



Florida Pastrana, Flor M. Rodríguez

Universidad Autónoma de Guerrero

flor_jua_10@hotmail.com, flormonr@hotmail.com

Resumen

Algunas investigaciones en nuestra disciplina, muestran la importancia de la enseñanza de los métodos de aproximación en el sistema escolar debido a sus aplicaciones prácticas, sin embargo, enfatizan en el poco tratamiento de éstos, puesto que se tiende a favorecer a los métodos exactos. Probablemente ésta sea una razón por la que los estudiantes presentan dificultades para comprender la esencia del análisis numérico, ya que están acostumbrados a encontrar soluciones exactas y para ellos es una sorpresa trabajar con soluciones aproximadas, lo cual genera un ambiente de inseguridad. Por lo anterior, nuestro trabajo centra su atención en un particular método de aproximación, a saber, el método de Punto Fijo. Específicamente, se pretende indagar si estudiantes de nivel superior recurren a la hipótesis fundamental del Teorema de Punto Fijo², para decidir convergencia o divergencia en la resolución de ecuaciones de 2do y 3er grado, enfatizando en aspectos visuales, al seno de la aproximación socioepistemológica.

Palabras clave

Punto Fijo, Socioepistemología, Visualización.

Introducción

El avance científico de la sociedad propicia que la enseñanza en general y específicamente de las matemáticas tenga modificaciones pedagógicas, por esta razón la disciplina de la matemática educativa se encarga, entre otras cosas, de estudiar los fenómenos didácticos que se presentan en esta área de conocimiento. Ahora bien, aunque se han realizado muchas investigaciones para

favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje, las dificultades por parte de los estudiantes en dichos procesos, sigue siendo objeto de estudio.

Con la finalidad de contribuir en nuestra disciplina, es que particularmente, nos enfocamos en trabajar en un problema asociado con el tema de los métodos de aproximación, puesto que en la vida diaria y, concretamente en la vida escolar se presentan problemas que se modelan mediante ecuaciones complejas para las cuales no existen fórmulas predeterminadas de resolución y es en estos casos dónde se hace uso de dichos métodos.

De acuerdo con Vilenkin (1984), la relevancia del estudio de los métodos de aproximación radica en su utilidad práctica, razón por la cual el tema está presente en el currículo escolar, sin embargo, menciona también que se puede observar frecuentemente, que un egresado de una escuela superior en la que cursó matemáticas presenta dificultades para resolver una ecuación trascendente sencilla.

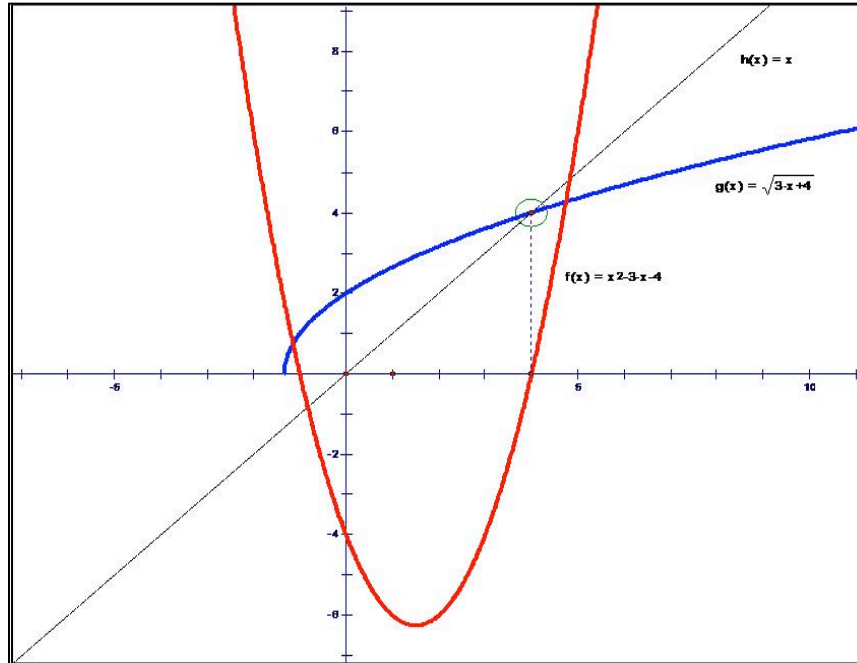
Ahora bien, como parte de nuestros antecedentes, analizamos algunas investigaciones referentes a nuestro tema de estudio, entre ellas la de Aparicio, Cantoral y Rodríguez-Vásquez (2003), en donde se plantea que la enseñanza de las matemáticas tiende a favorecer los métodos “exactos” por sobre los aproximados, exceptuando en ocasiones las actividades creadoras de conocimiento. En nuestra opinión, en efecto, se puede observar en los planes y programas de estudio de licenciaturas a fin con la matemática, que el tema de métodos de aproximación a raíces de ecuaciones no lineales se le da un tratamiento mínimo en comparación con los métodos exactos.

