

FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES. UN ANÁLISIS DE SU TRATAMIENTO Y RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO ESCOLAR



Elma Yam Huh, Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán
yam_elma@hotmail.com, alanda@uady.mx

Resumen

En el presente artículo se discute sobre cómo a través de la articulación entre el desarrollo histórico (epistemología) de los conceptos y la didáctica asociada a estos, es posible identificar aspectos que permitan aportar ideas sobre formas o alternativas de tratamiento escolar. Particularmente atendimos el caso de la función definida por partes. Así, bajo el marco de la socioepistemología se analizaron algunos aspectos históricos-epistemológicos, sociales, cognitivos y didácticos que favorecieran la construcción o reconstrucción de significados del concepto función definida por partes. De esta manera, se logró identificar que el desarrollo y tratamiento escolar de la noción función definida por partes, debe estar en un trabajo asociado al estudio y tratamiento de la contigüidad gráfica, continuidad y discontinuidad de funciones, o bien, en un sentido más amplio, en el estudio sistemático de formas de comportamiento gráfico de las funciones.

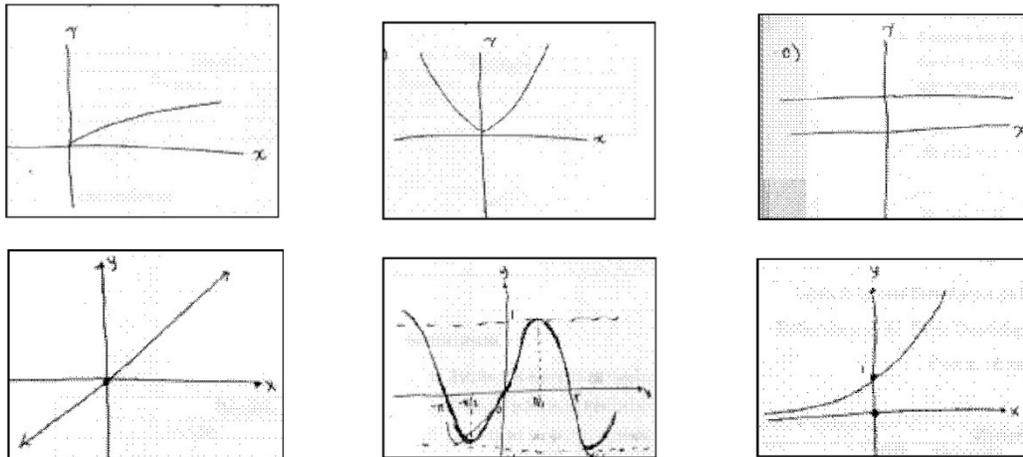
Palabras Clave

Socioepistemología, didáctica, función definida por partes, comportamiento gráfico.

Introducción

El actual discurso matemático escolar confiere poca importancia a la función definida por partes. Por lo regular, su introducción suele hacerse bajo el discurso de ser una función en cuya naturaleza presenta un dominio de definición “fraccionado” y que no merece más atención que esa. Así, en el tratamiento de transformación de funciones asociadas a operaciones elementales como la suma, resta, producto y división, no suele ilustrarse cómo llevar a cabo dichas operaciones con este particular tipo de funciones. Más aún, al momento de tratar el tema de función compuesta, éste tampoco suele hacerse con dichas funciones. Esta forma de tratamiento escolar puede provocar en los estudiantes, una conceptualización equívoca de dicho concepto.

Muestras de ello es que se puede encontrar en la literatura trabajos cuyos reportes nos permiten afirmar que el “universo” de representaciones y tipos de funciones que aparentemente logran estabilizarse en la mente de estudiantes e incluso en algunos profesores de matemáticas del nivel educativo medio, está asociado a la característica de contigüidad y continuidad de las mismas. Un ejemplo de ello puede observarse en López y Aparicio (2009), quienes reportan que cuando solicitaron a los estudiantes trazar gráficas de funciones, los estudiantes trazaron aquellas con comportamientos contiguos como las siguientes gráficas:



Tales circunstancias hacen suponer la existencia de algunas dificultades y carencias entre los estudiantes al momento de tener que trabajar con conceptos más avanzados como límite, derivadas e integrales, incluso ecuaciones diferenciales y que dichas dificultades tendrían sus orígenes en la “didáctica” y “epistemología artificial” conferida a algunos conceptos, como el discutido en este trabajo.

