LAS REPRESENTACIONES SOCIALES EN EL DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA SECUENCIA DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Bertha Ivonne Sánchez Luján, Alberto Camacho Ríos

ivonne_mx_2000@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com

I. T. de Cd. Jiménez, I. T. de Chihuahua II, México

Resumen

Presentamos el diseño y aplicación de una secuencia de aprendizaje para la construcción de una representación alternativa que permite a los estudiantes la adquisición del concepto de función mediante los significados asociados de variable, variación y variabilidad, así como la creación de un vínculo entre los distintos modos de representar una función, con el fin de que puedan coordinarlos durante la resolución de problemas. El estudio se llevó a cabo sujetándolo a la Teoría de las Representaciones Sociales, la cual tiene como eje central a las prácticas y a las representaciones sociales.

Palabras clave

función, elementos periféricos, representaciones sociales, variabilidad.

Introducción

El proyecto se inició esencialmente a partir de un análisis cognitivo del concepto de función, para el que hicimos uso de la "Teoría de las Representaciones Sociales" (TRS). Los resultados nos condujeron al establecimiento de "cadenas de significados" (Sánchez, 2009). Por otro lado, realizamos un análisis epistemológico y un estudio del currículo escolar, (los cuales no se presentan en este artículo), y dieron pie al diseño de una secuencia de aprendizaje desde la perspectiva variacional del propio concepto.

Para nuestra investigación, es importante establecer el concepto teórico de "representación" puesto que posee diferentes acepciones. Según Jodelet (1984, p. 473) una representación social (RS) es: "(…) *una forma de conocimiento socialmente elaborado* (…)". En el ámbito escolar, la representación no es un reflejo de la realidad escolar o de sus funciones sociales efectivas, sino una construcción original. Es decir, es un proceso de construcción de un saber basado en experiencias sociales. Adoptando ese punto de vista, hemos usado el término “representación” de manera análoga al de “concepción” a partir de la diversidad de estudios comparativos que al respecto se han realizado (Dollo, Ch y Johsua S, 2002).

En la construcción del conocimiento debe tenerse en cuenta que los estudiantes poseen representaciones previas y es la evolución progresiva de éstas lo que las lleva a un nivel operativo cercano a la realidad y proporciona herramientas para resolver problemas. Las concepciones en proceso de estructuración cognitiva evolucionan y apoyan el pensamiento que se está construyendo (Giordan y De Vecchi, 1988). Es el profesor, quien a través del discurso y las prácticas, apoya a la formación del nuevo concepto. De aquí la importancia de las prácticas que se realizan en el aula y fuera de ella.

La teoría de las Representaciones Sociales (TRS)

El concepto de (RS) fue introducido en 1961 por Serge Moscovici, en tanto que la teoría se ha desarrollado a lo largo de este tiempo. En su obra, Moscovici (1985) señala que el concepto de (RS) tiene dos aspectos básicos para su definición. Por un lado, son una forma de conocimiento y, por otro, son una forma de reconstrucción mental de la realidad, de tal suerte que sólo se dan en el intercambio de información con otras personas, por lo que una (RS) no es una respuesta a un estímulo u objeto exterior sino la reconstrucción de ese estímulo del objeto real. En tal sentido no son estáticas, sino que se encuentran en continua variación o movimiento.

Estructura de las representaciones: sistema central y elementos periféricos

Toda representación está construida alrededor del sistema central, que es el elemento más resistente al cambio y es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. La identificación del sistema central es determinante para conocer el objeto propio de la representación. Está vinculado con la memoria colectiva y a la historia del grupo, es estable, coherente y rígido, resistente al cambio y poco sensible al contexto inmediato.

Alrededor del sistema central se tienen los “elementos periféricos” o “sistema periférico”. Como elementos jerarquizados desempeñan un papel esencial en la representación, puesto que son la interfase entre el sistema central y el objeto mismo. Los elementos periféricos permiten la integración de las experiencias individuales, lo que soporta la heterogeneidad del grupo, son además, evolutivos y sensibles al contexto inmediato.

