

EL CONCEPTO FUNCIÓN EN SITUACIONES VARIACIONALES. UN ESTUDIO DE LAS ARGUMENTACIONES DE LOS ESTUDIANTES



Víctor Javier Pech Pech, María Guadalupe Ordaz Arjona

azul021281@hotmail.com, oarjona@uady.mx

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen

El actual tratamiento otorgado al concepto función no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes, además de que propicia la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y experimentarlas en un grupo de estudiantes del COBAY, de manera que podamos analizar sus producciones ante una situación no típicamente escolar. Nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional. Como metodología de investigación consideramos la ingeniería didáctica. Entre los resultados se obtuvieron después de experimentarlas se tiene que los estudiantes si logran dar argumentos de tipo variacional, sin embargo, estas quedan limitadas por sus conocimientos sobre el concepto, esto es por el discurso escolar bajo el cual se han enfrentado a dicho concepto.

Palabras clave

función, variación, argumentaciones

Introducción

El concepto función es uno de los más importantes en matemáticas, sin embargo, existen muchas dificultades para lograr que los estudiantes se apropien de este concepto, por lo general solo aprenden técnicas algorítmicas y no atribuyen significado al concepto; y es que como menciona Artigue (1995), tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha entendido como la exigencia del desarrollo de habilidades en el manejo de los procedimientos algorítmicos propios de la materia. Particularmente, en cuanto al actual tratamiento dado al concepto función, se ha elegido como definición de enseñanza la dada en términos de regla de

correspondencia entre conjuntos, esto a pesar de no ser la más recomendada para efectos de enseñanza, como menciona Freudenthal (1983, citado en Del Castillo y Montiel, 2007) *“aunque esta definición está constituida de una manera lógicamente formalizada, ésta ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático”*.

En el estado de Yucatán, en los colegios de bachilleres del estado (COBAY), como parte de un proyecto de investigación se realizaron estudios del Discurso matemático Escolar presente en este subsistema, entre los cuáles se encuentra un estudio que da evidencia de que el tipo de práctica que predomina en las aulas de matemáticas es de tipo tradicionalista, es decir, aquella práctica que se caracteriza principalmente por la actividad pasiva del estudiante y en la que la concepción que tiene el profesor en cuanto al aprendizaje del estudiante, está basada en la capacidad que se tenga para memorizar.

Respecto al tratamiento dado a los contenidos matemáticos, se estudió aquel que es dado al concepto función, el cual a pesar de estar íntimamente relacionado con las nociones de variación, cambio y movimiento desde sus inicios, hoy día se ha dejado a un lado esta concepción de función y bajo el tipo de práctica de los profesores. El concepto función aparece primero como una correspondencia entre conjuntos, posteriormente se convierte en una expresión “funcional” de la forma $f(x)$ para finalmente convertirse en una gráfica, el concepto se ve como algo estático y ya construido, y los alumnos únicamente tienen que memorizar ciertas técnicas algorítmicas para poder resolver los problemas que posteriormente les serán presentados. De esta manera, la función pasó de ser un modelo matemático capaz de predecir cambios a una simple definición conjuntista formal y abstracta.

La problemática se centra pues, en que el actual tratamiento otorgado al concepto función no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes (Dolores, 2000), además de que propicia la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes (Ver Hitt, 1996 y López, 2007). Es por ello que consideramos importante desarrollar actividades que incorporen variación y cambio, y experimentarlas en un

grupo de estudiantes del COBAY, de manera que podamos analizar sus producciones ante una situación no típicamente escolar.

Nos planteamos como objetivo analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional y explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones de tipo variacional.

Para el diseño de las actividades que conformaron la situación exploratoria consideramos elementos del pensamiento y lenguaje variacional, tomamos como referencia a Cantoral (2000):

“El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con las que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales”.

De esta forma, decimos que un estudiante utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo de cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral 2000).

Los elementos del pensamiento y lenguaje variacional pretenden de alguna manera modificar lo establecido, es decir, requiere que los alumnos modifiquen, validen y construyan argumentos y esto sólo se puede hacer con situaciones que permiten que el alumno construya la respuesta y no simplemente recurra a la memoria. Se busca que el estudiante se cuestione sobre qué es lo que cambia y cómo se relacionan estos cambios, es decir, que construyan la noción de función una relación de dependencia entre variables.

