

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLOGICO DEL DESARROLLO DE LA TANGENTE COMO OBJETO ESCOLAR



Luis Arturo Serna Martínez, Apolo Castañeda Alonso y Gisela Montiel Espinosa

CICATA-IPN, Unidad Legaria

luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx , apcastane@gmail.com, gisela.montiel@gmail.com

Resumen

Un fenómeno didáctico que se ha reportado por diversos investigadores consiste en la interpretación geométrica de la derivada la cual es dada en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial, esta idea se refiere a definir una familia de rectas secantes cuyo límite deviene en una recta tangente a la curva en un punto, en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial se ha tratado a la recta tangente como una aplicación de la derivada y no como la idea que origino el concepto, como es mostrado en diversos estudios de corte socioepistemológico. En el presente avance de la tesis se muestra que el fenómeno didáctico mencionado existe como parte de una problemática en la enseñanza-aprendizaje de Cálculo Diferencial, en ella se encuentran involucrados los profesores, los cuales tiene ciertas costumbres didácticas, estas son influidas por sus creencias de las matemáticas, así como también los textos escolares y los programas de estudio. Una forma benéfica de contribuir ante esta problemática, es diseñando e implementando secuencias didácticas producto de la investigación en Matemática Educativa.

Palabras clave

Enseñanza tradicional de Cálculo, Algoritmos, costumbres didácticas, recta tangente.

Introducción

El estudio del Cálculo Diferencial se lleva acabo regularmente en los últimos semestres del bachillerato, es una asignatura importante por la relación que guarda con la matemática elemental vista en cursos anteriores y la matemática avanzada la cual será estudiada por los alumnos en la universidad, podemos decir que la matemática básica se refiere a aquella que estudia procesos finitos de cuantificación y en la matemática avanzada se estudian además procesos infinitos de cuantificación (Dolores, 2007). El estudio del Cálculo es necesario ya que puesto que posibilita que el estudiante se apropie de los elementos básicos con los cuales se pueda crear una conexión entre la matemática básica y la matemática superior que se ve en la

universidad, principalmente en carreras como las ingenierías, economía, contabilidad y ciencias, por lo tanto es de suma importancia que sea comprendido en el bachillerato, sin embargo según investigaciones realizadas los estudiantes llegan con serias deficiencias de los temas tratados en Cálculo a la Universidad (Dolores, 2007; Artigue, 1998).

El estudio de los procesos de variación y cambio de fenómenos naturales forman parte de los orígenes históricos del Cálculo a pesar de ello, estos no son tomados en cuenta en la enseñanza tradicional. En la presente ponencia mostraremos problemáticas que se encuentran presentes en la enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial (CD).

Enseñanza basada en Algoritmos

Uno de los problemas que se encuentran presentes en la enseñanza del Cálculo es que se privilegia el uso de los algoritmos, dejando de lado otro tipo de recursos como por ejemplo el visual por no considerarlo matemático (Cantoral, 2000). Haciendo uso de manera preponderante de recursos algorítmicos se les enseña a los estudiantes a evaluar funciones, calcular límites, derivar y optimizar variables tal como es reportado en Cantoral y Reséndiz (2003); el algoritmo es una serie de pasos a seguir para resolver un problema, sin embargo el seguir estos pasos no es garantía de que los alumnos hayan construido conocimiento, ya que pueden estar haciendo las cosas mecánicamente sin hacer análisis alguno, el aplicar un algoritmo ahorra tiempo ya que permite llegar rápidamente a la solución de un problema, pero cuando es utilizado en las matemáticas escolares sin conocer los motivos de el porqué de cada uno de los pasos a seguir se cae en el riesgo de que los estudiantes no construyan conocimiento, que es lo que comúnmente ocurre en las clases de Cálculo (Cantoral y Reséndiz, 2003).

