

# TRAYECTORIAS CONSTITUIDAS Y EMERGENTES EN PRÁCTICAS DE MODELACIÓN DESDE UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

## Constituted and emerging and trajectories in modelling practices from a socio-epistemic approach

Sepúlveda, C<sup>a</sup>, Arrieta, J<sup>b</sup>, Díaz, L.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Universidad de las Américas, Chile; <sup>b</sup>U. Autónoma de Guerrero, México; <sup>c</sup>U. de Valparaíso, Chile  
[csepulvedah@udla.cl](mailto:csepulvedah@udla.cl), [jaimed.arrieta@gmail.com](mailto:jaimed.arrieta@gmail.com), [leonora.diaz@uv.cl](mailto:leonora.diaz@uv.cl)

### Resumen

*Se reportan diversas trayectorias de actividades que conducen a la articulación de entidades lineales numéricas, gráficas y algebraicas, que están presentes en el discurso matemático escolar. En esta línea, una trayectoria presente en cursos de Geometría Analítica parte de una ecuación lineal, sigue con una tabla de datos numéricos y termina punteando una recta en el plano cartesiano. Trayectorias emergentes que articulan entidades lineales son construidas en el ejercicio de prácticas de modelación. Estas trayectorias emergentes se analizan y contrastan con las constituidas.*

**Palabras clave:** *Trayectorias, algoritmos, modelación, lineal, Socioepistemología.*

### Abstract:

*The present work analyses a range of trajectories, paths and activities that lead to the articulation of numeric, graphic and algebraic linear entities present within the mathematical pedagogical<sup>17</sup> discourse. In this line, the trajectory that originates from a linear equation, passing by a chart of figures, and ends tracing a straight line within the Cartesian plane, is a current strategy in analytic geometry courses. Emerging trajectories that articulate linear entities are a result of modelling practice exercises. The latter are analyzed and contrasted with the former.*

**Key words:** *trajectories, algorithms, modelling, linear, socio-epistemology.*

### LA PROBLEMÁTICA

En este trabajo, instalados en la problemática que emerge de preguntarse cómo las prácticas de modelación se incorporan al aula de matemáticas y cobran cotidianidad, analizamos actividades que se desarrollan cotidianamente en el aula de matemáticas y actividades que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar. Algunas de estas actividades propuestas al paso del tiempo viven en el aula con modificaciones y otras no logran sobrevivir. Nos preguntamos sobre ¿cuáles son los procesos donde actividades que se incorporan al aula cobran cotidianidad?

Desde esta problemática incorporamos constructos que nos permitan analizar dichas actividades. Un constructo que ha resultado muy funcional es el de trayectorias de actividades. Dada una

---

actividad se desmenuza en sus actividades que la componen y se plantean las posibles rutas de ellas por medio de trayectorias de algoritmos de predicción.

De estas trayectorias de actividades distinguimos las constituidas de las emergentes. Las constituidas son aquellas que han cobrado cotidianidad y que con pocas variantes se encuentran en diferentes sistemas educativos. Las emergentes son las que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar, y que pueden constituirse a lo largo del tiempo y de la iteración de la trayectoria.

Por ejemplo, en los cursos de Geometría Analítica una trayectoria constituida que está presente, es la que parte de dar dos puntos al estudiante y a partir de estos datos, se grafica una recta y posteriormente se obtiene su ecuación o se obtiene la ecuación de la recta. Otro ejemplo de una trayectoria constituida es la de la figura 1, parte de la ecuación, los estudiantes construyen una tabla numérica dándole valores a  $x$ , se grafica la recta y posteriormente, en ocasiones, se ven diversas aplicaciones.

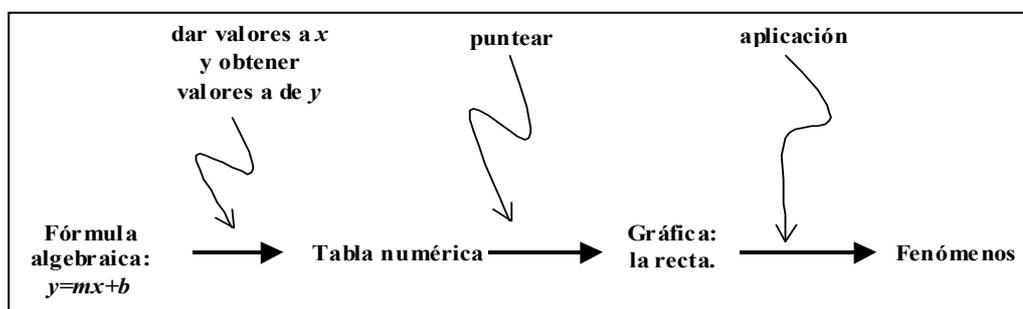


Figura 1. Trayectoria constituida. (Arrieta, 2003)