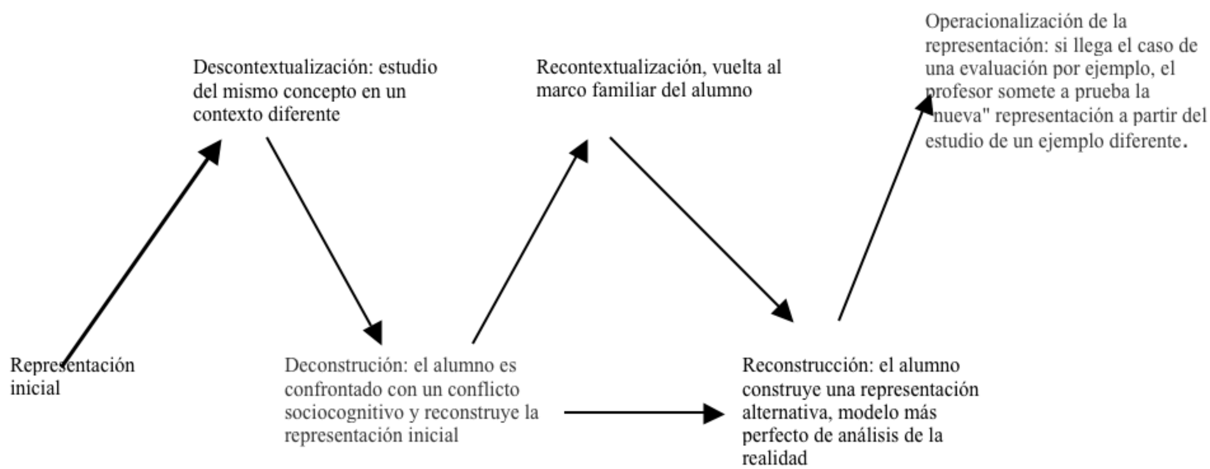
Tal como lo predice la TRS los elementos periféricos tienen una función de defensa, más pueden ser cambiados (removidos, modificados, aumentados) bajo el efecto de una modificación en las prácticas sociales, lo cual, de acuerdo a Flament (1994), tiene como consecuencia un cambio gradual de la representación, su desintegración o transformación total. En nuestro caso, la intención fue la de incluir elementos de carácter variacional en la noción de función, para lo cual contemplamos las condiciones para la transformación de una (RS) propuestas por (Guimelli, 1993), a saber: 1. Que sea un evento característico con alto grado de implicación en el grupo, 2. Que contemple las circunstancias externas a la representación, entendidas como las características físicas, económicas o el ambiente social, en relación con el objeto de representación, como consecuencia del evento anterior, lo que cambia las prácticas tradicionales y su pertinencia, y 3. Que el cambio de las prácticas sea percibido por el grupo como irreversible, lo que los lleve a reorganizar el campo de la representación.

Los resultados del análisis cognitivo, junto con los resultados del análisis epistemológico y del análisis didáctico (Sánchez y Camacho, 2007) nos permiten proponer una secuencia de aprendizaje, en la que integraremos en el diseño la noción de “variabilidad”, que hemos reconocido en el dominio de prácticas sociales: procedimentales y de observación, que ocurrieron a lo largo de los siglos XVIII y XIX, la cual nos permitirá re-significar el concepto de función. Con este significado asociado al propio concepto, intentaremos influir en los elementos periféricos de la cognición de los estudiantes, al colocarlos en un proceso de deconstrucción y recontextualización del concepto, tal como se muestra mas adelante.

En la enseñanza de la matemática, esto será posible en la medida en que se diseñen secuencias de aprendizaje que involucren a los alumnos en procesos de cambio:

"(...) el conocimiento matemático aparece pues como una construcción social, por el hecho de que la base del conocimiento matemático (el conocimiento lingüístico con sus convenios y sus reglas) es una construcción social y el hecho de que los procesos sociales interpersonales de diálogo y de crítica son necesarios para convertir el conocimiento matemático subjetivo de un individuo en un conocimiento objetivo <u>socialmente aceptado</u> (...)" (Dubois, 2000, s. p.).