El libro de texto es una herramienta importante a utilizar por los profesores de CD, es lógico pensar que esta herramienta influye notablemente en su discurso, el cual es presentado a los estudiantes. Por lo tanto es marcada la tendencia entre los profesores de Cálculo Diferencial a presentar los temas de una manera rigurosa, bajo un orden sustentado en ideas lógicamente coherentes por medio de reglas, definiciones, axiomas, postulados y teoremas, así como demostraciones rigurosas tal y como son presentados estos temas en los libros de texto

tradicionales de CD. En ocasiones por la falta de un entendimiento total de los conceptos se recurre sólo al uso de los algoritmos como uno de los elementos formales que se presentan en las clases. De tal forma que este tipo de enseñanza ha propiciado que se entienda al Cálculo Diferencial como el desarrollo de algoritmos de naturaleza algebraica, lo cual también ha influido en que los estudiantes aprendan de manera mecánica a derivar, integrar, calcular límites (Cantoral y Reséndiz, 2003; Cordero, 2005). Con este enfoque se ha dejado de lado las ideas clave que dieron el origen al Cálculo Diferencial, por lo tanto en los cursos parecería que sus ideas son solamente utilizadas dentro del mismo Cálculo u otras materias de Matemáticas y no se le relaciona con otras áreas de conocimiento como las ciencias, economía u administración, entre otras.

Haciendo uso de lo más sencillo en las clases

Con frecuencia el profesor hace uso del recurso algorítmico ya que es lo más sencillo de utilizar, sólo hay que seguir los pasos a seguir para resolver el problema y llegar a el resultado, esto claro no conlleva a que los estudiantes le den un significado a los conceptos. En el caso de la materia de Cálculo como ha sido demostrado, ha sido causa de dificultades (Dolores, 2007; Marcolini y Perales, 2005; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008 y Zúñiga, 2007), hay problemas con la construcción de los conceptos tanto de los alumnos como inclusive de los mismos profesores (Castañeda, 2004), al existir dificultades de este tipo y si los alumnos no construyen los conceptos, así como tampoco saben utilizarlos en la resolución de problemas en donde se pone en juego las ideas clave del Cálculo, se corre el riesgo de que la clase entre en crisis, sin embargo el utilizar lo algorítmico “sirve” como un recurso legitimador del profesor ya que gracias a esto puede dar la clase y enseñar a sus alumnos a aplicar una fórmula o seguir una serie de pasos, de esta forma la clase no entra crisis (Cantoral, 2000), otro de los “beneficios” que se puede obtener al usar este recurso es disminuir considerablemente el número de alumnos reprobados, consideramos sin embargo, que hay una especie de efecto Jourdain (Brousseau, 1986) este efecto consiste en que el profesor evita un debate con los alumnos sobre el conocimiento científico, esto es con la intención de que no se reconozca falla en los procesos de enseñanza aprendizaje, Brousseau (1986) menciona que en este efecto Jourdain, el profesor dice reconocer conocimiento en los alumnos a pesar de que lo que comenten sean situaciones con significados

ordinarios o muy alejados de lo que realmente significan los conceptos, de tal forma que se sustituye el conocimiento por actividades más familiares a los alumnos a pesar de que esto no de un significado correcto del concepto que se está aprendiendo, con el tiempo este tipo de actividades son reconocidas como algo respetable e ineludible. Algo parecido ocurre con el uso de los algoritmos ya que se convierten en una costumbre y muchas veces sustituyen a las ideas conceptuales, por tener estas un alto grado de complejidad. El profesor dice reconocer ideas científicas en sus alumnos con el simple hecho de que ellos sepan utilizar algoritmos para cierto tipo de problemas y da la impresión de que hay cierto lenguaje científico al usar los algoritmos, con el tiempo esto se convierte en una costumbre didáctica, la cual puede ser repetida por generaciones.

El uso de las reglas algebraicas

Otra de las dificultades en la enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial tal y como es reportado por Zúñiga (2007) es que hay una muy marcada tendencia a transmitir conocimientos haciendo mucho énfasis en el desarrollo de habilidades algebraicas desatendiendo el discernimiento intelectual para la comprensión de ideas nociones y conceptos. En nuestra experiencia como docente en Cálculo Diferencial hemos escuchado en varias ocasiones a profesores² expresar ideas como: “En Cálculo todo es trabajo algebraico”, “Todo es cuestión de saber álgebra para entender Cálculo”, “El Cálculo no es difícil, sólo es cuestión de saber álgebra” y comentarios similares; por otro lado ha sido reportado en (Cantoral, 2000; Cantoral y Reséndiz, 2003; Dolores, 2007; Zúñiga, 2007) que en los cursos de Cálculo Diferencial hay una marcada tendencia a privilegiar el uso de los recursos algebraicos.