En este sentido, el presente trabajo se realizó con la intención de analizar el tipo de relación que se establece entre la didáctica y la historia de la función definida por partes respecto a su actual tratamiento escolar con el objetivo de identificar elementos que permitan aportar ideas sobre formas o alternativas de reconstrucción de significados escolares.

Metodología

Con el fin de establecer algunos elementos teóricos-didácticos que permitieran aportar ideas sobre formas alternativas de reconstrucción de significados a las dadas actualmente a la función definida por partes en los escenarios escolares y bajo la premisa de que en prácticas sociales tales como la argumentación es donde se reconocen procesos y elementos significativos para la construcción de conocimiento, consideramos centrar nuestra atención en un análisis sistémico que relacionara tanto lo social y epistemológico, como lo cognitivo y lo didáctico, a fin de precisar algunas actividades o prácticas con fines didácticos que posibilitaran la construcción o reconstrucción escolar del concepto función definida por partes.

De esta manera, el método de estudio seguido consistió en realizar un análisis individual y sistémico de los elementos antes mencionados.

- Así, para el análisis epistemológico de corte histórico, se realizó una revisión documental en la que se consultaron fuentes tales como: Cantoral y Farfán (2003); Edwards, (1979); J J O'Connor y E F Robertson (2005) y, Cañada (2000) cuyo contenido proporcionó información relacionada con el desarrollo histórico del concepto función y consecuentemente función definida por partes.
- Para el análisis didáctico se partió del hecho de que la mayoría de los profesores de matemáticas basan su tratamiento escolar de los conceptos en el aula, en el presentado en un libro de texto. Por lo que el análisis didáctico se realizó con base en la lectura de libros de texto considerados como los más empleados en los cursos de precálculo y que es justo donde el estudiante por primera vez realiza un estudio más amplio del campo de las funciones, ya que la intención era observar cómo se pretende realizar la reconstrucción del concepto función y posteriormente función definida por partes.
- Con los análisis previos se pudo formular la hipótesis para el desarrollo y aplicación de un diseño didáctico experimental sobre el estudio de la noción de función definida por partes, que consiste en asumir que dicho estudio debe estar inmerso en un tratamiento escolar asociado al estudio de la propiedad de continuidad y discontinuidad de funciones, o bien, en el estudio de comportamientos gráficos de las funciones.

El diseño se conformó de dos actividades cuya característica radica en la interacción entre función y sus representaciones gráficas y algebraicas. La aplicación de este diseño nos permitió observar cómo los estudiantes reconstruyen su noción de función definida por partes.

Resultados

Se pudo observar que el tratamiento didáctico de la función definida por partes, se declara “cumplido” al presentar algunos ejemplos gráficos y algebraicos “especiales (como el valor absoluto)” de la función definida por partes (Ávila, Quijano y Trejo, 2004; Stewart, J. 2003), es decir, basta con presentar algunas representaciones gráficas con comportamientos “irregulares” y sus expresiones algebraicas para referirse a una función definida por partes. En la siguiente tabla se presenta de manera más detallada algunos de los resultados obtenidos a partir de nuestro análisis didáctico.

