



Yadira Lizette Villarreal Calderón, Flor M. Rodríguez Vásquez

Universidad Autónoma de Guerrero

ylvc2004@hotmail.com, flormonr@hotmail.com

Resumen

En este trabajo mostramos los inicios de una investigación en la cual se pretende, teniendo como referente teórico metodológico a la Socioepistemología, identificar y reportar las dificultades que los estudiantes de nivel superior presenten al resolver problemas de aproximación por el “método del punto fijo” para encontrar raíces de ecuaciones no lineales en una variable para funciones definidas a trozos.

Palabras Clave

Dificultades, Socioepistemología, Método del Punto Fijo.

Introducción

En situación escolar, se presentan problemas que llevan a plantear ecuaciones complejas para las cuales, muchas veces no existe una solución exacta y mucho menos fórmulas para resolverlas como las hay para las ecuaciones lineales o cuadráticas, es decir, mediante métodos algebraicos conocidos. Por lo tanto, para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan los métodos de aproximación.

Pero aún viendo el valor práctico, científico y tecnológico de los métodos de aproximación, por lo regular, sólo en la enseñanza superior, en ocasiones, se enseñan métodos para resolver ecuaciones algebraicas de orden mayor que cuatro y ecuaciones trascendentes como las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, mediante técnicas de aproximación.

En este sentido, algunas investigaciones señalan que en la enseñanza de las matemáticas, un aspecto que llama la atención es que, se tiende a favorecer los métodos “exactos” por sobre los

aproximados, obviando las actividades generadoras de conocimiento. (Cantoral y Reséndiz, 2001)

En el mismo sentido, Vilenkin (1984), comenta que es por esto que ocurre que un graduado de la escuela superior en la que cursó matemáticas, experimente dificultades encontrándose ante la necesidad de resolver una ecuación trascendente sencilla, por ende, en la resolución de ecuaciones tropiezan no sólo ingenieros, sino también los técnicos, obreros y representantes de muchas otras profesiones.

Podemos entonces darnos cuenta que la enseñanza de los métodos para aproximar las soluciones de ecuaciones no lineales es indispensable. Además, de que su tratamiento incita a reforzar algunas nociones básicas que se deben tener acerca del área de conocimiento del cálculo, por ejemplo.

De manera específica, en el presente trabajo nos interesamos en investigar cuáles son las dificultades que muestran los estudiantes de nivel superior cuando se enfrentan a la resolución de problemas de aproximación por el “método del punto fijo” para encontrar raíces de ecuaciones no lineales en una variable para funciones definidas por partes. Dicha problemática la retomamos de algunas investigaciones que son parte de nuestros antecedentes y que reportamos a continuación.

En primer lugar citamos la investigación de Rodríguez-Vásquez (2003), en ella, la autora parte de la suposición de que la visualización es una forma de desarrollar el pensamiento matemático. Su propósito didáctico es proporcionar al estudiante un medio para dirigirlo hacia el significado de convergencia de sucesiones de funciones a partir de procesos recursivos apoyados en el teorema del punto fijo, el cual afirma que existe una única solución de la ecuación cuando f satisface ciertas condiciones. Por lo tanto, en el estudiante se pretende formar la noción de convergencia expuesta en dicho teorema, enfocando la atención en el papel que juegan en él las nociones de punto fijo y derivada.

La pregunta que guía a su investigación es: ¿Cómo los estudiantes podrían predecir la convergencia o divergencia de una sucesión recurrente utilizando estrategias de visualización? Para contestarla, la investigadora diseña una secuencia de actividades en la cual los estudiantes utilizan calculadora graficadora, para favorecer los procesos de visualización.

Los referentes teóricos que sustentan su investigación son: la Teoría de Situaciones Didácticas, de la cual extrae que el conocimiento de un individuo se genera a partir de las abstracciones que hace del medio, adaptando su conocimiento al mismo medio y; la Aproximación Socioepistemológica la cual considera la naturaleza sistémica de las dimensiones de conocimiento epistemológico, didáctico, cognitivo y social para formular su diseño de actividades.

Se concluye que, el predominio de recurrir a la forma en cómo se les enseñó el teorema del punto fijo es una invariante que los estudiantes reflejan en su discurso argumentativo, lo que da lugar a limitaciones en el desarrollo de procesos visuales como un medio para predecir la convergencia o divergencia de funciones iteradas. Se señala que la predicción no descarta a la visualización como un medio para la toma de sus decisiones, lo cual hace reflexionar en verla como un asunto que estimula el pensamiento matemático en las prácticas educativas. También se encontró que la visualización es necesaria para el tratamiento de contenidos escolares puesto que ella está presente en todo momento de iteración escolar, razón por la cual debe darse un seguimiento a su desarrollo con el objeto de ver favorecidos los aprendizajes.