El tipo de habilidades algebraicas a las que hacemos referencia y que son muy frecuentemente utilizadas en Cálculo Diferencial son aquellas que se refieren a el uso de estrategias, técnicas y reglas para manipular expresiones algebraicas y transformarlas en otras, no hablamos de habilidades algebraicas en un sentido rico y profundo de lo que significa el empleo del álgebra, por citar algunas características de el uso del álgebra en este sentido amplio que mencionamos, podríamos decir que un buen uso de ella daría como resultado el poder interpretar y hacer un análisis correcto de una expresión algebraica, otra de las potencialidades del álgebra es el hacer

generalizaciones, es decir no sólo ver casos particulares sino tener las herramientas para que se pueda generalizar, es decir que se puedan resolver diferentes problemas que contengan una misma estructura y poder reconocer en todos ellos el mismo modelo, logrando de esta manera reconocer lo invariante, la generalidad, tratar con casos particulares a partir de una generalidad y reconocer lo general en una particularidad de tal manera que haciendo un uso apropiado del álgebra los alumnos podrían sacar conjeturas y hacer generalizaciones (Papini, 2003), en las clases de CD generalmente no se hace uso de modelos para interpretar fenómenos, de tal forma que el álgebra no es utilizado en un sentido amplio, sino sólo como una estrategia que permite la manipulación de reglas.

La derivada

A partir de lo visto en los apartados anteriores sobre la enseñanza basada en algoritmos y el uso de reglas algebraicas lo cual es utilizado en muchas instituciones del sistema escolar mexicano, según lo reportado en (Cantoral, 2000; Castañeda, 2004; Dolores, 2007; González, 1999) en las clases de Cálculo Diferencial, al ser el tema de la derivada parte importante de los contenidos de esta asignatura, veremos que el uso de los algoritmos, así como el empleo de estrategias de manipulación algebraica se verán reflejados al impartirse este tema, esto ocasiona desde nuestro punto de vista dificultad en los estudiantes para construir las nociones de derivada, así como el reconocer a la misma en problemas donde se presenta, de tal forma que consideramos que entre otras se encuentran presentes dos problemáticas, las cuales desde nuestro punto de vista son fuente importante de dificultades, las cuales son: enfrentarse a problemas de aplicación y minimizar el significado geométrico de la derivada.

Dificultad en problemas de aplicación

Se ha reportado por diversos investigadores (Cantoral, 2000; Castañeda, 2004; Dolores, 2007; González, 1999; Serna, 2007) acerca de la enseñanza del Cálculo Diferencial en donde se ha privilegiado el uso de algoritmos de naturaleza algebraica lo cual es utilizado en la enseñanza de la derivada, los estudiantes aprenden a derivar, ya sea utilizando el método de los cuatro pasos o haciendo uso de las reglas de derivación, regularmente los estudiantes saben manipular expresiones algebraicas haciendo uso de las reglas del álgebra llevando a cabo desarrollos para

transformarlas, para hacer simplificaciones u obtener otras expresiones que permitan llegar al resultado, esta forma de proceder de alguna manera propiciada por los mismos profesores hace que el derivar se convierte en algo mecánico, “tal parece que importa saber quiénes de ellos pueden calcular más derivadas, pero no interesa mostrarles los procesos variacionales que se esconden detrás de ese cálculo de derivadas” (González, 1999, p. 17), de tal forma que también pareciera que hay una rápida urgencia por parte de los profesores para pasar a los procedimientos algebraicos, en otros trabajos (Dolores, 2007; González, 1999) se ha reportado que cuando los estudiantes se enfrentan a problemas en donde se debe de utilizar la derivada no identifican el uso de la misma, puesto que no han construido las ideas claves de la derivada, esta forma de enseñanza tradicional, tampoco le da importancia a utilizar ideas o temas relacionados con física como son por ejemplo velocidad promedio, velocidad instantánea o hablando en un sentido más general la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea, según lo reportado en Dolores (2007) los profesores de Cálculo Diferencial regularmente utilizan libros de texto, inclusive dándole mayor prioridad a estos que a los mismos programas y la mayoría de los textos de Cálculo utilizados en México le dan un mayor énfasis a el contenido matemático en donde es relevante el desarrollo de procesos algebraicos, vemos que aún los mismos textos contribuyen a este tipo de enseñanza.