Libros	Análisis
Ávila, Quijano y Trejo, 2004; Stewart, J. 2003	Al momento de tratar con el concepto función se hace sin prestar atención a la diferencia de definirla en términos estáticos y definirla en términos variables, lo que puede derivar en dificultades para el entendimiento del concepto función en general y función definida por partes en particular.
Ávila, Quijano y Trejo, 2004; Stewart, J. 2003	En el tratamiento conferido a la graficación de funciones, se parte de la representación gráfica de pares ordenados en un plano cartesiano en donde se realiza la unión de dichos pares a través de una curva, esto se realiza sin hacer el énfasis necesario en las condiciones a satisfacerse para que el estudiante tenga claro que esto es posible realizarse dado que la función tiene como dominio e imagen a todos los números reales. Este tratamiento junto con el hecho de que los seres humanos perciben los fenómenos físicos, de manera global (Aparicio y Cantoral, 2006) y con comportamientos contiguos y continuos, conduciría al estudiante a considerar toda representación gráfica de comportamiento contiguo como una función, limitando de esta manera sus entendimientos de éste concepto.

<p>Ayres, F. y Mendelson, E. 1994; Ávila, Quijano y Trejo, 2004</p>	<p>Suele hacerse referencia a la expresión analítica de una función como ecuación, sin hacer los señalamientos adecuados para que el estudiante distinga una función de una ecuación arbitraria, es decir, para que pueda distinguir dada una expresión $y^2 = 13 - x^2$, si representa o no una función.</p>
<p>Ávila, Quijano y Trejo, 2004</p>	<p>Se otorga atención particular a cada tipo de función, en sus representaciones gráfica, numérica y algebraica, y sólo en el caso de un libro de texto, se pudo observar que se otorga un capítulo para el estudio de la función definida por partes</p>
<p>Stewart, J. 2003</p>	<p>Se vislumbra una marcada desvinculación entre el tema función definida por partes y los posteriores inmediatos, no así con los otros tipos de función.</p>
<p>Ayres, F. y Mendelson, E. 1994</p>	<p>Las forma en que se utilizan las representaciones algebraicas, podría generar la idea de que en realidad se tratan varias funciones y no una sola; ya que se presentan expresiones tales como:</p> $f(x) = 5 \text{ cuando } 0 < x \leq 1$ $f(x) = 10 \text{ cuando } 1 < x \leq 2$ $f(x) = 15 \text{ cuando } 2 < x \leq 3$ $f(x) = 20 \text{ cuando } 3 < x \leq 4$ <p>y se indica, que se está frente a una función definida por partes.</p>

Mientras que en el desarrollo histórico de la función definida por partes, fue posible identificar que la discusión y confrontación generada sobre la representación gráfica, algebraica y el comportamiento (continuidad, contigüidad y discontinuidad) de las funciones, fueron aspectos que intervinieron en la construcción (histórica) del concepto función y a su vez función definida por partes. Por ejemplo en 1748 Euler definió como una función mixta, que a su vez considero como función discontinua, a aquella función que se expresa en términos de dos o más expresiones analíticas, mientras que función continua la definió como aquella que era expresada mediante una única expresión analítica; no obstante, en 1780 se demostró que una función mixta podría representarse mediante una sola fórmula, por tanto, no tenía sentido hablar de funciones continuas y discontinuas, posteriormente, en 1844 Cauchy proporciono un ejemplo de lo mencionado, el caso de la función valor absoluto que podía representarse por una

expresión analítica ($y = \sqrt{x^2}$) o dos expresiones ($y = x$ para $x \geq 0$, $y = -x$ para $x < 0$) (J J O'Connor, E F Robertson, 2005).

De manera general se pudo observar que tanto en la construcción histórica del concepto como en el tratamiento didáctico de hoy día, se presenta el estudio del concepto función con un énfasis en sus representaciones algebraicas y gráficas. Asimismo, se puede decir que la construcción histórica del concepto de función definida por partes estuvo asociada al estudio de los comportamientos gráficos (continuidad, discontinuidad y discontinuidad), a partir de los cuales se obtienen sus expresiones algebraicas, considerando que una representación gráfica que presentara curvas con comportamientos irregulares, era “sinónimo de función definida por partes” (Arbogast (1759-1803), citado en Aparicio y Cantoral (2006).

