aspectos que permitan avanzar en este objetivo. Este trabajo es el resultado de una reflexión acerca de dichos aspectos y que surge de una investigación bibliográfica. Se muestra una confrontación de dos formas de abordar algunos problemas de cálculo: del modo tradicional y mediante el empleo de ideas variacionales.

Palabras Clave

Pensamiento Variacional, Práctica Social, Predicción, Estrategia Variacional.

Introducción

En la matemática escolar, el estudio del cálculo se inicia generalmente en el bachillerato y se continúa en las carreras del área de física y matemáticas, incluidas aquí las ingenierías. El enfoque que se maneja en cada una varía de acuerdo a la intencionalidad de la carrera o especialidad, pero en todos los casos se tiene una tendencia hacia la enseñanza tradicionalista que provee de técnicas mecanicistas y definiciones formalistas para los diferentes conceptos.

Esto ha motivado a un gran número de investigaciones que han revelado ciertas carencias en los estudiantes luego de llevar algún curso de cálculo. Los enfoques que se han manejado son diversos y algunos han generado mayor tradición que otros. En particular, en el Cinvestav se ha desarrollado una postura a la cual se ha llamado *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLV) que se encarga del estudio de la matemática de la variación y el cambio desde un enfoque múltiple y

sistémico, que atiende aspectos cognitivos, didácticos, epistemológicos y sociales de la construcción del conocimiento.

El PyLV es una línea de investigación que se albergó, en un inicio, en lo que se llamó *matemática y cognición* (Cantoral, 1999) y, posteriormente en el *acercamiento socioepistemológico* de la construcción del conocimiento (Cantoral, 2000). Se basa en un análisis epistemológico sobre las prácticas que desarrollan al cálculo, del cual se obtiene que la *Práctica Social* que está presente en dicha construcción es la *Predicción*. Más aún, son los procesos de cambio estudiados a través de su variación los que la guían. Esto da una postura privilegiada a la serie de Taylor como instrumento sintetizador para la construcción y desarrollo de los elementos del cálculo (Cantoral y Farfán, 1998).

Desde la década pasada, se han consolidado varios proyectos de investigación en esta línea financiados por organismos nacionales de relevancia. Tal es el caso de: a) *Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado, Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional*; b) *Desarrollo del Pensamiento Variacional en situación escolar*; c) *Los significados del Lenguaje Variacional en el aprendizaje de la matemática*, por mencionar algunos.

Como resultado de una revisión bibliográfica se nota la necesidad de *caracterizar* al PyLV (Aquí no se considera la acepción de PyLV como una línea de investigación, si no como el tipo de pensamiento con el que una persona enfrenta problemas de variación en la escuela o fuera de ella, así como el lenguaje propio que esto requiere.) con la finalidad de precisar algunos elementos que lo conforman para, posteriormente, crear mecanismos de evaluación de su desarrollo. Este trabajo es el avance de una investigación que pretende realizar dicha caracterización.

Hay, en PyLV, cuatro clases de trabajos principalmente, a saber, aquellos que evidencian un escaso desarrollo del pensamiento variacional como resultado de los cursos tradicionales de la asignatura en la que se sitúen (e. g., Dolores, 1998a); aquellos que proporcionan enfoques mediante los cuales se desarrolla el PyLV (e. g., Cantoral & González, 1999), aquellos que

describen elementos teóricos subyacentes en la línea de investigación y necesarios para el desarrollo de la misma (e. g., Cantoral, 1999; Dolores, 2000) y, finalmente, aquellos que pretenden afectar el sistema escolar de manera inmediata (e. g., Alanís, 1996). Todo esto en el entendido de que un mismo trabajo puede atender a más de uno de estos tipos de desarrollos. Si bien es cierto que muchos de los problemas que se plantean en el diseño de las situaciones para dichas investigaciones pueden solucionarse sin el uso de estrategias variacionales (Algunas estrategias variacionales son la estimación, la comparación, la predicción, la aproximación y la acotación" (González, 1999, pág. 36), también es cierto que éstas propician una solución con comprensión, que ayuda en la construcción de los conceptos, ya que éstos tienen su germen en la variación (Dolores, 1998b). Además, dichas estrategias, en algunos casos, también facilitan el camino de solución.