Por otra parte, consideramos importante en este trabajo incorporar de manera sistémica las cuatro componentes fundamentales en la construcción social del conocimiento; su naturaleza

epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple se le ha llamado formalmente acercamiento socioepistemológico. La socioepistemología, en tanto aproximación teórica que aborda desde una perspectiva sociocultural el problema de estudio de las matemáticas así como los fenómenos didácticos asociados a la misma, permite explicar la naturaleza de un discurso y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento. Pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en las prácticas sociales, entre ellas podemos señalar la práctica social de la *predicción* la cual está íntimamente relacionada con la variación y el cambio, ya que para predecir es necesario cuantificar y analizar los cambios, es decir la variación es una herramienta de análisis necesaria para la predicción García-Zatti y Montiel (2007, citado en López, 2009). Por lo cual, para analizar las argumentaciones de los estudiantes en situación variacional necesitamos una teoría que nos permita explicar el por qué de cada argumentación.

Metodología

Nuestra investigación fue de carácter cualitativa y como metodología de investigación consideramos la ingeniería didáctica, ya que ésta se reconoce como un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, las cuales implican realizar la planeación, el desarrollo, la observación y el análisis de las mismas, se basa en el estudio de casos y el uso de criterios de validación interna, obtenidos por la confrontación de los análisis a priori y a posteriori de los conocimientos puestos en juego y de las variables de control de la situación experimental diseñada. La ingeniería didáctica en tanto metodología de investigación se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella. Considera cuatro fases: Análisis preliminar, Análisis a priori, Análisis a posteriori.

El análisis preliminar en el que se dio el sustento sobre el cual se desarrollaron las actividades que conformaban la secuencia exploratoria, es aquí donde llevamos a cabo los análisis previos, es decir, el análisis epistemológico del contenido a abordar es decir, del concepto función, el análisis de la enseñanza tradicional de dicho concepto y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes y los obstáculos y dificultades que tienen en el aprendizaje del

concepto en cuestión. Esto es, en el análisis preliminar consideramos análisis de corte epistemológico, cognitivo y didáctico. Estas dimensiones se corresponden con la perspectiva sistémica de la didáctica de las matemáticas que considera el estudio de las interacciones entre el profesor, el saber y el alumno, con el objetivo de analizar los modos de apropiación de un saber por el sujeto, aquí se encuentra inmersa la componente social al analizar las prácticas de los estudiantes al trabajar con la situación experimental, se analizan sus producciones y la aparición de argumentos de carácter variacional.

Finalmente con base en los análisis realizados, como parte importante del análisis preliminar se concibe el diseño de nuestra situación experimental, para posteriormente realizar el análisis a priori, en el cual, se eligen las variables sobre las cuales actuar, y sobre las cuales se establece un control destinado a incidir en las posibles formas de actuar de los estudiantes y los significados que se pretenda se adquieran. Este análisis, tanto de tipo descriptivo como predictivo, se centra en las características que la situación ha querido diseñar. En la experimentación se pone en funcionamiento la secuencia exploratoria diseñada y el análisis a posteriori, éste, se obtiene a partir del conjunto de datos recabados durante la experimentación, por medio de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los alumnos. Este análisis es confrontado con el análisis a priori para validar las hipótesis de investigación que se hayan formulado.

En cuanto al método de trabajo, la realización e implementación de nuestra situación exploratoria, se trabajó con estudiantes de bachillerato COBAY, que hubieran tenido algún contacto previo con el concepto de función, se aplicó una actividad preliminar a 35 estudiantes del COBAY plantel Xoclán, esto, para poder seleccionar a seis alumnos que tenían cierto grado de conocimiento sobre el concepto de función, y que contaban con los conocimientos básicos necesarios para poder realizar la actividad, de manera que se redujera al mínimo la posibilidad de que otros factores ajenos al diseño de la actividad pudieran obstruir en la realización de la misma.

La experimentación se realizó en un audiovisual del COBAY, plantel Xoclán, dicho audiovisual estaba equipado con sillas, mesas, aire acondicionado, pantalla para proyector, video proyector y dos computadoras tipo Laptop. La duración de la aplicación fue de cuatro horas aproximadamente, dividida en dos sesiones de dos horas, en la primera sesión se trabajó en las primeras dos actividades y en la segunda sesión las dos restantes. Para la recolección de datos se utilizaron videocámaras, grabadoras reporteras, hojas en blanco, para el registro de las producciones de los estudiantes. Los seis estudiantes que participaron eran alumnos de cuarto semestre del colegio de bachilleres del estado de Yucatán Plantel Xoclán, Mérida Yucatán, las edades de los estudiantes oscilaban entre diecisiete y diecinueve años, cuatro varones y dos mujeres. Para el desarrollo de la situación exploratoria se formaron los estudiantes en dos equipos de trabajo, cada equipo estaba conformado por dos hombres y una mujer.