Dado que el concepto función se “construye” (histórica y escolarmente), a través del análisis de las representaciones algebraica y gráfica, y que el ser humano obtiene un mejor aprendizaje al confrontar sus conocimientos asociados al concepto en cuestión. Se llevo a cabo la aplicación de un diseño, con el objetivo verificar la pertinencia de nuestra hipótesis.

El diseño fue aplicado a estudiantes de primer año de las licenciaturas de Ciencias en la Computación, Software y de Enseñanza de las matemáticas, quienes fueron divididos en dos grupos, de cuatro y tres estudiantes. Un grupo por cada actividad respectivamente.

En la primera actividad, se presentó una serie de gráficas con diferentes comportamientos: comportamiento continuo (polinómicas); comportamiento continuo y trazo irregular; comportamiento discontinuo (con “saltos”); comportamiento discontinuo puntual, tal cual se ilustra en la Figura 1.

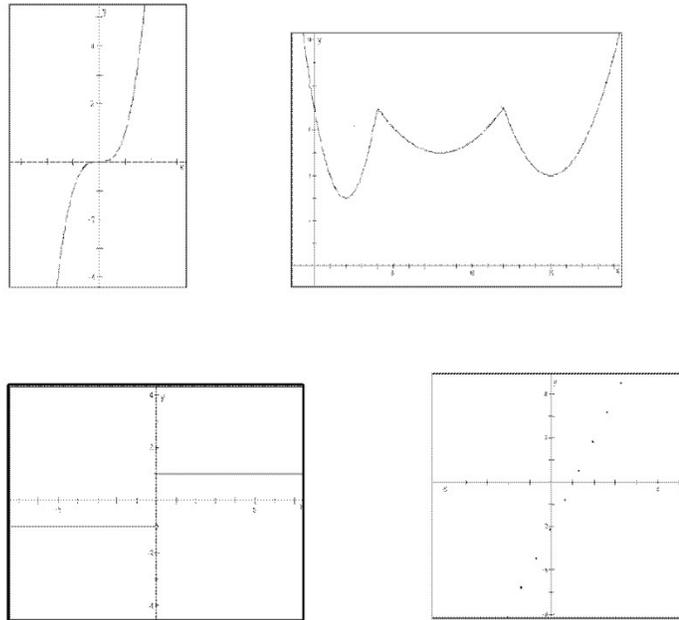


Figura 1

Al respecto se plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Les sería posible dar la expresión funcional que corresponde a cada gráfica? Argumenten su respuesta.

De manera general, las respuestas proporcionadas por los estudiantes dejan ver la identificación del concepto función como “regla de correspondencia”. Así se pudo observar en el tipo de respuestas proporcionadas, ejemplo:

-Sí, ya que se da la regla única de correspondencia.

- Sí, ya que se da una única regla de correspondencia para las gráficas

2. ¿Creen que exista un fenómeno que pueda ser descrito por las gráficas? En caso afirmativo, describan cómo tendría que ser dicho fenómeno.

Ante este reactivo los estudiantes obtuvieron con facilidad un fenómeno que puede ser descrito por las gráficas de comportamiento contiguo, pero se les dificultó describir un fenómeno para las gráficas discontinuas. Esto quedó manifestado en el tipo de respuestas proporcionadas por los estudiantes:

- Sí podríamos encontrar funciones, pero, encontrar una función la cual este dando el comportamiento de algún fenómeno, es casi imposible.

- Sí, se podría encontrar funciones que cumplan o que se parezcan a las gráficas, pero, tal vez describir un comportamiento físico y/o de la vida cotidiana será bastante complicado.

