

ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD Y SUS SIGNIFICADOS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR Y EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN BÁSICA

Analysis of probability and its meaning in the school curriculum and textbooks of basic education

Vásquez, C.^a y Alsina, A.^b.

^aPontificia Universidad Católica de Chile, ^bUniversidad de Girona

cavasque@uc.cl, angel.alsina@udg.edu

Resumen

En los últimos años la probabilidad se ha incorporado en los currículos de Educación Básica para poder proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades. Desde este prisma, en primer lugar se revisan las orientaciones curriculares del National Council of Teachers of Mathematics, y del los currículo de matemáticas de Chile en relación con la probabilidad; y en segundo lugar se analizan los conocimientos que se trabajan en una colección de libros de texto chilenos. Se concluye que el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en concordancia con las directrices curriculares.

Palabras clave: *probabilidad, enseñanza de la probabilidad, currículo de matemáticas, libro de texto, Educación Básica.*

Abstract

Lately, probability has been incorporated into Elementary Teaching curricula so as to provide students with a stochastic experience from early the earliest stages. Following this perspective, first curriculum guidelines of the National Council Mathematic Teachers are revised together with the Chilean mathematic curriculum regarding probability. Secondly, contents which are present and used in a Chilean textbook collection is analyzed. The conclusions suggest that the way probability is worked in textbooks is not always aligned with curriculum guidelines.

Keywords: *probability, probability education, mathematics curriculum, textbook, elementary teaching.*

1. INTRODUCCIÓN

La educación matemática es una disciplina atenta a los cambios sociales y procura darles respuesta. Es desde esta perspectiva que en las últimas décadas se incorpora con fuerza la probabilidad en los currículos de Educación Básica, con el objeto de promover que los alumnos aprendan conocimientos probabilísticos que les sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. En definitiva, se trata de ofrecerles herramientas que faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante, para que progresivamente sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* incluyó a “Datos y Azar” como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989), reforzando esta iniciativa en *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), que contemplan que los programas de enseñanza deberían capacitar a los alumnos para aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y la probabilidad a partir del nivel *Pre-K* (tres años). Esta tendencia, como decíamos, se ha reflejado en los currículos de matemáticas de muchos países, entre ellos Chile, que han incorporado la

probabilidad en Educación Básica para promover un enfoque experimental que proporcione una experiencia estocástica desde las primeras edades (Mineduc, 2012). Por otro lado, el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad ha dado lugar a la coexistencia de distintos significados que cobran gran relevancia en el contexto de la matemática escolar (Figura 1).



Figura 1. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Vásquez y Alsina, 2015, p. 443)

Estos significados han permitido fundamentar y desarrollar la Teoría de la Probabilidad, que otorga modelos para fenómenos donde la falta de certeza en los resultados es notable. Desde esta perspectiva, en la enseñanza de la probabilidad es fundamental adoptar una perspectiva de modelización en que sus significados se complementen, pues una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse a uno de ellos (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). La transformación curricular y la evolución de la Teoría de la Probabilidad hasta su estado actual requieren profesorado capacitado, es decir, maestros con una sólida base de conocimientos tanto disciplinares como didácticos, que les permita enseñar de forma idónea el objeto matemático “probabilidad” a partir de sus distintos significados. Sin embargo, muchos profesores de Educación Básica no han tenido formación sobre probabilidad y su didáctica (Vásquez y Alsina, 2014), por lo que, para compensar este déficit formativo, se apoyan en los libros de texto conformándose en el recurso para interpretar el currículo y seleccionar tareas matemáticas para los alumnos (Styliandes, 2009). De esta forma, el libro se convierte en el agente fundamental, sino único, para enseñar probabilidad (Remillard, 2000), ya que expone de manera concreta una transposición didáctica del saber (Chevallard, 1991). Desde este enfoque, en este trabajo, se revisan en primer lugar las orientaciones curriculares vinculadas al estudio de la probabilidad en Educación Básica del NCTM, y en el currículo chileno. Y en segundo lugar se analiza qué conocimientos sobre la probabilidad se acaban enseñando, tomando los libros de texto como principal recurso para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2. LA PROBABILIDAD: SUS SIGNIFICADOS Y SU PRESENCIA EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN BÁSICA.