En una dirección similar a la investigación anterior, encontramos el estudio de Aparicio, Cantoral y Rodríguez-Vásquez (2003), en el cual presentan un tratamiento didáctico sobre el problema de recurrencia de sucesiones e intentan mostrar cómo algunas nociones, como la de límite de una sucesión en sentido práctico, pueden ser visualizadas. Centran el trabajo en la noción de aproximación, específicamente en las aproximaciones sucesivas, además en él se fundamenta que la visualización es una forma en que los estudiantes desarrollan su conocimiento matemático y se ofrece una visión en cuanto al uso de tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas.

El problema del que parten los investigadores lo constituye el hecho de que se encuentran dificultades en el entendimiento de la mayoría de los estudiantes sobre la noción de límite en matemáticas, tal y como se trata en la enseñanza.

El marco teórico en que sustentan esta investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas y la relación entre éste y la problemática se ve establecida en la Aproximación Socioepistemológica, pues en ella se presume que en las actividades sociales se suscita conocimiento.

Después de la puesta en escena, en el trabajo se reporta que las dificultades que se constataron fue el hecho de ignorar a una sucesión como una función, puesto que recurre al tratamiento de sucesión como una serie de cálculos recursivos de valores. También se detecta que el proceso de iteración de una función responde a un algoritmo mecanizado, es decir, es vista como un objeto y no como un proceso en sí. Las actividades se trabajaron principalmente en el contexto analítico y geométrico, de allí advierten dificultades en el manejo de contextos de representación.

Con las actividades realizadas los investigadores lograron fundamentar las nociones de *punto fijo* y su *límite*, es decir, cómo la sucesión que se construye en el método de aproximaciones sucesivas converge hacia un valor que es el punto fijo.

La conclusión de este estudio, desde la postura de los autores es que, en didáctica de las matemáticas, se pretende más que el sólo entendimiento de las estrategias utilizadas en la resolución de problemas y de métodos para la mejora de éstas. Por eso la preocupación de los autores reside en la elaboración de situaciones de aprendizaje que permitan atender a los objetos matemáticos como significaciones abstraídas por el mismo estudiante.

Otro trabajo que nos habla acerca de dificultades que presentan los alumnos es el de Astiz et al. (2003), el cual nos presenta una experiencia de un curso de Análisis Numérico dictado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Mar del Plata.

Los autores mencionan que el hecho de introducir medios tecnológicos para manejar dinámicamente los objetos matemáticos, hace que los estudiantes puedan vivir nuevas experiencias, que son difíciles de lograr teniendo sólo como recursos al lápiz y al papel, que le permitan manipular directamente los objetos dentro de un ambiente de exploración.

Además, reportan que los alumnos tienen dificultad para llegar a comprender la esencia del Análisis Numérico, ya que esta asignatura posee características que no siempre son aplicables a todas las situaciones y la pertinencia o no de utilizar distintas herramientas para resolver un problema depende del contexto en el cual se va a utilizar. Esto significa que deben desarrollarse otras habilidades para resolver problemas.

Por estas razones, del área del Análisis Numérico, los investigadores seleccionaron el tema de resolución de ecuaciones no lineales por el método del Punto Fijo y para observar la relación que hay entre las funciones utilizadas en el método, como herramienta tecnológica, se usará el programa Derive, por ser éste un programa amistoso para los estudiantes.

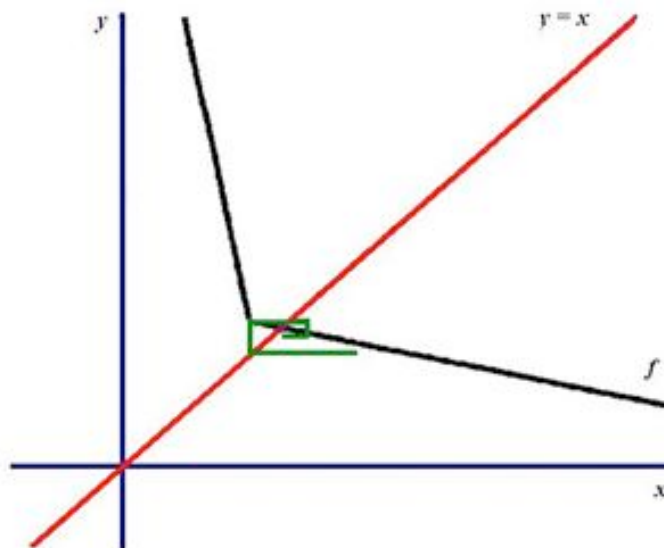
Para comenzar a trabajar el tema, los investigadores explican el algoritmo del método de iteración de punto fijo y señalan las condiciones que debe cumplir el método para hallar la raíz de una función $f(x)$. Con esto, los investigadores reportan que los estudiantes no tienen problemas para aplicar el algoritmo, pero al hacer esto de forma mecánica, presentan dificultades para interpretar cómo la sucesión generada a partir de ese algoritmo se aproxima a la solución. Para superar la dificultad anterior los investigadores proponen un ejercicio que se resolverá con ayuda del derive.