Así, en el contexto de la enseñanza:



Estrategias didácticas del profesor y el proceso de aprendizaje de los alumnos.
Según Beitone et al. (2004). Tomado de Dollo y Parayre (2005)

Diseño de la secuencia

Al tratar las concepciones de una forma "inductiva", bastaría con desestabilizar las concepciones iniciales de los alumnos, presentando experiencias o hechos contrarios a estas ideas. Sin embargo, esto no es suficiente para inducir la necesidad de un cambio conceptual (Johsua y Dupin, 1993). Los conceptos de variable, variación y variabilidad están involucrados en el concepto de función, mas, en la actualidad se dejan de lado para la adquisición del concepto por parte de los estudiantes, creándose así un "hueco" en su entendimiento, (Camacho, 2006). La secuencia presenta estas tres nociones que permiten el estudio del movimiento de los fenómenos desde diversos modos de representarles: geométrico, algebraico y variacional.

Objetivo: Permitir a los estudiantes la adquisición del concepto de función mediante los significados asociados como son: variable, variación y variabilidad, así como la creación de un vínculo entre los distintos modos de representar una función, con el fin de que puedan coordinarlos durante la resolución de problemas.

Metodología

Descripción de la situación de aprendizaje

FASE 1. SENSIBILIZACIÓN.

Objetivo: Emergencia de las representaciones de los alumnos.

Actividad 1. Introducción

- El profesor pide a los alumnos que imaginen el movimiento de ciertos objetos como el punto, la recta, la superficie. Tal como se ejemplifica enseguida:
- En el pizarrón de muestra cómo una línea recta es creada por el movimiento de un punto.
- La línea recta, al moverse describe una superficie.
- La superficie al moverse describe un sólido.

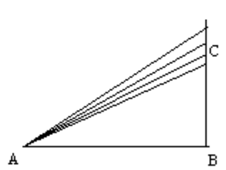
La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial.

Actividad 2. Variación de la variable.

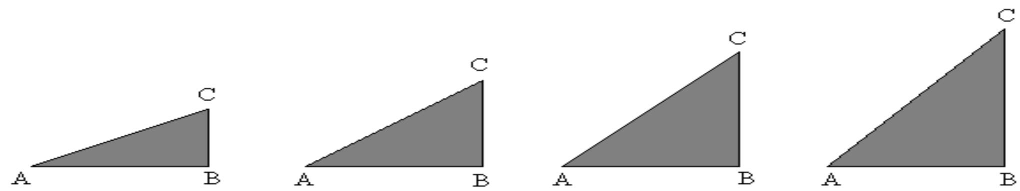
- El triángulo ABC se encuentra en estado de constancia o reposo:

En el siguiente ejercicio se muestra la variación de uno de los lados del triángulo ABC.

Si damos la oportunidad al lado BC de moverse hacia arriba, el mismo se convierte en una variable.



Cada uno de estos movimientos son llamados instantáneas y producen variación. Algunos de ellos se muestran enseguida.

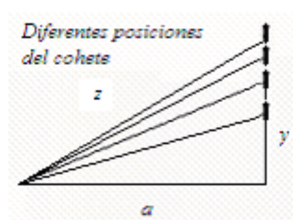


El lado AB se dice que está fijo o en "estado de constancia".

*Todo lo constante se dice que está fijo".

Al dejar de moverse posee de nuevo un valor de constante o reposo.

En el siguiente ejemplo, la imagen representa el movimiento de un cohete lanzado al espacio, el cual es observado por una persona colocada a una distancia *a* del lanzamiento. El primer cambio que sufre la figura con el movimiento del cohete, es una *variación* o instantánea del propio movimiento. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las *variaciones* del suceso.



Preguntas: Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?, ¿Es la misma?, ¿Es diferente?

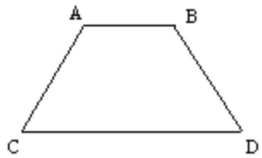
FASE 2. DESCONTEXTUALIZACIÓN

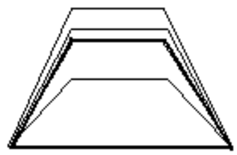
Objetivo: Reafirmar la relación entre variables

Actividad 1

En esta fase se presentan otros ejemplos que apoyen la fase anterior.