Otra investigación al respecto de nuestros antecedentes es la de Rodríguez-Vásquez & Sierra (2006), quienes desarrollan una investigación de corte histórica, la cual menciona que los métodos de aproximación han evolucionado con base al tratamiento de la derivada a lo largo de la historia.

También encontramos investigaciones de corte didáctico como la de Astiz, et al. (2003), en donde se relata una experiencia docente realizada en un curso de Análisis Numérico en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Plata, Argentina, enfatizando en el uso de la tecnología, más específicamente en el uso del programa Derive. La experiencia se realizó en un curso de segundo año de las carreras de Licenciatura y profesor en matemáticas que contenía 30 alumnos. El tema seleccionado fue el Método del Punto fijo.

La metodología empleada, consistió en implementar una dinámica de trabajo a partir de la resolución de problemas, promoviendo en los estudiantes el aprendizaje por descubrimiento, en donde los estudiantes se enfrenten de manera individual y grupal, generando así un ambiente de discusión e intercambio de ideas. Los docentes explicaron el tema desarrollando la intuición a través de la visualización gráfica, describiendo y analizando de manera teórica y práctica. El trabajo del docente fue favorecer el análisis y la confrontación de los resultados obtenidos por los estudiantes.

La clase inició en hacer observar a los alumnos mediante un ejemplo, que la resolución de una ecuación del tipo $ax + b = c$ es equivalente a resolver la ecuación despejando x de la ecuación original, les pidieron a los estudiantes realizar una representación gráfica de las funciones involucradas y la recta identidad, como se muestra a continuación:



Gráfica1.

Posteriormente explicaron el algoritmo del método detalladamente, en el que los alumnos no presentaron complicaciones, sin embargo, mostraron dificultad al interpretar cómo se aproxima la sucesión a la raíz. Después les propusieron a los estudiantes hacer varios despejes de la ecuación, para así tener varias opciones de , mostrando con ello que no todas las opciones llevan a la solución, con esto, se pretende hacer notar la importancia de la hipótesis del Teorema del Punto Fijo en la convergencia.

Finalmente, los autores reportan que los estudiantes presentan dificultades para comprender que la resolución de los conduce a la solución de , así como para seleccionar la conveniente. Concluyendo también, que promover un ámbito de trabajo basado en la discusión, reflexión, visualización gráfica y potencialidad para el cálculo que ofrece la computadora, posibilita la obtención de logros muy difíciles de alcanzar en las clases tradicionales.

En la misma dirección, Rodríguez-Vásquez (2003), se interesó por investigar el papel que juega la visualización en la construcción de significados por parte de los estudiantes, cuando trabajan con el concepto de convergencia de las funciones iteradas con apoyo de una interpretación del Teorema del Punto Fijo. Esta investigación reconoció que la ausencia de significados de los conceptos fundamentales matemáticos y el dominio de éstos en el nivel medio superior y superior constituyen una problemática en la vida escolar. Asumiendo que los educandos no están familiarizados con los conceptos básicos, como para dominarlos y darles uso en el tratamiento de conocimientos matemáticos avanzados.

La hipótesis de este trabajo, reside en considerar que aunque los estudiantes dominan las técnicas para decidir convergencia y divergencia de una iteración, algunos no acuden sistemáticamente a “la inclinación de la gráfica” como un elemento visual para sus predicciones.