Algunas de las consideraciones finales que presentan los autores, es que en el Análisis Numérico se presentan dificultades, ya que los alumnos están acostumbrados a trabajar con precisión y se desconciertan cuando deben resolver situaciones donde existe cierto grado de incertidumbre, pero también que un programa, como el Derive, proporciona un importante recurso para observar gráficamente el comportamiento de los métodos, con sus interpretaciones tanto geométricas como analíticas, ayudando de esta manera a superar las dificultades mencionadas.

Otra investigación consubstancial a la nuestra es la realizada por Sierpiska (1994), de ella retomamos el modelo que plantea en el capítulo tres de su libro *Understanding in Mathematics*, cuando trata acerca “del papel del ejemplo y el medio en que se presenta la comprensión”, ella reporta que el *ejemplo* se puede presentar en un medio (inactivo, icónico o simbólico), y esto puede confundir las características de la representación con las características de la noción de lo que ejemplifica. A partir de esto explica algunos ejemplos que ilustran lo anterior.

En particular cabe resaltar el ejemplo titulado **iteración de funciones y el punto fijo**, en el cual se relata una clase en la que un profesor define el punto fijo de una función como un punto que no cambia según la función, para mostrar lo anterior, realiza una representación gráfica de la sucesión de iteraciones de una función y dice que la coordenada del punto de intersección de la gráfica de la función con la recta auxiliar $y = x$ representa el punto fijo de la función. Algunos estudiantes abreviaron esta definición: "el punto de intersección es el punto fijo". La función que se utilizó en esta clase fue la siguiente:

La gráfica de la función anterior que se les mostró a los estudiantes es la figura que sigue:



Cuando el profesor introdujo el ejemplo anterior, un alumno exclamó: “No, aquí hay dos funciones”. Fue entonces cuando el profesor explicó que una función no tiene que ser dada por una única fórmula.

Lo sucedido, según Sierpinski, es un síntoma de comprensión de la noción de función, en este caso, los alumnos se basan en los ejemplos en lugar de basarse en las definiciones. Inmediatamente después de la explicación, el profesor pidió a los estudiantes resolver un problema donde debían encontrar funciones que generara una sucesión de iteración periódica: 2, 3, 2, 3, 2,... teniendo puntos fijos atractores en el intervalo (2,3), un alumno notó que la única posible solución eran una función lineal a trozos. Fue entonces cuando el estudiante fue llevado a comprender que la noción de iteración de la función es válida también para las funciones lineales a trozos. Por un momento, él también conjeturó que el punto fijo es el punto formado de las dos partes lineales, pero fue fácil hacerlo cambiar de opinión ya que era muy inteligente.

Lo anterior, nos lleva a concluir que hay dificultad para comprender ciertos aspectos del Análisis Numérico, sobre todo en lo referente a las técnicas de aproximación, más aún, existen dificultades sobre la noción del punto fijo cuando se les pide a los estudiantes obtener el punto fijo de funciones a trozos. De aquí es de donde parte la presente investigación.


Referentes teóricos-metodológicos


Esta investigación está siendo realizada bajo el sustento de la Aproximación Socioepistemológica, aproximación que tiene su origen, al seno de la Matemática Educativa dentro de un grupo de investigación perteneciente al Cinvestav- IPN. Con esta aproximación, se exigió un cambio de perspectiva respecto de los enfoques clásicos de la investigación, enfoques hasta entonces dominantes. Inicia con una mirada crítica de las tradiciones formalistas y busca una ampliación de la mira de los enfoques constructivistas.


La Socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica, puesto que cada una de sus componentes es de naturaleza distinta a las otras, sin embargo, cada componente debe ser expresada y adquiere sentido en términos de las demás.

Ahora bien, abordar el estudio de nuestro problema, teniendo como referente teórico a la Socioepistemología, la cual consta de una perspectiva sistémica, que incorpora el estudio de la epistemología, el conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003; Cantoral, R. et al., 2006), nos permitirá identificar y reportar las dificultades que los estudiantes presenten al resolver actividades en donde se involucren con funciones definidas a trozos.