Seguidamente, se presentó un fenómeno que podría ser representado mediante una función definida por partes, y se solicitó describir dicho fenómeno, mediante una expresión gráfica y algebraica. Los estudiantes no presentaron dificultades al describir la expresión gráfica (figura 2), no así, al describir la expresión algebraica, ya que en lugar de describir una función definida por partes, presentaron cuatro expresiones funcionales como las siguientes:

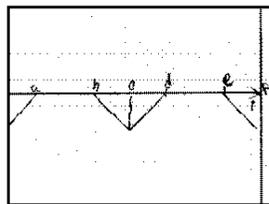


Figura 2

$$f(x) = \dots 0 \leq x \leq a$$

$$g(x) \rightarrow b \leq x \leq c$$

$$h(x) \rightarrow c \leq x \leq d$$

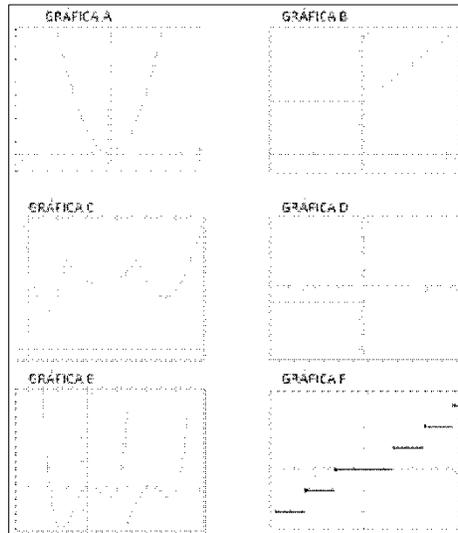
$$i(x) \rightarrow e \leq x \leq f$$

Para finalizar con la primera actividad, se solicitó describir un discurso mediante el cual se explique el concepto de función definida por partes a una persona que por primera vez trataría dicho concepto, la respuesta emitida de manera grupal fue la siguiente:

“Existen funciones que respetan una regla, pero también existen otras funciones que en intervalos toman diferentes comportamientos, la gráfica se comporta de diferentes maneras”

Y señalaron que presentarían algunas gráficas como las analizadas anteriormente, para ilustrar la función en cuestión.

En la segunda actividad se solicitó determinar las expresiones algebraicas de gráficas con comportamientos contiguos regulares, contiguos irregulares y discontiguos, tal y como se ilustra en la figura 3. De aquí se observó que los estudiantes identificaron aquellas gráficas que representaban a las funciones definidas por partes a partir del comportamiento que éstas describían.



Posteriormente, se preguntó a los estudiantes cómo definirían la función definida por partes. De manera general, la respuesta obtenida estuvo asociada a funciones con comportamientos gráficos irregulares, así lo muestran las respuestas de los estudiantes:

Respuesta 1. *Es una función que al momento de representarla en forma de una gráfica, ésta no sigue una trayectoria única, sino que hay variaciones.*

Respuesta 2. *Una función definida por partes, es en la cual no basta una función para representar la gráfica, ya que son de magnitudes diferentes y no se puede representar de la misma forma. Por ello necesita más funciones para representarse y no solo una.*

Respuesta 3. *Una función definida por partes es la función la cual está definida por una función diferente según el intervalo.*

Siguiendo con la actividad se les presentó a los estudiantes un conjunto de gráficas con la característica de mostrar comportamientos irregulares, empero, cuyas expresiones no obedecían a funciones definidas por partes. Cabe decir que dicha información no se proporcionó a los estudiantes y se les solicitó que determinaran cuáles de las gráficas estaban asociadas a funciones definidas por partes. Los estudiantes consideraron que todas las gráficas eran de este tipo de función dado que presentaban comportamientos gráficos irregulares. Una vez proporcionado sus respuestas, se les informó que ninguna de las gráficas representaba funciones definidas por partes y se les presentó las respectivas expresiones algebraicas. Acto seguido se les cuestionó que si ante tales circunstancias, cambiarían la definición que previamente habían proporcionado de función definida por partes.