### Socioepistemología

El marco teórico que soporta el presente trabajo es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Según señala Cantoral (2013), esta aproximación responde a la construcción de nuestros sistemas conceptuales desde tres planos. El primero trata sobre la naturaleza misma del saber. Hablar del saber no se limita, en esta perspectiva, a definir la relación que este guarda con los objetos matemáticos, sino a posicionar al ser humano, en sus distintas dimensiones, en el acto mismo de construcción de sus sistemas conceptuales, su problematización. El segundo plano se ocupa de la práctica social como normativa de la actividad humana y como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales. Sus mecanismos funcionales. El tercer plano, el plano teórico, se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas, con una fuerte evidencia empírica, de nociones, procesos y términos del modelo de construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013).

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

La Socioepistemología es una aproximación sistémica que articula cuatro dimensiones principales para explicar la construcción y reconstrucción del conocimiento, a saber, lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo sociocultural (Figura 2).

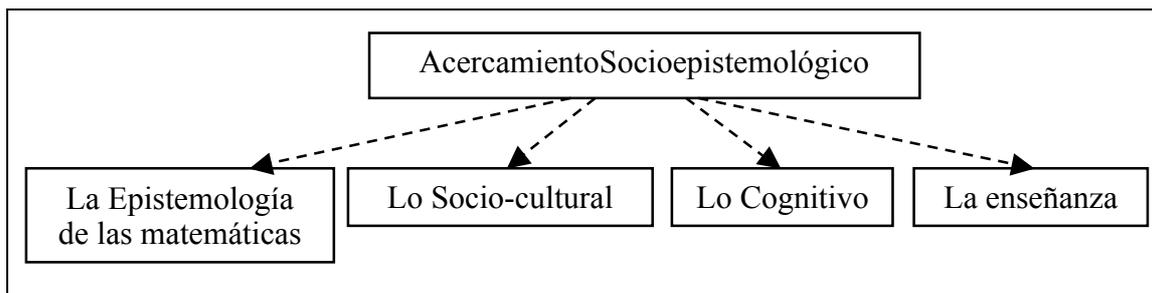


Figura 2. Acercamiento Socioepistemológico

Del mismo modo, Cantoral (2013), reafirma lo anterior diciendo que los estudios que involucran la Socioepistemología reportan características del ejercicio de prácticas que anteceden y acompañan la producción o construcción de conocimiento: nociones y conceptos, procedimientos y propiedades, que a su vez evolucionan hacia formas del saber socialmente establecidos.

Pudiendo así afirmar que la aproximación teórica Socioepistemológica involucra tanto a los estudiantes como a los profesores. Ambos actores construyen significados, construyen sus identidades, construyen sus realidades y su propia cognición.

### Modelación

Desde nuestra perspectiva la modelación es una práctica recurrente que vive en diversas comunidades. Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamado lo modelado, a partir de la otra, llamado el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015).

Una entidad se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en la otra entidad, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela.

La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, *mo*, que resulta adherido a lo modelado, *ma*. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (*ma, mo*) y que nominamos **dipolo modélico** (DM).

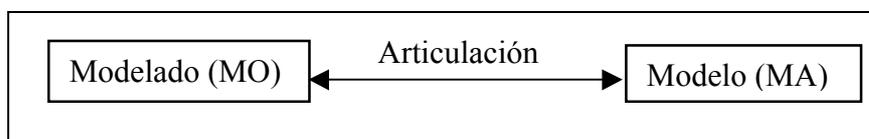


Figura 3. Acto de Modelar

Nos distinguimos de perspectivas de la modelación que entienden a esta como un acto de representar o bien a la realidad o bien a los objetos matemáticos.

*Podemos dizer que, de modo geral, o termo 'modelagem matemática' refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenômeno que pode ser matemático ou não (De Almeida e Ferruzzi, 2009)*

Para nosotros, la naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir, es decir la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de

modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

### Lo lineal

Hacemos una distinción entre el objeto matemático función lineal y la red de modelos lineales articulada con el fenómeno modelado que llamamos *lo lineal*. En este sentido, desde nuestra perspectiva, los modelos no solo lo son las expresiones analíticas, sino que lo son también las tablas de datos numéricos y las distintas gráficas.