Como se ha indicado, coexisten distintos significados de la probabilidad:

- Significado intuitivo: utiliza diversos términos (imposible, probable, seguro) para hacer referencia a la incerteza o certeza de determinados sucesos, y expresar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación a sucesos inciertos.
- Significado laplaciano: considera que la probabilidad de un suceso es “la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean

igualmente probables” (Laplace, 1985). Esta definición aparece en muchos textos escolares dada su simplicidad para el cálculo de probabilidades, aunque no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico, es decir, no cumple con la condición de equiprobabilidad.

- Significado frecuencial: plantea la asignación de probabilidades de un suceso a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, lo que permitiría estimar la probabilidad del suceso. Este teorema, denominado “Ley de los Grandes Números”, indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas.
- Significado subjetivo: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. En este caso, pues, la probabilidad depende del observador y, de lo que éste conoce del suceso en estudio.
- Significado axiomático: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Bajo este enfoque no se define explícitamente cómo calcular probabilidades, sino que se establecen las reglas que debe satisfacer (debido a la rigurosidad matemática que este significado conlleva, se desaconseja su estudio en Educación Básica).

En relación a las orientaciones curriculares contemporáneas sobre probabilidad, éstas hacen alusión a los siguientes conocimientos:

Tabla 1. Contenidos de probabilidad en las orientaciones curriculares del NCTM.

	Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos	Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad
Pre K-2 (3-8 años)	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.	
3-5 (9-11 años)	Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos, y diseñar estudios para investigarlas más a fondo.	Describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable; Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones; Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.
6-8 (12-14 años)	Utilizar observaciones relativas a las diferencias entre dos o más muestras, para formular conjeturas sobre las poblaciones de las que se han extraído; Formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste	Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes; Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones; Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos

	aproximadas; Utilizar las conjeturas para formular nuevas preguntas y programar nuevos estudios para contestarlas.	como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.
--	---	--

En la tabla anterior se exponen los contenidos para alumnos de edades comprendidas entre 3 y 14 años porque se presentan de esta forma en los estándares de contenidos de “análisis de datos y probabilidad” americanos, por lo que debe considerarse que en ambos extremos hay contenidos que deberían enseñarse en los niveles educativos anteriores y posteriores a la Educación Básica respectivamente. En relación a la etapa educativa que nos ocupa (6-12 años), el desarrollo de los conocimientos básicos de probabilidad pasa por diferentes fases: a) se inicia de manera informal, introduciendo el vocabulario vinculado por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la probabilidad de sucesos, cuyas respuestas consideran el empleo de términos como: más probable, menos probable o imposible; b) sigue con la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc., para empezar a aprender cómo cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, que oscila entre 0 (imposible) y 1 (seguro); y c) finaliza con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos, dejando para la siguiente etapa educativa el cálculo de probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

Respecto al currículo chileno, las “Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática” (Mineduc, 2012) recogen los siguientes contenidos probabilísticos, dentro del eje de “Datos y probabilidades”:

Tabla 3: Orientaciones curriculares en el currículo chileno para la Educación Básica.

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Indicadores de Evaluación Sugeridos
1° básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	Registran datos, usando bloques y tablas de conteo. Recolectan y organizan datos, usando material concreto, registros informales y tablas de conteo. Responden preguntas, utilizando la información recolectada.
2° básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas. Registran datos en una tabla de conteo acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados. Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables. Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.

