

ARGUMENTACIONES DE LOS ESTUDIANTES EN LA MODELACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN DE LA LEY DE TORRICELLI



Hipólito Hernández Pérez, Alma Rosa Pérez Trujillo. Ángeles A. Ordoñez Morales

Universidad Autónoma de Chiapas

Polito_hernandez@hotmail.com, almarpt@hotmail.com, anlejandra@hotmail.com

Resumen

En el presente trabajo reportamos una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley. El objetivo de la práctica en clase es verificar experimentalmente que se cumplen las condiciones para la aplicación de la ley de Torricelli y estudiar la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de líquido en un depósito. La experiencia que se aporta es que como profesores debemos de buscar alternativas de enseñanza-aprendizaje con la finalidad que los estudiantes realicen modelación matemática y comprueben experimentalmente el comportamiento del fenómeno físico.

Palabras claves

Experiencia, modelación matemática, experimentación

Introducción

Investigaciones recientes de la matemática educativa han tomado como objeto de estudio el fenómeno didáctico que se genera en la matemática escolar, y como un marco de referencia para su estudio la aproximación socioepistemológica o epistemología de las prácticas sociales en la reconstrucción del Cálculo y física escolar.

La enseñanza y la matemática tienen su importancia en la sociedad contemporánea; a través del tiempo las sociedades e instituciones y los grupos de investigadores en esta rama se han dado a la tarea de incorporar a la matemática y a la ciencia en la culturización de la sociedad con la

intención de favorecer a la población una visión científica del mundo. En este proceso se ha llegado a implementar modificaciones en los sistemas educativos en el campo particular de las matemáticas, con base en diseños mejor adaptados a la prácticas escolares, en esta sistematización se ocupa la matemática educativa, que han desarrollado los grupos de investigadores Mexicanos como un proceso de institucionalización disciplinar en los diversos espacios y eventos. Desde esta perspectiva, la matemática educativa es entonces una disciplina que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático. Asumiendo como problemática a los fenómenos didácticos de saberes matemáticos surgidos de las prácticas no escolares que entran en los sistemas de enseñanza y causan modificaciones en su estructura y en su funcionalidad, así como las relaciones de profesor-alumno. Estos procesos requieren para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados con la finalidad de entender los mecanismos de la adaptación de los saberes matemáticos y del saber científico a las prácticas tanto de los profesores como de los alumnos (Cantoral y Farfán, 2003).

Con base en lo anterior, en el presente trabajo reportamos una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se calcula la variación de la columna de un líquido con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio, análogo a "La velocidad de un líquido en un recipiente, por un orificio, es la que tendría un cuerpo cualquiera, cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio".

El objetivo de este trabajo y de la práctica en clase es de ver un enfoque diferente a como se estudia las ecuaciones diferenciales, es decir, que a través del experimento los estudiantes argumenten y comparen los resultados obtenidos tanto experimentalmente como analíticamente y tener elementos de análisis para establecer la ley de torricelli, estudiar la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de líquido en un depósito. Entre las contribuciones científicas de Torricelli, se halla que las velocidades del agua que sale de un

tanque perforado son proporcionales a la raíz cuadrada de las profundidades por debajo de la superficie libre de los orificios correspondientes (Levi, E. 1989; Zill, 2007).

En esta experiencia abordaremos a la modelación tanto analítica y grafica como una construcción del conocimiento de un individuo cuando se enfrenta a una tarea matemática en la que pone en juego su saber en la contextualización de fenómenos físicos. La finalidad es caracterizar los fenómenos físicos por medio de las prácticas sociales a fin de diseñar situaciones que involucren la modelación matemática en sus enfoques tanto numérico, gráfico y analítico con el propósito de construir un conocimiento matemático funcional que deberá integrarse a la vida para trasformarla (Solís, Hernández, Muñoz, Pierre, Ordoñez, Pérez, 2009).

En la investigación de Hernández (2006) reporta un análisis epistemológico de la matemátización del movimiento, tanto de un cuerpo o de un flujo de agua, considerando los estudios realizados por los científicos del colegio de Merton, de Oresme, Galileo y Newton, considerando a la predicción como práctica social de predecir el movimiento de un cuerpo a partir de un estado inicial y un estado posterior. El análisis de un desarrollo histórico del conocimiento matemático, de su inmersión en el sistema didáctico y de una caracterización de las producciones de los estudiantes, se identifican las prácticas de referencia arraigadas a la naturaleza de ese mismo conocimiento y se proponen secuencias didácticas de modelación matemática entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas (Suárez y Cordero, 2008).