Ante la declaración oral de uno de los estudiantes, de que no cambiaría su definición, dado que esta no la había basado en comportamientos gráficos, sus compañeros señalaron estar de acuerdo en el sentido de que una función definida por partes no debe de estar asociada únicamente con comportamientos gráficos irregulares.

Discusión

Los estudiantes basan su definición de función definidas por partes en aquellos comportamientos gráficos irregulares, los cuales, a decir con sus propias palabras, no pueden ser representados mediante una sola expresión algebraica.

Luego, a partir de centrar y fortalecer la atención en la función definida por partes como un resultado de comportamientos gráficos irregulares y confrontando posteriormente esta noción de función, rompiendo con la noción preestablecida, es que los estudiantes reconstruyeron su noción de función definida por partes.

Este hecho deja ver que el conocimiento de la relación entre cierto tipo de funciones (funciones definidas por partes) y su aspecto gráfico, no es suficiente para favorecer un análisis profundo por parte de los estudiantes con respecto a otro tipo de relaciones funcionales-gráficas.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo, consistió en identificar elementos que permitan aportar ideas sobre formas de tratamientos o alternativas de construcción de significados escolares referentes al concepto función definida por partes. El cual se obtuvo, a través del análisis histórico y didáctico de la función definida por partes.

Fue así que el análisis socioepistemológico realizado respecto al concepto función y particularmente función definida por partes, deja ver que las nociones desarrolladas tanto histórica, como didáctica y cognitivamente asociadas a dicho concepto, están relacionadas con el análisis de cierta irregularidad de comportamientos gráficos que determinan algunos tipos de funciones (conocidas y no conocidas por una comunidad específica).

De esta manera, la evidencia de corte histórico-epistemológico y la del tipo empírico obtenida en el desarrollo de este estudio permite decir que, el desarrollo y tratamiento escolar de la noción función definida por partes debe estar en un trabajo asociado al estudio y tratamiento de la contigüidad gráfica, continuidad y discontinuidad de funciones, o bien, en el estudio sistemático de formas de comportamiento gráfico de las funciones.

En síntesis, observamos que el análisis de comportamientos gráficos de funciones por parte de los estudiantes, los lleva a realizar reflexiones semejantes a los realizados por algunos pensadores matemáticos de antaño, cuando una situación exige confrontar conocimientos establecidos (aceptados por la comunidad) con aquellos en proceso de construcción.

Así, es claro que los significados no están en los conceptos o en sus definiciones, menos aún, en su ejemplificación. También es claro que para los estudiantes, no basta poseer un conocimiento básico sobre la caracterización algebraica de la función definida por partes y su relación con su aspecto gráfico para reconstruir significados o identificar nuevos tipos de relaciones algebraicas-gráficas, se requiere pues, de una confrontación entre las nociones ya establecidas en los estudiantes, con aquellas que aun no se encuentran establecidas y resultan necesarias

establecer, a fin de avanzar en el proceso de construcción de conocimiento matemático. Particularmente, aquel que se suscita en las aulas de clase producto de su interacción didáctica.

Bibliografía

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 7-30.

Ávila, Quijano y Trejo (2004). *Precálculo, Matemáticas 4*. Mérida, Yucatán. Mac Graw Hill.

Ayres, F. y Mendelson, E. (1994). *Cálculo diferencial e integral*. México. Shawn.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Distrito Federal, México. Editorial Thomson.

Cañada, A., (2000). Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las Ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 293-320.

Edwards, C (1979). *The Historical development of the calculus*. New York, USA: Springer.

J J O'Connor, E F Robertson (2005). *The function concept* (Escandón, C, Trad.), consultado en Septiembre 2, 2008, en la página http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_4379_historia_del_concepto_funcion.htm (artículo original, disponible en <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Functions.html>)

López, A., Aparicio, E. (2009). Un estudio sobre la noción de función constante, Tesis de licenciatura no publicada, UADY, Mérida, Yucatán, México.

Stewart, J. (2003). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Bogotá, Colombia. Editorial Thomson Learning Editores.