Consideremos que tenemos un trapecio ABCD, donde AB es la base menor y CD es la base mayor, ambas constantes, si hacemos que la altura aumente o disminuya:





Cada uno de los movimientos es una instantánea:

De manera grupal y mediante una lluvia de ideas, los alumnos responden las siguientes preguntas:

Para cada una de las instantáneas ¿Cómo es el área?, ¿Es la misma?, ¿Es diferente?, ¿De qué depende que cambie el área?

A partir de lo anterior, se define la noción de variación de manera semejante a los argumentos de los libros de texto de cálculo, como: *el cambio de magnitud de una cantidad.*

Lo cierto es que en el primer ejemplo cambiaron de magnitud las variables en movimiento: las longitudes *BC y AC*, el área $A = \frac{a}{2}y$ del triángulo (donde *a* representa la base e *y* la altura).

Así mismo, en el segundo caso los lados AC y BD, el área $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ del trapecio (donde *h* es la altura, b_1 y b_2 las bases menor y mayor), etc.

FASE 3: DECONSTRUCCIÓN

Objetivo: Confrontar a los alumnos con un conflicto sociocognitivo y reconstruir la representación inicial.

Actividad 1:

Dado que se han presentado los elementos para identificar las variables (que aumentan o disminuyen), se pide a los estudiantes que proporcionen una expresión analítica que muestre ese cambio tanto para el caso del triángulo como para el del trapecio. El profesor debe guiar la discusión en torno a las dos ecuaciones de área y concluir al respecto.

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes y de los argumentos mencionados a lo largo de las actividades anteriores, el profesor deberá enunciar el concepto de función como una dependencia de cantidades variables.

La realización de este tipo de reconocimiento geométrico de las variaciones, es la que más adelante nos permitirá el *estudio analítico* del propio movimiento; es decir, no consentiremos solamente en *ver* su expresión variacional. A la cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de las expresiones $A(y) = \frac{a}{2}y$ y $A(h) = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ se le llama *variabilidad,* la cual representa el total de las variaciones producidas por el fenómeno. En el caso de las fórmulas $A = \frac{a}{2}y$, $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ éstas significan el caso particular de una de las variaciones originadas por el fenómeno, y dejan ver al movimiento en un estado estacionario o de *constancia,* en el cual es factible su análisis.

Actividad 2:

Coordinación de los distintos modos de representar funciones.

Se divide el grupo en equipos de 3 o 4 personas. El profesor comenta la siguiente situación:

Usted tiene un vaso con agua fría y coloca dentro de él unos cubos de hielo luego lo deja sobre la mesa, en un día caluroso del mes de julio. Pide a los estudiantes que respondan a lo siguiente:

a) Describan con palabras cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo.
b) A continuación tracen una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

Después de esto un representante de cada grupo pasa a exponer la solución del problema.

El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 4: RECONSTRUCCIÓN

Objetivo: Construir una representación alternativa

Actividad 1

A los mismos equipos se les proporciona el siguiente ejercicio:

La siguiente tabla muestra el registro de temperatura medido cada dos horas, desde la media noche hasta las 12 del mediodía, un día de otoño. El tiempo *t* se midió en horas a partir de la media noche. La temperatura T viene dada en grados centígrados.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	15	14	12	10	11	14	16

a) Trace una gráfica de T en función de *t*.

b) Describa con palabras lo que ocurre en la gráfica.

c) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 5 a.m. y a las 11 a.m.

Actividad 2.

Los estudiantes continúan en el mismo equipo y se les presenta el siguiente ejercicio para que llenen la tabla y respondan lo siguiente:

Se tiene un globo de volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ cuyo radio varía al ser llenado con aire.

r (cm)	*V* (cm^3)
0.5	
0.9	
1.0	
2.5	
3.0	
3.8	

Después de llenar la tabla responde las siguientes preguntas: ¿Cómo se comporta el volumen del globo conforme se llena de aire?, ¿De qué depende ese cambio?.

Muestra gráficamente el cambio del volumen respecto al radio.

Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios en función del radio.

Al final de la fase, un representante de cada grupo pasa a exponer los resultados de las dos actividades.