En este trabajo se abordan, precisamente, una serie de *problemas clásicos* que se han usado en las investigaciones y otros problemas inéditos. De ellos se realiza un contraste entre lo que propicia una solución mediante ideas variacionales y otra con otras estrategias. Se buscará responder a las preguntas: ¿por qué esos problemas pueden formar parte de la línea Pensamiento y Lenguaje Variacional? y ¿cómo las ideas variacionales usadas en su solución ayudan en la construcción del conocimiento involucrado?, ya que se cree que responder a éstas ayudará en la caracterización de que es objeto esta investigación.

Metodología

Para este trabajo se realizó una investigación bibliográfica. Se recopilaron los trabajos, publicaciones y tesis que, expresamente, abordaran aspectos del pensamiento y lenguaje variacional. Como ya se mencionó anteriormente, se clasificaron en cuatro grandes grupos: los que evidencian un escaso desarrollo del pensamiento variacional como resultado de los cursos tradicionales de la asignatura en la que se sitúen; los que proporcionan enfoques mediante los cuales se desarrolla el pensamiento y lenguaje variacional; aquellos que describen elementos teóricos subyacentes en la línea de investigación y necesarios para el desarrollo de la misma, y los que pretenden afectar el sistema escolar de manera inmediata.

Se buscaron aspectos comunes en las investigaciones y, entre ellos, resultaron una serie de problemas utilizados en las situaciones de distintas investigaciones para comprobar sus hipótesis. Se decidió analizar a estos pues sintetizan y sirven de base de cierto modo para los problemas usados en otras investigaciones. Ello llevo a dos preguntas principalmente:

- a) *¿Por qué este problema puede formar parte de las investigaciones de Pensamiento y Lenguaje Variacional?*
- b) *¿Cómo las ideas variacionales involucradas en el planteamiento de la solución de éstos, provee de elementos para la construcción del conocimiento del cálculo?*

Una vez abordadas estas dos cuestiones para diversos problemas, fue necesario enfrentar la tarea de construir otros problemas que rescataran y ampliaran las características encontradas en los anteriores.

Resultados

Los problemas que se eligieron son los que representan, de mejor forma, a una cantidad considerable de reactivos usados en las investigaciones. Las soluciones son tomadas de las mismas investigaciones y no serán reportadas aquí pues se prefieren resaltar algunos detalles de la potencialidad que ofrece el uso de estrategias variacionales.

Un problema que se ha reportado en varios trabajos (e. g. Cantoral y Farfán, 1998; González, 1999) consiste en un conjunto de cuatro tareas en las que se debe ubicar, para cuatro gráficas idénticas (Imagen 1), la porción en la que se cumpla:

- i) $f(x) > 0$
- ii) $f'(x) > 0$
- iii) $f''(x) > 0$
- iv) $f'''(x) > 0$

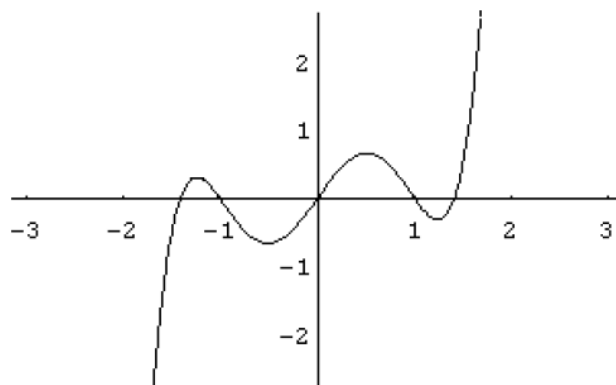


Imagen 1

El objetivo de esta puesta en escena es “que sus respuestas [de los participantes] nos indiquen las estrategias variacionales que utilizan y las formas en cómo argumentan su elección frente a sus compañeros de clase.” (Cantoral y Farfán, 1998, pág. 8)

Se concluyó, a partir de las investigaciones, que el estudiante comprende a la derivada como la primera derivada y las de orden superior como una iteración de ella (González, 1999). Es decir, el problema anterior se enfrenta comúnmente considerando $f'(x)$ como la pendiente, $f''(x)$ como la concavidad, pero sin tener un prototipo para $f'''(x)$ y teniendo que recurrir a la pendiente de nueva cuenta. García (2003) encuentra una forma de significar a la tercera derivada mediante el uso de una estrategia geométrica-variacional basada en curvaturas, la cual no necesariamente resuelve el problema aquí planteado, pero que sirve para desarrollar el pensamiento variacional. González (1999) utiliza una estrategia de comparación con la cual resuelve el problema pero para un caso específico, a saber, cuando los puntos máximos y mínimos forman una simetría en la gráfica de la función.