Minimizar el significado geométrico de la derivada

El problema de las tangentes fue enfrentado por varios matemáticos del siglo XVII, hubo varios métodos de solución sin embargo el descubrimiento de la derivada lo resolvió fácilmente. En la actualidad en nuestros sistemas escolares se encuentra presente este problema cuando se le da una interpretación geométrica a la derivada, la forma tradicional en que se presenta este tema es mostrándoles a los estudiantes que la pendiente de la recta tangente a la curva es el límite de una familia de rectas secantes que deviene en la recta tangente a la curva, aunque esto ha sido de gran dificultad para los estudiantes ya que como muestran (Cantoral, 2000; Dolores, 2007) los estudiantes no construyen esta idea firmemente. Por la forma en cómo se presenta esta da la impresión de que la recta tangente a la curva es algo estático (Dolores, 2007; Serna, 2007) que toca a la curva en un punto sin volver a cortarla, aunque como se sabe la recta tangente a la curva es tangente sólo en una región cercana a la zona de contacto, pudiendo volver a cortar a

la curva en otro punto, además la recta tangente es algo dinámico. En algunos sistemas escolares de otros países se ha utilizado a la interpretación geométrica de la derivada, así como algunas ideas más intuitivas para la introducción del concepto de derivada, sin embargo en muchos otros aun se encuentra presente la estructura lógico formal en los programas. En Dolores (2007) se comenta acerca de la interpretación geométrica de la derivada y los enfoques que toman en cuenta a la razón de cambio, como formas diferentes de abordar el concepto de derivada y que casi no son utilizados y en caso de serlo se les ve como algo que es utilizado de manera momentánea sin volver a hacer énfasis en ellos en otras partes del curso.

Los libros de texto

El libro de texto escolar juega un papel importante en los procesos de enseñanza aprendizaje en el aula, es un medio de transmisión de conocimientos el cual es reconocido y validado por la sociedad, puede ser utilizado para organizar los contenidos de un curso, preparar exámenes, guías formularios o actividades didácticas también sirve para que los alumnos estudien;

Con una mirada más profunda, se puede advertir una doble naturaleza en las obras de texto: como una obra de texto, referida a los elementos de estructura y organización, y a aquellos tocantes a su contenido, es decir, al discurso que contiene.

(Castañeda, 2006, p. 254)

Podemos decir que la construcción de las ideas del Cálculo Diferencial que la sociedad se forma y en particular los estudiantes y profesores, así como los actores situados en la noosfera en gran medida tiene que ver con los textos escolares utilizados en nuestros sistemas escolares.

Hablaremos de los textos tradicionales de Cálculo Diferencial e Integral como aquellos que usualmente son estudiados en el sistema escolar mexicano y de los cuales vamos a caracterizar algunos aspectos puntuales como son la secuenciación y enfoque de los temas abordados, así como la forma en cómo se pretende que se aborden los conceptos por parte de los estudiantes.

Con respecto a la secuenciación vamos a considerar que los textos tradicionales de Cálculo siguen una secuencia como la del análisis matemático, tal vez hay algunas diferencias pero el orden de los temas según lo reportado en Dolores (2007) es: funciones numéricas (algebraicas y

trascendentes), límites, continuidad, otros temas relacionados a funciones, concepto de derivada, formulas de derivación y aplicaciones de la derivada al análisis de funciones y la obtención de máximos y mínimos. En los textos tradicionales, prácticamente no se revisan temas de variación o los relacionados a Física.