El profesor apoya al grupo para la conclusión del problema.

FASE 5: OPERACIONALIZACIÓN

Objetivo: Poner a prueba la "nueva" representación mediante su aplicación en un problema específico.

Actividad 1: Exploración.

Es de suma importancia verificar que las diversas formas de representar una función estén presentes en la resolución de problemas, e identificar si el estudiante las vincula adecuadamente.

Un avión vuela horizontalmente tomando contacto en tierra con una torre de control en diversos momentos de tiempo antes de pasar por encima de ella, la cual se encuentra verticalmente a 10,000 metros del avión.

a) Describe con palabras lo que ocurre con la distancia entre el avión y la torre conforme pasa el tiempo.
b) Desarrolla una gráfica que muestre la simulación del movimiento del avión con respecto a la torre para diferentes momentos de contacto.
c) Toma una de las instantáneas de la simulación y dibújala al lado. Puesto que es un triángulo rectángulo, nombra los lados variables con las letras *z* y *x*, asigna la magnitud al lado constante (10,000).
d) Dado que el avión está en movimiento horizontal hacia la torre, la distancia entre estos también cambia. Establece una relación que involucre ambas variables, incluyendo la constante (Sugerimos utilizar el Teorema de Pitágoras).
e) Con la expresión obtenida llenar la siguiente tabla:

Distancia horizontal entre el avión y el punto por encima de la torre de control. ( ) (metros)	Distintas posiciones de la distancia del avión a la torre de control en tierra. ( ). Expresión:
20,000	
18,000	
12,000	
7,000	
5,000	
1,000	

f) Escribe una expresión analítica que represente la totalidad de los cambios.

Actividad 2.

A partir de los ejemplos anteriores, expresa con tus propias palabras el concepto de función

Aplicación de la secuencia

La secuencia de aprendizaje se aplicó por el mismo profesor a dos grupos de estudiantes de la materia de Cálculo Diferencial del Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez:

Carrera	Turno	Participantes	Hora de incio	Hr. determinación	Receso
Ingeniería Industrial	Matutino	20	11:00 a.m.	1:55 p.m.	no
Ing. Electromecánica	Vespertino	20	4:00 p.m.	6:35 p.m.	6:00 a 6:15

Ambos grupos se dividieron en seis equipos de trabajo: dos equipos de cuatro integrantes y cuatro equipos de tres integrantes cada uno. El primer grupo en que se aplicó la secuencia fue el de la carrera de Ing. Industrial en una sola sesión de 2 horas y 55 minutos, y se pidió como evidencia que cada equipo escribiera en una hoja de rotafolio el resultado de cada actividad y pasara al frente a exponerla ante sus compañeros y la escribían de nuevo en el pizarrón; considerando que el tiempo de aplicación se alargó por esta razón, al aplicarla en el grupo de Ing. Electromecánica se les pidió que al explicarla utilizaran la misma gráfica realizada en la hoja de rotafolio, y de esta manera el tiempo se redujo a 2 horas 20 minutos. Recomendamos que para futuras aplicaciones de ser posible se realice en tres sesiones, ya que, aun cuando el trabajo se desarrolló de manera fluida, al final de la sesión los alumnos se mostraron inquietos por la duración de la misma.

Resultados de la aplicación

Fases de Sensibilización y Descontextualización: Al preguntar ¿qué cambia? respondieron: los ángulos, la altura, los lados, el área.

Fase de Deconstrucción: Notamos que los alumnos no están acostumbrados a describir verbalmente un evento. En cuanto a las gráficas se percibe la influencia numérica, es decir, la mayoría intenta colocar números a pesar de que en el ejemplo no se especifican.

Fase de Reconstrucción:

Actividad 1.- En esta actividad encontramos que todos los equipos de ambos grupos realizaron correctamente la gráfica, describieron acertadamente el evento y los valores obtenidos para la temperatura a las 5 a.m., fue de 11º y para las 11 a.m., de 15º. Concluimos que, por ser un ejemplo del todo numérico (a lo cual los alumnos están habituados) no presentó mayor dificultad.