Según señala Méndez (2008)

*“Modelar linealmente un fenómeno, significa ejercer la práctica de modelación creando modelos lineales, como herramientas para predecir el comportamiento de éste. Algunos modelos lineales son los de carácter gráfico, numérico y algebraico.”*

Lo lineal corresponde a una red de prácticas y herramientas que se ejercen y construyen durante la práctica de modelación, esta red se muestra en la figura 4.

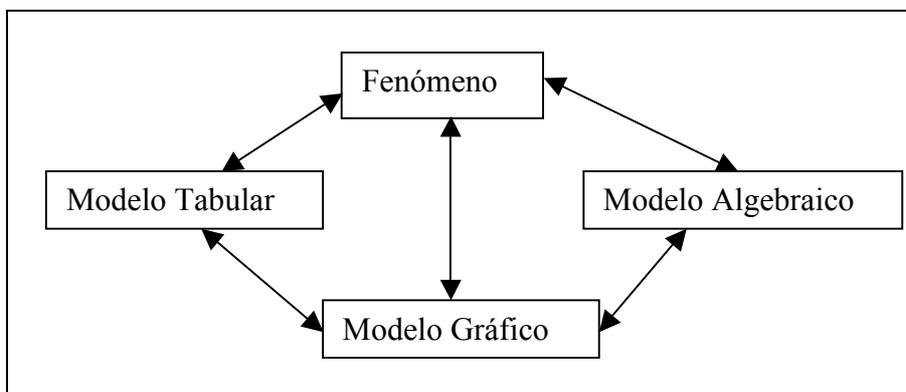


Figura 4. Lo lineal

### Trayectorias emergentes

Hoy día la modelación ha cobrado relevancia en la matemática educativa, enseñanza de la matemática o didáctica de la matemática. Diversas aproximaciones y propuestas se han elaborado. Las trayectorias de actividades también son una herramienta que nos permite distinguir entre diferentes aproximaciones a la modelación en el sistema escolar a partir de las actividades propuestas a desarrollar en el aula.

Por ejemplo, analizamos la actividad que se presenta a continuación, extraído del libro de primero medio SM, entregado por el Ministerio de Educación el año 2014. (Libro SM, Ministerio de educación de Chile, 2014:134).

*“Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados.”*(Figura1)

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1,0
9	1,5
12	2,0
15	2,5
18	3,0

¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?

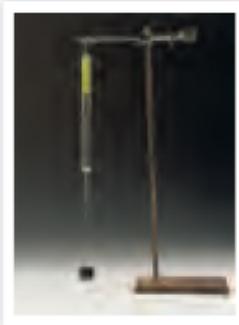


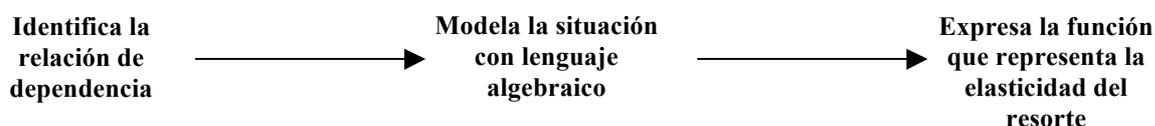
Figura1. Ejemplo Libro primero medio SM

En este ejemplo no sólo llama la atención los datos que se presentan en la tabla, sino también la forma que al estudiante se le presenta el problema y el modo de modelar la elasticidad de los resortes, ya que luego del enunciado se reduce el ejercicio a desarrollar dos pasos los cuáles se le presentan del siguiente modo:

“Paso 1: Identifica la relación de dependencia”

“Paso 2: Modela la situación con lenguaje algebraico y exprésala como función”.

Se añade que primero deben calcular la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza, para luego obtener que la longitud del estiramiento se obtenga multiplicando la fuerza por la constante determinada en el segundo paso y de ese modo se representa la función asociada a tal fenómeno.



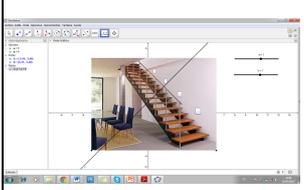
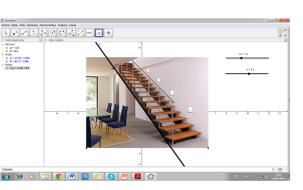
Esta forma de “modelar”, en la cual el estudiante sigue una trayectoria algorítmica de tres pasos que va de los datos numéricos al lenguaje algebraico y a la función se distingue de otras.