Metodología

En la práctica se utilizó los siguientes materiales: un recipiente (bote) con un litro de agua, cronómetro, regla graduada y herramienta para hacer agujero, además se describe el diseño y proceso del experimento y se proporciona la técnica que permita su reproducción.

Procedimiento



- 1) En la lata de un litro, señalamos con claridad el punto específico del orificio que utilizaremos para demostrar la teoría, esta debe estar ubicada a punta de pie del depósito cilíndrico.
- 2) Utilizando el taladro perforamos en el punto establecido con una broca adecuada a la circunferencia que deseamos hacer.
- 3) Medimos la dimensión de la circunferencia de abertura de la lata y del agujero hecho.
- 4) Llenamos el depósito cilíndrico con agua, tapando con el dedo el orificio hecho en la parte inferior de dicho material.
- 5) Medimos la altura del agua concentrada en la lata.
- 6) Introducimos la regla en el depósito de agua.
- 7) La altura máxima se encuentra establecida al tiempo cero y a partir de esta destapamos el orificio y corremos el cronómetro.
- 8) Nuestros intervalos de tiempo usados son de 5 segundos por lo cual en cada intervalo recorrido medimos la altura del agua alcanzada por la precipitación de dicho elemento.
- 9) Durante el proceso de vaciado se construye una tabla con los valores del tiempo transcurrido y la altura de líquido en el depósito. No obstante, la representación gráfica que se debe realizar es tiempo (segundos), en el eje de abscisas, y la altura del líquido en el depósito (altura en centímetros), en el eje de ordenadas
- 10) Realizamos analíticamente el cálculo de los valores que se obtienen mediante el empleo de la ecuación de Torricelli y comprobamos la veracidad del experimento, y por tanto se deduce que la velocidad cambia con la altura.
- 11) Por último con la tabla de valores obtenidas, lo trasladamos a un plano coordenado, para observar las variaciones que ocurren entre la velocidad con respecto a la altura.

Resultados

Reportamos el resultado del experimento de un equipo formado por 5 estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales de la licenciatura de ingeniería civil de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas, trabajaron 3 equipos más y llegan a resultados análogos. Las siguientes imágenes muestran parte del proceso experimental que se llevo a cabo para demostrar la ley de Torricelli.



Medición del nivel del agua concentrada en el recipiente cilíndrico.



Poca presión del agua debido a la altura de la misma dentro del recipiente.



Mayor presión del agua en los primeros intervalos de tiempo.



Drenado y medición del nivel de agua en intervalos de 5 segundos.

En la modelación matemática consideramos el área del bote y la sección transversal del orificio hecho en la parte inferior del recipiente: A_h área del orificio pequeño, A área superior del bote. Por tanto el modelo matemático es .

Considerando la condición inicial, para el tiempo segundos y la altura de agua en bote es de 16.3 centímetros, donde la constante de integración es . Por tanto, en la tabla 1, se tienen los datos de las mediciones obtenidas de la práctica y los datos calculados en forma analítica.

Calculo analítico

Presentamos un cálculo realizado por el equipo y análogamente hicieron todos los cálculos que se presentan en la tabla 1, que corresponden los datos tanto experimental y teóricos. Donde el área del orificio es $A_h = \pi r_h^2$, y el área del bote en forma cilíndrica es $A_w = \pi r_w^2$, resolviendo la ecuación diferencial y sustituyendo los datos se tiene:

Si $t=0$, y $h=16.3$ cm. Se obtiene el valor la constante de la ecuación diferencial

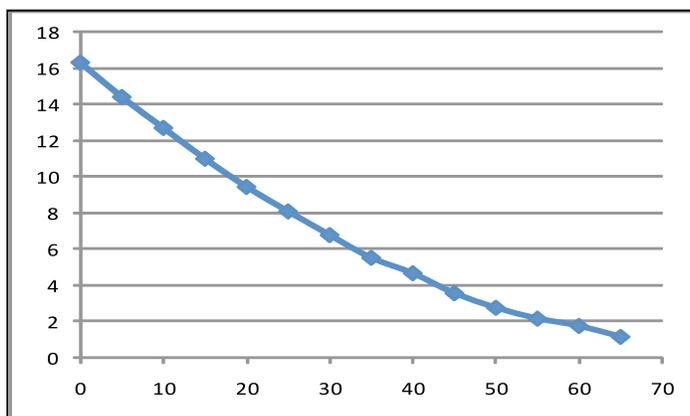
Sustituyendo los valores del área del orificio y del recipiente, el valor de la constante, el valor de la aceleración de la gravedad y los valores del tiempo. Se obtiene:

$$h = (-0.282743/2(124.69) (5) + 8.07465/2)^2$$

$$h = (-0.0011337 (221.4723) + 4.037325)^2$$

$$h = 14.33 \text{ cm.}$$

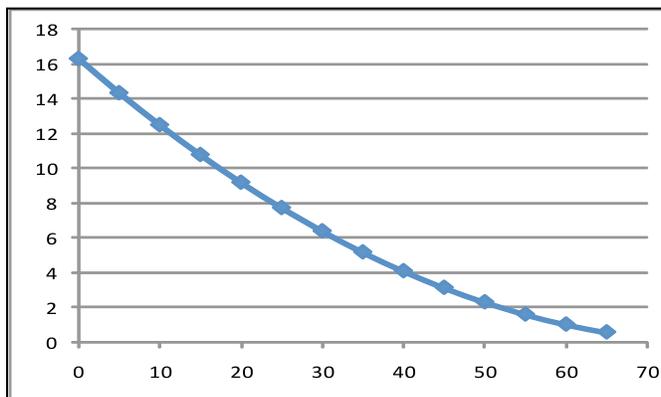
En el experimento se realizó mediciones de tiempo por intervalos de 5 segundos y la variación de la altura del agua en la cual se generó una tabla de valores para obtener su gráfica y hacer la comparación entre los cálculos analíticos y el experimental de la variación de la velocidad con respecto a la altura y obtener la comprobación del teorema de Torricelli.



Gráfica 1. Representa los datos experimentales, el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la altura de agua en el recipiente.

| t (seg) | Altura del agua (cm) | |
|------------|----------------------|------------|
| | D a t o s | |
| | experimentales | Analítica |
| 0 | 16.3 | 16.3 |
| 5 | 14.4 | 14.3354877 |
| 10 | 12.7 | 12.4970804 |
| 15 | 11 | 10.7847778 |
| 20 | 9.45 | 9.19858018 |
| 25 | 8.1 | 7.73848738 |
| 30 | 6.8 | 6.40449945 |
| 35 | 5.55 | 5.19661638 |
| 40 | 4.7 | 4.11483817 |
| 45 | 3.6 | 3.15916483 |
| 50 | 2.8 | 2.32959634 |
| 55 | 2.2 | 1.62613272 |
| 60 | 1.8 | 1.04877397 |
| 65 | 1.2 | 0.59752008 |

Tabla 1. Valores experimentales y teóricos



Gráfica 2. Representa los datos teóricos, el eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical representa la altura de agua en el recipiente.

Discusión

A partir del análisis de un desarrollo histórico del conocimiento matemático de la matematización del movimiento de flujo de agua y su inmersión en el sistema didáctico y de una caracterización de las producciones de los estudiantes, se identifican las prácticas de referencia arraigadas a la naturaleza de ese mismo conocimiento. Por tanto, el presente trabajo reporta una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se compara los datos experimentales y los datos calculados teóricamente de la variación de la columna de agua con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio.

Conclusiones

Al culminar el proceso experimental de la ley de Torricelli, y de realizar los cálculos analíticos con la ecuación diferencial que esta nos proporciona, el equipo puede concluir que esta ley es totalmente cierta, pues los resultados obtenidos en la práctica se asemejan a los cálculos

analíticos, al mismo tiempo estamos conscientes de que no es posible llegar a tener los resultados de la práctica idénticos al proceso analítico, ya que siempre hay un rango de error en el que influyen diversos factores, pero los resultados nos parecen satisfactorios, porque tomando en cuenta estos factores el experimento aun se acerca mucho al valor real. La experiencia que se aporta es que como profesores debemos de buscar alternativas de enseñanza - aprendizaje con la finalidad de que los estudiantes realicen modelación matemática y comprueben experimentalmente el comportamiento del fenómeno físico.

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *Matemática educativa: Una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa 6(2), 27-40.

Levi, E. (1989). *El agua según la ciencia*. México. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Ediciones Castell Mexica, S. A.

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría, UNACH, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3, 1, pp 51 – 58, <http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/>

Solís, E., Hernández, H., Muñoz, G., Pierre, P., Ordoñez, A., Pérez, A. (2009). Situaciones de modelación para resignificar el conocimiento matemático en ingeniería. *Resúmenes de la Vigésima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santo Domingo, República Dominicana.

Zill, D. (2007). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Editorial Iberoamericana.