El uso de estrategias variacionales, en este caso la de comparación por la naturaleza del problema, es necesario para estabilizar la noción de derivada a partir de la comprensión de las derivadas sucesivas.

Otro problema al que se recurre con frecuencia para ejemplificar el tipo de situaciones que requieren de un acercamiento variacional (e. g. Cantoral, 1997, Cáceres, 1997) es el saber la certeza de que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{10^{10}} = 0$. Cuando en los límites, las indeterminaciones del tipo ∞/∞ son el resultado del cociente de dos polinomios, tradicionalmente se recurre a un proceso algebraico con el cual se resuelve el problema. Pero para este caso, en el que dicho proceso no es viable, es necesario recurrir a velocidades de crecimiento de las funciones, y para ello, a argumentos variacionales. En otras palabras, el PyLV es indispensable para dar sentido a la solución de indeterminaciones en los límites. Otro ejemplo detallado de este punto se muestra en Navarro (2004).

Para la tarea de construir problemas que pudieran pertenecer a la línea de investigación y que dieran evidencia de la potencialidad que se desarrolla del uso de estrategias variacionales en su solución, surgen el demostrar que la función logaritmo no es acotada y el dar una demostración del teorema del valor medio mediante el uso de ideas variacionales.

Conclusiones

En la didáctica del Cálculo, se han tenido diversos enfoques y, por tanto, diversas formas de mirar una problemática. El PyLV es uno de ellos, en el que se investiga con base en una organización sistémica de los planos cognitivo, epistemológico, didáctico y social. Esto ha permitido desarrollar secuencias guiadas por un hilo conductor, a saber, la *Predicción*, que permiten acceder a un conocimiento funcional (Se entiende por conocimiento funcional a aquel que se desarrolla e integra a la vida para transformarla y reconstruir permanentemente significados. (Cordero, 2006)).

En resumen, se puede plantear que el PyLV no pretende estudiar una buena forma de enseñar los conceptos que han sido atendidos en el cálculo dentro de la matemática escolar, más bien, quita la atención al objeto y pretende proponer una reorganización del currículo basado en prácticas.

La variedad de problemas que se presentan en la revisión de los trabajos de esta línea de investigación dan luces de que, para hablar del desarrollo del PyLV, no basta mirar la problemática dentro de algún tópico en la escuela, sino que se requiere ver cómo esto afecta al cotidiano del ciudadano. Es decir, el PyLV se desarrolla en distintos planos, entender esto logra significar la importancia de desarrollar un currículo basado en prácticas.

Los problemas que se presentaron son sólo una porción de aquellos que representan el basto y diverso trabajo que se ha realizado en esta línea y el propósito de abordarlos fue el rescatar algunas características que pudieran considerarse para el PyLV.

Bibliografía

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Tesis Doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN.

Cáceres, T. (1997). *Pensamiento y Lenguaje Variacional. Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años*. Tesis de maestría no publicada. México, D. F.: Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y Lenguaje Variacional. Cuadernos del Seminario de Investigación del área de educación superior del Departamento de matemática educativa*. México: Cinvestav-IPN

Cantoral, R. (1999). *Pensamiento y Lenguaje Variacional en la enseñanza contemporánea*. En G. García (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12(1)*, (pp.41-48). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional.

Cantoral, R. (2000). *Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa*, En A. Tavarez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13(1)*, (pp.54–62). Santo Domingo, República Dominicana: Universidad Autónoma de Santo Domingo

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y Lenguaje Variacional en la introducción al análisis*. *Épsilon, Revista Española de educación matemática 42*, 353 – 369.

Cantoral, R. y González, R. (1999). *Diseño de situaciones didácticas de resignificación: el caso de la derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. En R. Farfán, J. Lezama, A. Arellano, E. Oaxaca (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12(1)*, (pp.11 – 14). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

Dolores, C. (1998a). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de cálculo. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272).. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1998b). El desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situación escolar, En R. Farfán, J. Lezama, A. Arellano, E. Oaxaca (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11*, (pp.6-10). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000). Algunos elementos acerca de la variación, En A. Tavarez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13(1)*, (pp. 88-95). Universidad Autónoma de Santo Domingo, Santo Domingo, República Dominicana.