Otro ejemplo, del análisis de una actividad propuesta es la siguiente:

- ✓ Tome una fotografía de una escalera
- ✓ Pegue esta fotografía en una hoja de Geogebra
- ✓ Mueva los parámetros  $a$  y  $b$  de la ecuación  $y = ax + b$  hasta que la recta se encime a la escalera

¿Cómo podrías saber la altura de la escalera?

Esta actividad está guiada por una trayectoria de actividades que emerge al implementar la modelación en el aula.

Emergencia del Modelo algebraico

Figura 6. Trayectoria de actividad emergente

## Trayectorias de algoritmos de predicción en el modelado del llenado de un recipiente cilíndrico

Analizamos con detalle un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal del llenado de un recipiente cilíndrico (Méndez, 2008). Este trabajo lo delimitamos al análisis de las fases I y II del diseño, la Experimentación, y la Predicción. Delimitamos nuestro trabajo a estudiar las trayectorias de los algoritmos de predicción que los estudiantes construyen.

Hacemos hincapié en que no es lo mismo seguir algoritmos que construirlos, ya que para construirlos se tiene que entender cómo se realizan las tareas a profundidad para desmenuzarlas en acciones y volver a integrarlas, estructurándolas.

En el diseño de aprendizaje que analizamos distinguimos una trayectoria de actividades que lo soporta, particularmente en la fase de predicción, que si bien no es explícita, nosotros la reconstruimos (figura 7). Sin embargo, cuando se pone en escena el diseño esta trayectoria no es seguida por todos los actores. Existen diferentes rutas, que si bien llevan de un modelo numérico a un algebraico, esta no es única. Los estudiantes exponen sus diversas formas de predecir y en el debate surgen diversas formas de predicción y algunas prevalecen sobre otras.

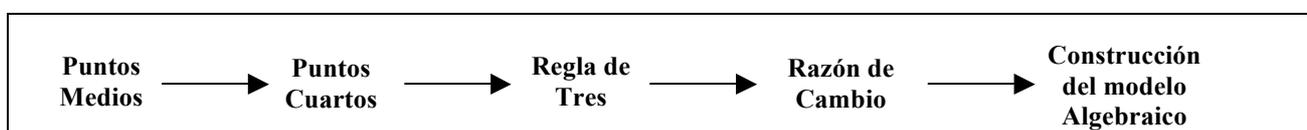


Figura 7. Trayectoria de algoritmos de predicción del diseño “Llenado de un recipiente cilíndrico”

El diseño se puso en escena con estudiantes de segundo año medio, de un Colegio Particular pagado de la ciudad de Santiago de Chile. La dinámica de la puesta en escena es trabajo en equipo, conformando 8 equipos de tres estudiantes cada uno de ellos, donde posteriormente se realizó una discusión grupal donde cada uno de los grupos presenta las formas de predecir a sus demás compañeros. El trabajo se realizó en un aula de matemáticas durante cuatro sesiones de 45 minutos cada una de ellas, donde el docente del curso de matemática, es participante de ésta investigación. Las producciones de los estudiantes que se recogieron son de tres tipos, documentos físicos, grabaciones de audio y de video. A partir del análisis de las producciones de los estudiantes se construyeron las diferentes trayectorias de algoritmos de predicción que los estudiantes construyen. Estas trayectorias de algoritmos no necesariamente son iguales a la planteada por el diseño.

A continuación se presentan las trayectorias construidas por los equipos:

Tabla 1. Trayectoria de algoritmos de predicción de los equipos 1, 2, 3 y 4

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
✓ Promedio	✓ Puntos Medios	✓ Puntos Medios	✓ Puntos Medios
✓ Promedio del Promedio	✓ Puntos Cuartos	✓ Puntos Cuartos	✓ Puntos Cuartos
✓ Puntos Décimos	✓ Puntos Quintos	✓ Regla de tres	✓ Razón de Cambio
✓ Razón de Cambio	✓ Razón de Cambio	✓ Regla de tres	✓ Razón de Cambio
✓ Construcción del modelo algebraico			
	✓ Uso del modelo	✓ Regla de tres	✓ Uso del modelo

<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Uso del modelo algebraico</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico (sin considerar posición inicial)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>algebraico</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ _____</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>algebraico</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico</li> </ul>
--	---	---	---