Para nuestro estudio las dimensiones se considerarán de la siguiente forma:


 *Dimensión epistemológica.* Explicación del devenir histórico del contenido matemático en juego.

 *Los planos de lo cognitivo.* Esta dimensión se encuentra asociada a los esquemas cognitivos de la población a la cual se dirige la enseñanza. Se aplicarán y analizarán actividades orientadas a resolver funciones definidas a trozos para identificar las dificultades que presenten los estudiantes.

 *Dimensión didáctica.* Se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina los efectos e implicaciones didácticas. Se considerará analizar algunos libros en los cuales se traten el método de aproximación del punto fijo y el teorema del punto fijo. El cual nos dice lo siguiente:

Teorema del Punto Fijo.

Sea f tal que f para toda x . Además supongamos que existe L y una constante k tales que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Entonces para cualquier número x_0 la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge al único punto fijo x^* .

 *Dimensión sociocultural.* Referente a la construcción social del conocimiento, correspondiente a una epistemología en su organización social.

Aunada a la Socioepistemología, consideraremos como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica de donde seguiremos los lineamientos que en ella se proponen, así por ejemplo, consideraremos las dimensiones de conocimiento antes mencionadas y además las fases propuestas por dicha metodología para el planteamiento de nuestro diseño didáctico.

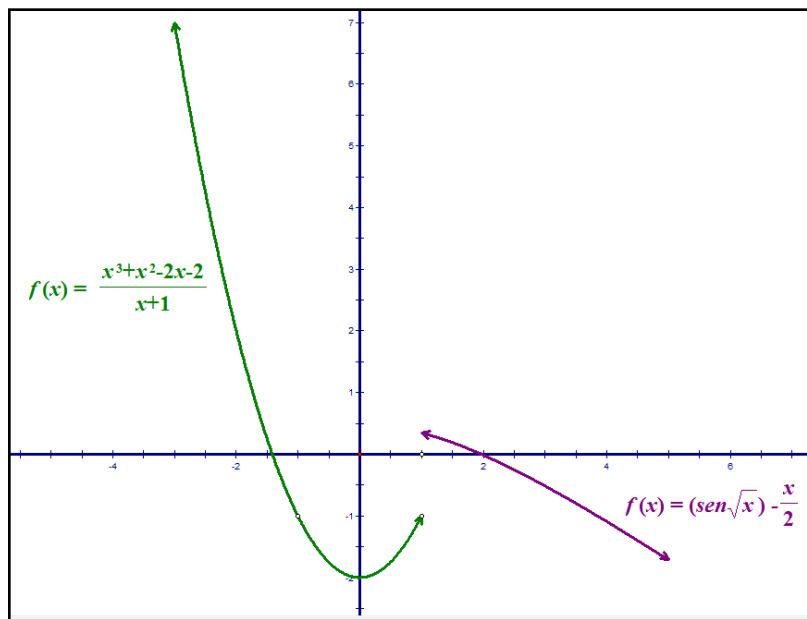
Conclusiones

Se pretende realizar un diseño de actividades para esta investigación con el objetivo de identificar algunas dificultades en el aprendizaje inmersas en el tema específico de la solución de ecuaciones no lineales, ya que muchas veces se le presta poca atención, siendo utilizadas en situaciones muy variadas y además prácticas.

Creemos, que al conocerse algunas dificultades en las técnicas de aproximación para resolver ecuaciones del tipo aquí planteadas, en nuestra disciplina se podrán realizar propuestas concretas para que los estudiantes superen las mismas y con esto mejoren su instrucción en el tema.

Como ejemplo y para finalizar, mostramos a continuación un ejercicio correspondiente a la fase de validación de nuestra metodología, ejercicio que tiene por objetivo que el estudiante tome en cuenta tanto las condiciones fundamentales del teorema del punto fijo como el algoritmo del método de aproximación del punto fijo, para lograr resolver lo que se le pide. El ejercicio es el siguiente:

- 📌 Aproxima la raíz, por el método del punto fijo, de la siguiente función por partes:



Tipo de ejercicio que sin duda es esencial para el logro de nuestro objetivo.

Bibliografía

Aparicio, E., Cantoral, R. y Rodríguez-Vásquez, F. (2003). Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(2), 445-449.

Astiz, M., Medina P., Montero, Y., Rocerau, M., Vecino, M. y Vilanova, S. (2003). Un asistente matemático en la enseñanza de resolución de ecuaciones no lineales por el Método del Punto Fijo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16(1), 94-99.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Educación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-102.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(1), 27 – 40.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rodríguez-Vásquez, F. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav- IPN.

Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Vilenkin, N. (1984). *Método de las aproximaciones sucesivas*. Rusia: Mir. Moscú