Los profesores

Es muy frecuente que los profesores de matemáticas conciban a las mismas como un sistema lógico y coherente de axiomas, postulados, teoremas, definiciones y conceptos, en donde no hay falla alguna (Parra, 2005), es decir las consideran como un sistema de reglas asociadas lógicamente en donde no hay contradicciones, vamos a decir que este es un enfoque predominantemente formalista en donde el rigor matemático se considera como de suma importancia, al mirar a las matemáticas de esta forma prácticamente no se relaciona a los conceptos vistos en Cálculo Diferencial con otras ciencias ni con problemas de variación o en problemas de aplicación que tengan que ver con la realidad, inclusive en el nivel superior aunque se considere a las matemáticas como una herramienta en el auxilio de otras ciencias como la economía o ingeniería, aún así predomina en los profesores el darle un mayor peso al contexto matemático que a su relación con otras ciencias (García, Azcarate & Moreno, 2006; Zuñiga, 2007), aunque este hecho también es debido a la falta de conocimiento que el profesor tiene de la aplicación de las matemáticas en otros ámbitos, bajo este enfoque también es considerado que el objeto de conocimiento es algo ya hecho y acabado, de tal forma que es incuestionable y por lo tanto el alumno se tiene que adaptar a ella sin tener la oportunidad de poder construir los conceptos, podemos entonces ver que los profesores y los alumnos aprenden a decir que es la derivada y la integral y “representarlas geoméricamente, sin tener una comprensión que les permita estudiar fenómenos de variación continua” (Cordero, 2005, p. 209), tampoco se resuelven problemas relacionados con otras ciencias o se sabe identificar el uso de los conceptos vistos en Cálculo Diferencial en problemas que se les pueden presentar a los estudiantes a no ser que sean problemas parecidos a los que los profesores les han presentado en sus cursos.

Es frecuente que los profesores enseñen a que los alumnos aprendan a encontrar de manera más o menos mecánica las derivadas, límites o algunos otros conceptos vistos en la materia, así como algunos problemas de aplicación como los que regularmente son expuestos en los libros de Cálculo Diferencial, esto puede obedecer en parte a que los profesores consideran que aprender Cálculo es equivalente a aprender a derivar, encontrar un límite, los puntos máximos y/o mínimos es decir a mecanizar destrezas básicas (Parra, 2005) y también en parte a que de esta forma se obtienen mayores calificaciones ya que se les evalúa a los alumnos los que estos saben hacer mejor y su vez estos le dan mayor importancia a esta situación puesto que es lo que se les evalúa cayéndose de esta manera en un círculo vicioso (Artigue, 1995, citado en Zuñiga, 2007).

Estado Actual de la recta tangente en la escuela

Hemos optado por revisar el programa de estudios de la materia de Pensamiento de Cálculo Diferencial del Edo. de México, que es el lugar en donde actualmente laboramos, la intención que se tiene es ver cómo se trabaja el concepto de recta tangente a la curva, el cual forma parte de nuestro objeto de estudio, desde nuestro punto de vista es un tema importante puesto que consideramos que con un manejo adecuado del mismo, podría servir como eje articulador de otros conceptos de CD como son la derivada, máximos y mínimos, así como punto de inflexión. Hemos observado lo siguiente, en el programa se hacen recomendaciones utilizando verbos como: Comprender, interpretar, analizar y construir; a pesar de ello, nos parece que sólo es en el uso del lenguaje, ya que al revisar la estructura del programa, prácticamente se está haciendo referencia a los mismos objetivos (temas o subtemas) de los programas tradicionales de Cálculo, no hay tampoco una referencia explícita de alguna metodología a utilizar, congruente con algún referente teórico de cómo lograr que el alumno pueda comprender, interpretar, analizar y construir los conceptos empleados en CD, inferimos que lo que se pretende es que se le quede esta tarea a el Profesor, sin embargo en nuestra experiencia personal al platicar con algunos profesores de nivel medio superior ³ y tomando también como referente lo reportado por Andrade et al. (2003) hemos notado que el cambio en el lenguaje no necesariamente provoca un cambio en las actividades en el aula, consideramos que es necesario que se explique él “como” tal y como es sugerido por investigadores del Programa de IBERCIMA quienes realizaron

un estudio a 22 países de Iberoamérica, incluido México, sobre el currículo de Matemáticas del nivel medio (Dolores, 2007).