Tabla 2. Trayectorias de algoritmos de predicción de los equipos 5, 6, 7 y 8

<b>Equipo 5</b>	<b>Equipo 6</b>	<b>Equipo 7</b>	<b>Equipo 8</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Puntos Medios /Regla de tres</li> <li>✓ Puntos Cuartos /Regla de tres</li> <li>✓ Regla de tres</li> <li>✓ Regla de tres</li> <li>✓ _____</li> <li>✓ Regla de tres</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Puntos Medios</li> <li>✓ Puntos Cuartos</li> <li>✓ Puntos Décimos</li> <li>✓ Razón de Cambio</li> <li>✓ Acercamiento a la construcción del modelo algebraico</li> <li>✓ Uso del modelo algebraico</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Puntos Medios</li> <li>✓ Puntos Cuartos</li> <li>✓ ----</li> <li>✓ ----</li> <li>✓ ----</li> <li>✓ _____</li> <li>✓ _____</li> <li>✓ _____</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Puntos Medios</li> <li>✓ Puntos Cuartos</li> <li>✓ Puntos Décimos</li> <li>✓ Razón de Cambio</li> <li>✓ No logran la construcción del modelo algebraico</li> <li>✓ Razón de cambio (sin considerar posición inicial)</li> <li>✓ Construcción del modelo gráfico</li> </ul>

En la tabla 1 y 2 se ilustran las trayectorias de actividades que articula un modelo numérico (tabla de datos numéricos) con el modelo algebraico a partir de diferentes algoritmos de predicción tal como ya se ha reportado en Sepúlveda, Arrieta y Díaz (2014), donde la trayectoria de algoritmos que emerge de la implementación de una práctica de modelación lineal en el aula corresponde a puntos medios, puntos cuartos, puntos décimos, razón de cambio, construcción y utilización del modelo algebraico y algunas variantes de lo anterior, siendo ésta trayectoria también utilizada por los equipos 6 y 8 en ésta investigación. El equipo uno construye otra trayectoria: promedio, promedio del promedio, puntos décimos, razón de cambio y construcción del modelo algebraico. Las trayectorias de los equipos 2 y 4 se acercan a la trayectoria de algoritmos implícita en el diseño. Las trayectorias de los equipos tres y siete no concluyen con la construcción del modelo algebraico. Las trayectorias de los seis equipos restantes siconfluyen en el modelo gráfico pasando por el modelo algebraico.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra como el constructo de trayectoria de actividades es funcional para el análisis de las actividades de un diseño de aprendizaje basado en modelación lineal. En este sentido, al implementar la modelación lineal en el aula, se despliega el abanico de trayectorias que los estudiantes siguen al participar en la puesta en escena del diseño.

Una diferencia importante entre las trayectorias constituidas presentadas y las que emergen de la puesta en escena del diseño es su diversidad, sin llegar a impedir la construcción de consensos al

compartir y debatir acerca del actuar de los diferentes equipos. Si bien los equipos 3 y 7 no construyen los modelos algebraico y gráfico, en el debate ellos se apropian de los modelos contruidos por los demás equipos.

En la discusión grupal donde se presentan las diferentes formas de predecir, que los estudiantes construyen, logra prevalecer una forma de predecir sobre las otras. Por ejemplo, el equipo 2, 6 y 8 presentan su forma de predecir de puntos medios, cuartos y décimos, sin embargo en el debate estos cambian a la forma de predecir que presentan los equipos 1 y 4 de razón de cambio, por su simplicidad y rapidez para hacerlo. Este proceso de cómo unas formas se retiran y otras prevalecen nos da indicios de cuáles son los mecanismos de la constitución de trayectorias de actividades emergentes, aun cuando, reconocemos, estamos lejos de ser concluyentes al respecto.

## Referencias

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula (Doctoral dissertation, Tesis doctoral no publicada) México: Cinvestav.*
- Arrieta, J., Díaz, L. (2015). *Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(1), 19-48. doi:10.12802/relime.13.1811*
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa*
- De Almeida, L. y Ferruzzi, E. (2009). *Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2 (2), pp.117-134.*
- Ministerio de Educación de Chile (2014) *Matemática primero medio SM, Chile.*
- Méndez (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar linealmente situaciones análogas. Tesis de Maestría en Ciencias no publicada. Guerrero, México: Universidad Autónoma de Guerrero.*
- Sepúlveda, C., Díaz, L., y Arrieta, J. (2014). *Concurrencia de predicción y algoritmia en la modelación. Alme 27, Buenos Aires, Argentina: 1483-1490*