Actividad 2.- Se tiene un globo de volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ cuyo radio varía al ser llenado con aire: En esta etapa los resultados de la tabla son correctos en todos los equipos en ambos grupos y asimismo lo son las respuestas a las preguntas formuladas. En cuanto a la expresión analítica, la mayoría la escribió de forma correcta.

Fase Operacionalización:

Actividad 1: Exploración.- En la solución de este problema los puntos a), b), c) y d) fueron resueltos en forma correcta por la mayoría de los equipos, la única diferencia son las literales asignadas a cada uno de los lados del triángulo. En lo que se refiere al llenado de la tabla de valores, el 83.34 % lo hizo acertadamente. El 16.66% de las expresiones están dadas con las letras a, b, c, aun cuando en la gráfica y el triángulo dibujado si utilizan las literales x, y, z.

Actividad 2. En esta última parte notamos un cambio en la (RS) del concepto de función por parte de los estudiantes, entendidas éstas como las concepciones que poseen del propio concepto, ya que las respuestas son dadas en términos de "algo que cambia", tal como se manejó durante la aplicación de la secuencia.

Consideraciones finales

Para el diseño de la secuencia de aprendizaje es necesario recuperar las (RS) que un individuo posee sobre cierto concepto para, a partir de ello y a través del diseño guiarlo en una práctica que permita reconstruir (según el proceso de aprendizaje presentado anteriormente) la representación que tiene del concepto. Durante la aplicación del diseño no fue nuestra intención romper con la (RS) que los estudiantes poseen sobre el concepto de función, sino incorporar a ésta la noción de variación. Puesto que las (RS) son definidas a través del sistema central, que como planteamos posee una gran resistencia al cambio, entonces los elementos periféricos tienen un papel fundamental en el análisis de los procesos que originan la dinámica de una (RS). El sistema periférico integró nuevos elementos sobre los anteriores, particularmente bajo la influencia del cambio de las prácticas en el aula.

En este sentido, consideramos que en la RS en torno al concepto de función, los estudiantes integraron a los elementos periféricos la noción de variablilidad. Las respuestas del último punto indican como “algo que muestra la totalidad de los cambios”, “lo que varía”, “diferentes instantes”, en cuyo discurso está presente la noción de variación.

Estos resultados muestran el impacto que las prácticas sociales ejercen sobre las concepciones que se poseen de un objeto en particular.

Bibliografía

Camacho, A. (2006). Revisión de las prácticas sociales y la socioepistemología. México: *Educación Matemática* 18(1), 133 a 160.

Dollo, Ch. & Parayre, S. (2005). Et l’amour dans tout ça ? Des conceptions des élèves à la construction de savoirs scientifiques sur la familla. *Numéro spécial de la revue Skholê IUFM de l`academie d`Aix-Marseille*. 41-63.

Dollo, Ch et Joshua S. (2002) Conceptions d´élèves et diversité des paradigmes en sciences économiques et sociales (l´exemple du chômage) Article paru dans L'Année de la Recherche en Sciences de l'Education. En http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ses/didactique/obst.html

Dubois, L. (2000). Les modèles de l’apprentissage et les mathématiques. Obtenido de http://tecfa.unige.ch/~laurent/didact/theories.htm el 4 de febrero de 2007.

Flament, C. (1994). Pratiques et représentations sociales. En J. Abric (Ed.): Représentations sociales et pratiques. París. PUF.

Giordan, A. & De Vecchi, G. (1988). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conocimientos científicos*. España: Diana Editora.

Guimelli, Ch. (1993) Concerning the structure of social representations. Papers on Social Representations – Testes sur les Représentations Sociales. Vol. 2 (2), 85-92, 1993.

Jodelet, D. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *La representación social: fenómenos conceptos y teoría*. (pp. 469-494). Barcelona, España: Paidós.

Moscovici, S. (1985). *Psicología Social I y II*. Barcelona España. Paidós.

Sánchez, B. I (2009). *El concepto de función matemática entre los docentes a través de las representaciones sociales.* Tesis doctoral no publicada, CICATA-IPN.

Sánchez, B. I, Camacho, A, (2007). El concepto de función matemática en los docentes a través de las representaciones sociales. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* . CIEM. México.