Los soportes teóricos que sustentaron su trabajo fueron la Teoría de Situaciones Didácticas y la Aproximación Socioepistemológica, la primera porque esa teoría sostiene que el conocimiento de un individuo se genera a partir de las abstracciones que hace del medio, adaptándolo al mismo y la segunda porque sostiene que las actividades de prácticas sociales son las que producen conocimiento en este caso, la predicción es utilizada como práctica social para sustentar fenómenos con propiedades visuales, específicamente, la inclinación de la tangente.

La Metodología que se utilizó fue la Ingeniería Didáctica. Realizó una serie de actividades, en la que buscó intervenir en la reconstrucción de significados asociados al teorema del punto fijo.

La autora planteó un diseño de situación al proceso de convergencia, cuando éste es tratado a partir de las funciones iteradas tal y como se plantea en dicho teorema. Con el diseño, primero buscó conocer cómo asimila el estudiante la noción del punto fijo, puesto que considera que darle sentido al significado de esta noción es como un primer paso para establecer la resignificación del punto fijo. Asimismo pretendió saber cómo asimila la noción de convergencia y de derivada. Luego, planteó una situación de acción en la cual el estudiante conviene estudiar el contenido matemático referente a los conceptos de punto fijo, convergencia y derivada. Con

ello pretendió que los estudiantes descubrieran la intención planteada a partir de una situación de formulación, en la cual, se incite al estudiante a la revelación explícita del contenido en la primera situación. Y finalmente, en la situación de validación buscó que el estudiante viablemente tratará de dar significado propio, al objeto matemático en cuestión. Bajo estos tres momentos intentó que el estudiante reconociera la propiedad de predicción.

En conclusión se obtuvo que existan dificultades en la construcción del conocimiento, comprobó el hecho de ignorar a una sucesión como una función, puesto que se recurre al tratamiento de sucesión como una serie de cálculos recursivos de valores. Asimismo, detectó que el proceso de iteración de una función responde a un algoritmo mecanizado, es decir, es vista como un objeto y no como un proceso en sí. Otra de las dificultades que establece es sobre el manejo de contextos de representación.

Además de señalar que la predicción que se generó en las actividades de validación no descarta a la visualización como un medio para la toma de sus decisiones, lo cual la hizo reflexionar en verla como un asunto que estimula el pensamiento matemático en las prácticas educativas.

Sin embargo, se encontró que la visualización es necesaria para el tratamiento de contenidos escolares puesto que ella es presenciada en todo momento de iteración escolar, razón por la cual debe darse un seguimiento a su desarrollo con el objeto de ver favorecidos los aprendizajes.

De esta última investigación, surge el interés de indagar si los estudiantes recurren a la hipótesis señalada en el Teorema de Punto Fijo para decidir convergencia en la resolución de ecuaciones de 2do y 3er grado, así como describir de qué forma lo hacen, cuando se hace énfasis en aspectos visuales.

De aquí que nuestro trabajo radique en la realización de un diseño de actividades con el fin de observar si los estudiantes recurren visualmente al comportamiento de la recta tangente

mencionada en dicho teorema para predecir convergencia o no a la solución de una ecuación de 2^{do} y 3^{er} grado.

En consecuencia, hemos optado por visualización como el proceso que habilita para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. Donde la visualización en este sentido no significa ver a los objetos como diferentes registros de representación, sino además se precisa de una actividad donde se construyan argumentos a partir del lenguaje y las actividades del estudiante (Cantoral & Montiel, 2001).

MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Creemos conveniente mencionar que para el uso de esta técnica de aproximación se debe considerar lo siguiente:

- No es necesario especificar un intervalo que contenga a la solución.
- Es necesaria la continuidad de f .
- Se puede resolver cualquier tipo de ecuaciones.
- La sucesión construida por iteraciones puede no converger.