Resultados y discusión

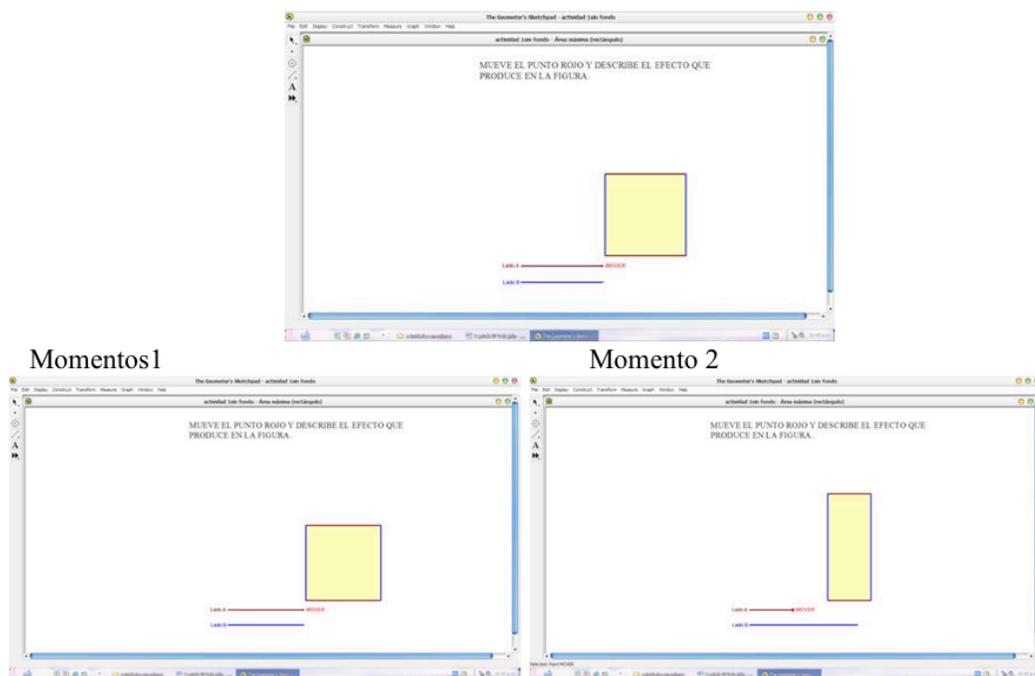
En el análisis epistemológico, se estudió la noción de función a lo largo de diferentes civilizaciones y épocas, hasta llegar al siglo XX. Pudimos observar entre otras cosas que el concepto función ha sido concebido de maneras diferentes, se ha utilizado con diferentes fines y las diversas nociones que se han tenido en diversas épocas. La función fue concebida en gran parte de su historia como una relación entre magnitudes variables y que su principal característica era que permitía explicar fenómenos relacionados con el movimiento y el cambio.

En el análisis didáctico consideramos tanto en la práctica del profesor como los libros empleados por éste, en ambos casos, el concepto función es presentado como una regla de correspondencia entre conjuntos, luego como una expresión algebraica y finalmente como una gráfica, difícilmente son tratados fenómenos de variación y cambio (López 2007) y casi nunca se utilizan medios electrónicos para auxiliar la enseñanza del concepto función. De acuerdo con Del Castillo y Montiel (2007) la enseñanza actual del concepto función deja a un lado los argumentos visuales, esto por no considerarlos como matemáticos y además no considera la estructura cognitiva de los estudiantes. El actual tratamiento no considera a la función como una relación entre magnitudes variables y además que no se plantean situaciones que involucren al movimiento y al cambio.

En el Análisis Cognitivo se observa el papel protagónico que los estudiantes dan a la idea de que una expresión para ser función debe poder ser graficada, la expresión analítica constituye otra fuente de errores, ya que casi siempre se asocia a la relación que da lugar a la función. Los alumnos no llegan a considerar como verdaderas funciones a aquellas definidas a trozos, debido a que no están conformadas por una única expresión analítica, muchos consideran que representan a varias funciones, además si ellos no vislumbran variables en la expresión analítica que define a la función, no la aceptan como tal, por ejemplo, funciones tales como $f(x)=0$ si x es racional y $f(x) =1$ si x es irracional o $f(x)=6$ no son consideradas como función por los estudiantes (López, 2007). El análisis cognitivo nos muestra los obstáculos o dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al interactuar con el concepto función, mismas que no son tomadas en cuenta en la actual enseñanza.

Con los elementos observados en el análisis preliminar se recurrió a diseñar un instrumento que nos permitiera estudiar y analizar las producciones de los estudiantes de los estudiantes en una situación no típicamente escolar, la cual después de haberla experimentado, nos arroja, resultados como el que a continuación presentamos.

ACTIVIDAD 1. Mueve el punto rojo y describe el efecto que produce en la figura



Producciones de los estudiantes

A_R: Se convierte en una línea ¿no?

A_C: ¿Esta como que? ¿Es el mismo tamaño que el moradito de la línea de abajo?

A_C se refiere a la línea azul que representa al lado B en la pantalla de la computadora

A_R: ¿El lado A depende del lado B? ¿Así lo podemos poner?