3° básico	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas y monedas, registrando los resultados en tablas de conteo y diagramas de punto.
4° básico	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	Realizan experimentos con dados de distintas formas. Extraen naipes al azar con y sin devolver. Reconocen que los resultados de experimentos lúdicos no son predecibles. Realizan repeticiones de un mismo experimento, determinan la frecuencia absoluta y la representan en gráfico. Usan software educativo para simular experimentos aleatorio.
5° básico	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar. Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible. Ejemplifican eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible. Ejemplifican eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla. Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra. Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.
6° básico	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol. Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las tendencias de los resultados. Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.

Como puede apreciarse en la Tabla 3, es posible distinguir también tres etapas orientadoras del proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad para la educación básica: 1) plantear distintos tipos de situaciones y preguntas, en un contexto familiar y de interés para los alumnos, que les permita distinguir los datos que son pertinentes para responder; b) organizar y analizar datos a través de distintos registros que permitan realizar inferencias y predicciones para responder a las situaciones y preguntas; c) adquirir nociones básicas de probabilidad para su aplicación en situaciones de la vida diaria y para su estudio con mayor profundidad en etapas posteriores

En síntesis, las orientaciones curriculares de la asociación norteamericana de profesores de matemáticas -que sirven de base para el diseño de los currículos de matemáticas de la mayoría de países- sugieren que en la didáctica de la probabilidad en Educación Básica deberían considerarse tres fases correlativas: en primer lugar, la adquisición de lenguaje probabilístico elemental (términos como imposible, probable y seguro); en segundo lugar, la cuantificación de la probabilidad, considerando que la posibilidad de ocurrencia de un hecho oscila entre 0 (cuando es imposible) hasta 1 (cuando es seguro); y en tercer lugar, el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un hecho. Este proceso de adquisición de conocimientos probabilísticos, en el caso del currículo chileno, se contempla de forma menos profunda y con una menor amplitud en los contenidos, ya que solo se aborda la probabilidad desde un punto de vista intuitivo y más bien ligada a una visión frecuentista.

3. LA PROBABILIDAD: SU PRESENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN BÁSICA

Se han examinado una colección de libros de texto chilenos pertenecientes a la Editorial Pearson Educación de Chile Ltda (Rodríguez y Carreño, 2013) y la Editorial Galileo (Rocamora, Riquelme, Ainardi, Aldunate, Falconi y Chala, 2013), que el Ministerio de Educación distribuye gratuitamente a más de tres millones de alumnos para la asignatura de matemáticas, formada por seis libros de texto (uno para cada nivel).

Para evaluar tales libros de texto se han seguido algunos pasos de la metodología de Cobo (2003): a) selección de capítulos que abordan la probabilidad; b) lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado con base en los objetos matemáticos identificados en las orientaciones curriculares. Siguiendo estos pasos, revisamos el desarrollo de contenidos de probabilidad de cada texto, obteniendo una aproximación de los contenidos de probabilidad que desarrollan. Se observa que en algunos libros los contenidos se presentan de forma explícita en unidades y lecciones completas (2º, 4º y 5º). En cambio en otros se presenta de manera implícita, como en el texto de 3º, que desarrolla la probabilidad a través de problemas vinculados a otras unidades. Cabe señalar que los libros de texto de 1º y 6º no presentan contenidos de probabilidad, en disonancia con el currículo. En las figuras siguientes se muestran algunos ejemplos de actividades:

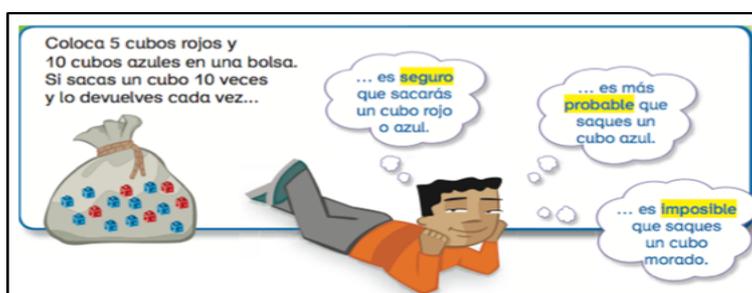


Figura 5. Definición asociada al concepto de sucesos seguro, probable e imposible (Matemática 2º Básico. Rodríguez y Carreño 2013, p. 238)

Más ejemplos Halla la probabilidad de cada suceso cuando todas las bolitas son del mismo tamaño. Después, escribe la probabilidad.