Algoritmo:

1. Dada una función f convertirla de la forma $f(x) = 0$ a la forma $x = g(x)$.
2. Existen dos maneras de realizar esta operación:
 - $g(x) = \frac{c}{a}$ Agregar de ambos lados de la ecuación una a .
 - Despejar la x del término de primer grado de la ecuación.
3. Elegir un valor inicial x_0 . Y éste será la primera aproximación.
4. Obtener una nueva aproximación x_{n+1} evaluando en la fórmula general del método $x_{n+1} = g(x_n)$.

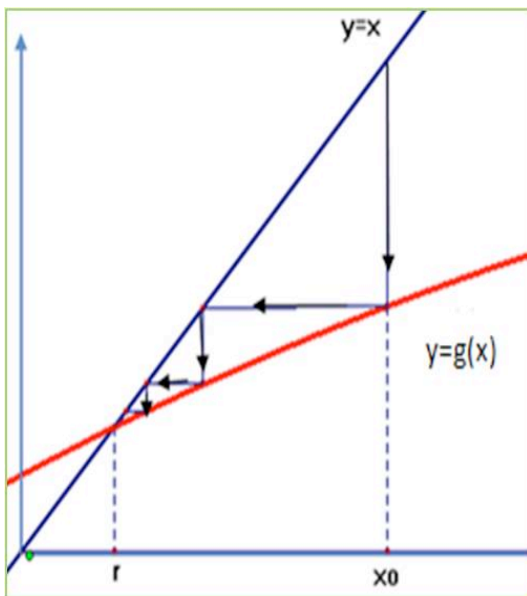
5. Así sucesivamente hasta que se obtenga la precisión deseada.

Teorema del Punto Fijo

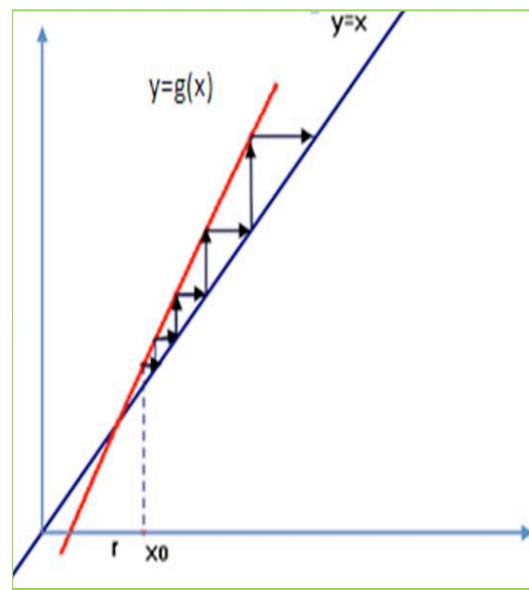
Sea f tal que $|f(x) - x| < r$ para toda x . Además supongamos que existe f' y una constante positiva k tales que

Entonces para cualquier número x_0 la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge al único punto fijo α .

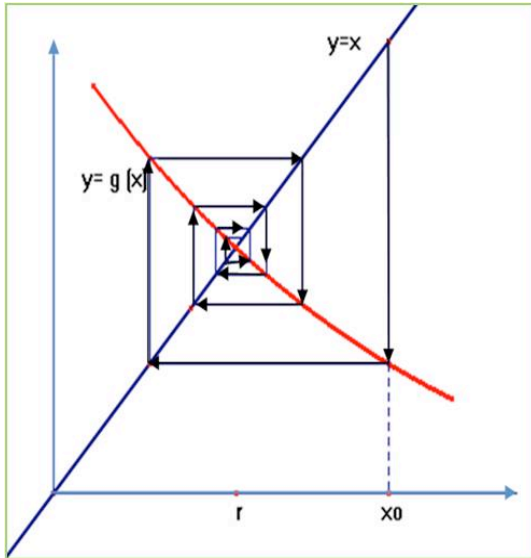
A este respecto, consideramos importante mostrar gráficamente los casos en que se puede tener convergencia o divergencia con el método del punto fijo:



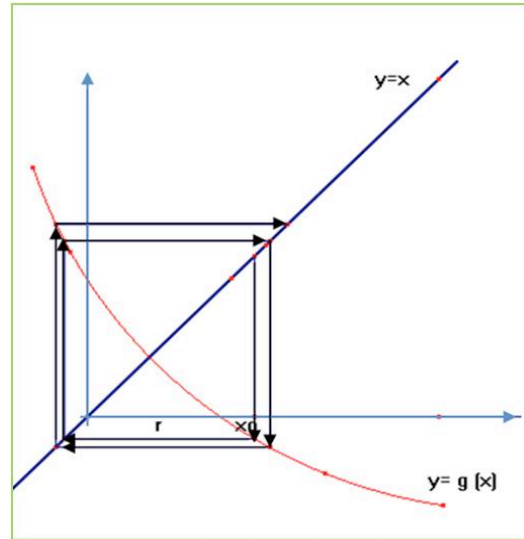
Gráfica 2.1.



Gráfica 2.2.



Gráfica 2.3.



Gráfica 2.4.

Referente teórico-metodológico

Adoptaremos como sustento teórico de nuestra investigación a la Socioepistemología, debido a que es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. (Cantoral & Farfán, 2003).

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas e intervenir en el sistema didáctico al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpora el estudio de la epistemología, el conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003, citado en Cantoral, et al., 2006).

En consecuencia, las componentes de conocimiento a considerar son:

Dimensión didáctica: Se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina los efectos e implicaciones didácticas. Para la elaboración del diseño, se llevará a cabo un análisis de libros de textos de Análisis Numérico, en donde estos libros se elegirán entrevistando algunos profesores que imparten la materia, de las opciones que plateen se tomarán en cuenta tres. Además se pretende considerar a la forma en cómo presenta el profesor su clase y los apuntes o materiales que utiliza.

Dimensión epistemológica. Explicación del devenir del contenido matemático en juego. En este apartado se pretende realizar un análisis en cuanto a la evolución de nuestro tema de estudio. Para ello nos apoyaremos en las investigaciones realizadas de tipo histórico.

Dimensión sociocultural. Referente a la construcción social del conocimiento, correspondiente a una epistemología en su organización social.

Dimensión cognitiva. Asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente. Referente a esta dimensión, es muy importante considerar los conocimientos previos al tema, es decir, durante el diseño se pretende cimentar los conceptos fundamentales. Además de la aplicación del diseño.

En lo que se refiere a la metodología se utilizará esta misma aproximación teórica ya nos permitirá hacer el diseño e interpretarlo. Bajo esta perspectiva consideraremos sus dimensiones de conocimiento a fin de diseñar una secuencia de actividades y su aplicación en el aula con el fin de identificar de qué forma los estudiantes de nivel superior argumentan el uso de la hipótesis señalada en el Teorema del Punto Fijo para decidir sobre la convergencia o no de una sucesión formada por las iteraciones al hacer uso del método del fijo, enfatizando en los aspectos visuales.

A manera de conclusión

Esta investigación pretende estudiar que si ¿En el marco de las representaciones gráficas, los estudiantes de nivel superior recurren a la hipótesis del Teorema del Punto Fijo, es decir, recurren visualmente al comportamiento de la recta tangente mencionada en dicho teorema para predecir convergencia o no a la solución de una ecuación de 2^{do} y 3^{er} grado?, se considera que este trabajo es muy importante ya que como mencionan algunas investigaciones que hay estudiantes egresados de nivel superior y se les plantea una ecuación trascendente sencilla y tienen dificultades para resolverla.

Se espera colaborar en la disciplina en un tema aún poco indagado, pero que revela ser de interés por la problemática que se plantea, así como recurrir a la visualización para incitar al desarrollo del pensamiento matemático desde esta perspectiva.

Bibliografía

Aparicio, E., Cantoral, R. y Rodríguez-Vásquez, F. (2003). Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(2), 445-449.

Astiz, M., Medina P., Montero, Y., Rocerau, M., Vecino, M. y Vilanova, S. (2003). Un asistente matemático en la enseñanza de resolución de ecuaciones no lineales por el Método del Punto Fijo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1), 94-99.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-102.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(1), 27 – 40.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Rodríguez-Vásquez, F. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav- IPN.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Vilenkin, N. (1984). *Método de las aproximaciones sucesivas*. Rusia: Mir. Moscú.