A_C: ¡Mmm! Y ya decimos con eso que si es una función, déjalo que siga avanzando.....

Empiezan a surgir argumentaciones relacionadas con dependencia y con función.

A_I: Claro, sí es más grande el rojo pues disminuye la figura.

Al estar hablando del rojo el alumno A_I se refiere al lado A

A_R: ¿Cómo lo ponemos?

A_I: El lado A tiene cierta proporción con el lado B.

A_R: ¿Tiene que?

A_I: Cierta proporción el lado B.

Trascripción A

A_R: ¿Qué pusieron?

A_I: En el punto medio independiente de si se mueve a la izquierda o a la derecha el rectángulo va a ser de las mismas proporciones o sea van a tener la misma área ya sea una unidad hacia la derecha o una unidad a la izquierda o dos unidades a la derecha o dos unidades a la izquierda va a tener la misma área

A_I ha observado que el área de los cuadriláteros de la figura 1 y la figura 2 son iguales, pero además que siempre que se mueva el punto A (a la izquierda o a la derecha) se forman figuras iguales y por ende con área igual

A_R: O sea, por ejemplo, vamos a poner

A_I: Que a partir del punto medio si me muevo una unidad a la izquierda queda un rectángulo, si me muevo la misma unidad a la derecha va a quedar el mismo rectángulo pero acostado.

Lo que ellos están llamando punto medio es cuando el lado A es igual al lado B, es decir, cuando se forma un cuadrado

Trascripción B

Conclusiones del Equipo 1 primera parte

A_R: Nosotros pusimos que el lado A y el lado B tienen cierta proporción, van a la par los dos. Pusimos que si el lado A aumenta el lado B disminuye y si el lado B aumenta es lo contrario, el lado A disminuye; también pusimos que si A llega a su punto límite entonces B es igual a cero y si B llega a su punto límite A es igual a cero, luego pusimos que en cualquier punto donde A y B se muevan forman un cuadrilátero excepto en sus puntos límites que es cuando pasa que A esta en su punto límite izquierdo entonces la

Trascripción C

Un argumento variacional se puede caracterizar por la contención de ideas, nociones y estrategias que impliquen la presencia de variación y cambio. En este caso se centra la atención en los argumentos discursivos de los alumnos, de los cuales hemos considerado que han dado evidencia de la presencia del pensamiento y lenguaje variacional en argumentos tales como: El lado A depende del lado B, si el lado A disminuye, el lado A aumenta, etc., incluso el estudiante A_c reconoce la presencia de una relación funcional entre el rectángulo y la longitud de sus lados. Otro aspecto importante es la noción de la proporcionalidad propuesta por A_R , la cual como bien se sabe, es una relación entre magnitudes medibles, incluso las proporciones directas son un caso particular de las variaciones lineales. Con estas ideas presentadas por los estudiantes tenemos evidencia del uso de argumentos variacionales de tipo discursivo.

Conclusiones

El analizar las producciones de los estudiantes en la situación exploratoria nos ha permitido observar que los estudiantes si construyen conocimiento matemático en relación al concepto función, por otra parte las argumentaciones de tipo variacional estuvieron presentes en algunos estudiantes, sin embargo, en otros casos éstas quedaron por los conocimientos que ya poseen sobre el concepto, esto es, por el discurso escolar al cual han sido enfrentados, y por ellos sus argumentaciones giran en torno a aspectos algebraicos.

La noción que parecen tener los estudiantes del concepto función aún después de la experimentación queda limitada a una expresión algebraica o fórmula ya que insistentemente trataban de buscar en cada actividad planteada una expresión algebraica aún cuando lo que se les pidiera fuera por ejemplo, la gráfica de la función.

Consideramos que la experimentación de la secuencia exploratoria pudiera tener resultados diferentes y más favorables en estudiantes donde no hubieran tenido conocimiento previo sobre el concepto función, es decir, donde no hayan sido enfrentado un discurso escolar del concepto función basado en la idea de ésta como una fórmula, que tiene una representación la cual es una gráfica.

Reconocimientos

Agradecemos al Colegio de Bachilleres del Estado de Yucatán Plantel Xoclán, por las facilidades otorgadas para realizar este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo*. Bogotá, Colombia. Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En Cantoral R. (Ed). *El futuro del cálculo infinitesimal* (69 – 91). México. Editorial Iberoamérica.

Del Castillo, A.; Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Pp. 568 – 580.

García-Zatti, M. y Montiel, G., (2008). Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 3 (2), 12-26.

López, J. (2007). Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función. Tesis de licenciatura, Universidad de Yucatán, Yucatán México.

López, S. (2009). Un estudio sobre la noción de función constante. Tesis de licenciatura, Universidad de Yucatán, Yucatán México.