A Halla la probabilidad de sacar una bolita que no sea azul.

La probabilidad de que no sea azul $= \frac{5}{8}$ ← $\frac{\text{resultados favorables (4 rojas, 1 verde)}}{\text{total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 1 verde)}}$

La probabilidad de sacar una bolita que no sea azul es posible.



Figura 9. Representación numérica de probabilidad (Matemática 5° Básico. Rocamora, et. al, 2013, p. 377).

A partir del análisis realizado en relación a distintos objetos matemáticos (situaciones problemáticas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) presentes en los libros de texto de Educación Básica se infiere que la probabilidad es abordada, principalmente, desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y laplaciano, e incluyéndose también en algunos casos puntuales un leve acercamiento a la interpretación subjetiva de la probabilidad.

4. CONCLUSIONES

La enseñanza de la probabilidad a partir de libros de texto se realiza desde una perspectiva sobre todo intuitiva en la que se otorga gran importancia al uso de lenguaje cotidiano e informal. Este enfoque favorece el desarrollo del pensamiento probabilístico a partir de un contexto familiar y cercano, sobre todo en los primeros cursos de básica, pero progresivamente se debería avanzar hacia un lenguaje probabilístico que permita alcanzar un aprendizaje en profundidad (Chapman, 1995). Bajo esta perspectiva, es necesario que los libros presenten situaciones problemáticas adecuadas que permitan adquirir los conceptos y propiedades claves asociadas a un estudio integral de la probabilidad desde su diversidad de significados, aspecto que se da de forma desigual en las dos colecciones analizadas. Adquiere, pues, gran importancia el enfoque dado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, que debería evolucionar desde las ideas intuitivas e informales (intuiciones primarias) que tienen los alumnos sobre probabilidad y azar hasta adquirir la rigurosidad matemática asociada a la cuantificación y el cálculo de probabilidades (intuiciones secundarias). Las intuiciones primarias sobre el azar están presentes en los niños antes de los 7 años, y es después de esta edad cuando los niños alcanzan, poco a poco, una estructura conceptual distinta y organizada que desempeña un rol fundamental para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico. Asimismo, es importante considerar las múltiples aplicaciones de la probabilidad tanto en la vida cotidiana como en otras disciplinas en que es necesario tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

De lo anterior, es posible deducir ciertos aspectos a contemplar para una enseñanza idónea de la probabilidad en Educación Básica, que debería contemplar las particularidades de los distintos niveles escolares:

- Nociones previas sobre azar y/o aleatoriedad y probabilidad.
- Diversidad de significados de la probabilidad asociados a distintas aplicaciones en la vida diaria.
- Vinculación del cálculo de probabilidad de ocurrencia de un suceso con la realización o simulación de experimentos.
- Cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso o evento.
- Distinción entre probabilidad teórica y empírica.

En síntesis, pues, aún sin haber analizado otras colecciones de libros de texto, puede concluirse que, en términos generales, el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en

absoluta concordancia con las directrices curriculares. Se hace necesario, pues, un replanteamiento riguroso en los textos escolares respecto a los contenidos matemáticos en general, y los de probabilidad en particular, para que los alumnos aprendan lo que deberían aprender, sobre todo considerando que el libro de texto sigue siendo el recurso mayoritario para enseñar matemáticas en Educación Básica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, 7(3), 243–262.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada.
- Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814).
- Mineduc (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning?. *Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.
- Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). *Matemática 5° básico*. Galileo.
- Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). *Matemática 6° básico*. Galileo.
- Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 1° básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.
- Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 2° básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.
- Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 3° básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.
- Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 4° básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números*; Volumen 85, p.5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, v. 19, n. 2, p. 441-462.