Al revisar el tratamiento que se le da a la tangente observamos que es el mismo dado por cualquier curso tradicional de Cálculo Diferencial y también expuesto por libros de texto tradicionales. Por otro lado también observamos que en los escenarios que se exponen en el programa se da por entendido que los alumnos comprenden el carácter variacional que tiene la recta tangente a la curva, lo anterior lo podemos ver en el programa, en donde hay ejemplos en donde se dibujan las rectas tangentes y se da por entendido que los alumnos comprenderán claramente que la recta tangente está cambiando en cada punto, en Serna (2007) se ha reportado que esto es algo que no le queda claro a los estudiantes y al resultar tan obvio para los profesores no se le da ningún tratamiento didáctico, ocasionando dificultades en los procesos de enseñanza aprendizaje. Por último vemos que el programa sugiere textos elaborados por investigadores en Matemática Educativa, en dichos textos se ven plasmadas ideas que son el resultado de sus productos de investigación, sin embargo, a pesar de estas recomendaciones bibliográficas no vemos plasmadas sus ideas en la construcción de los conceptos del Cálculo Diferencial, sólo se hace mención de algunas de ellas en la introducción del programa y en el lenguaje utilizado, lo cual no concuerda desde nuestro punto de vista con el desarrollo de los problemas contextualizados y la estructura del programa, creemos que esto puede dar pie a la ambigüedad ya que hay dos tipos de ideas plasmadas en el programa por un lado algunas ideas en donde se plantea el uso del razonamiento crítico y por otro lado las mismas ideas que se han venido manejando en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial tanto por parte de los programas como por libros de texto, consideramos que ante esta disyuntiva los profesores finalmente optan por hacer lo que están acostumbrados y aunque cambien su manera de expresarse producto de la lectura del nuevo programa finalmente terminan haciendo lo mismo de siempre.

Conclusiones

A partir de lo visto en los apartados anteriores podemos detectar la existencia de una problemática que se encuentra presente en la enseñanza-aprendizaje de los cursos de Cálculo

Diferencial en nuestros sistemas escolares, en ella se encuentran presentes diversos factores como son los profesores con sus costumbres didácticas, los textos escolares y los programas de estudio, cada uno de estos factores se encuentran vinculados con los demás, por ejemplo los profesores tienen ciertas creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza producto de los libros que consultan y de los mismos programas que emplean, todo esto influye en sus modelos de enseñanza, los libros de texto tradicionales de Cálculo Diferencial están estructurados de tal forma que se le da un mayor énfasis a el formalismo, rigor matemático y el uso de algoritmos de naturaleza algebraica, en los libros frecuente no se tratan a profundidad ideas de tipo variacional, las cuales como se sabe históricamente hablando son precursoras del Cálculo, los mismos programas toman muchas veces como referente a los textos escolares de tal forma que su estructura sigue promoviendo la enseñanza tradicional, enseñanza en donde hay una matemática ya hecha, por lo tanto los profesores se convierten en transmisores de un conocimiento que ya está dado y que por lo tanto los alumnos sólo son receptores pasivos del conocimiento, sin tener la oportunidad de construir, el profesor y libro de texto se convierten en la autoridad en el aula y no la construcción de conocimiento a partir del uso de la razón. En la propuesta que pretendemos implementar en nuestro proyecto de investigación se pretende hacer un rediseño del Discurso Matemático Escolar, a través de un estudio socioepistemológico de la recta tangente, a partir de dicho estudio consideramos el poder rescatar elementos conceptuales que se han perdido en el transcurso de la historia y que pueden ser de utilidad desde un punto de vista didáctico, hemos considerado a la recta tangente puesto que este es una idea que dio origen a la derivada, de tal forma que al reconstruir la noción de recta tangente desde un punto de vista variacional, nos va ayudar por un lado a establecer un vínculo entre ideas que los alumnos tienen de la matemática básica con ideas de la matemática avanzada, por otro lado también creemos nos puede servir como un eje articulador con otras ideas del Cálculo Diferencial como son la derivada, máximos y mínimos, así como el punto de inflexión.

Bibliografía

Andrade, L., Perry, P., Guacaneme, E. y Fernández, F. (2003). *La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación?. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 6 (2), 80-106.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 1 (1), 40-55

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33 - 115.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). *El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(2), 133-154.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis Doctoral, CICATA-IPN, México.

Castañeda, A. (2006) *Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 253-265.

Cordero, F. (2005). *El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 265-286.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada*. México: Díaz de Santos.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006) *Creencias concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 85-116.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 25-68.

Papini, M. C. (2003). *Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 41-71.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (1), 69-90.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2), 267-296.

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente*. Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Zuñiga, L. (2007). *El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 145-175.