

# UN ESTUDIO DE LAS INECUACIONES LINEALES DESDE EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

## A study of linear inequalities from spacemathematicalwork

Arévalo, B<sup>a</sup>. y Rojas, T<sup>b</sup>.

U. de Valparaíso, Chile

[belen.arevalo9@gmail.com](mailto:belen.arevalo9@gmail.com), [tamara.rojas9@gmail.com](mailto:tamara.rojas9@gmail.com)

### Resumen

*Basándonos en la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), iniciada por Houdement y Kuzniak (1999, 2006) y más tarde ampliada por Kuzniak (2011), exponemos un estudio de las inecuaciones lineales, el cual tiene por objetivo principal analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza aprendizaje que potencie el espacio de trabajo personal de los estudiantes.*

**Palabras claves:** (Espacio de trabajo matemático, Inecuaciones lineales, Desigualdades)

### Abstract

*Based on the theory of Mathematical Working Space (MWS), first postulated by Houdement and Kuzniak (1999, 2006) and later extended by Kuzniak (2011), a study of linear inequations is here in exposed. Its main objective is to analyze the personal mathematical working space of the students through situations that involve the concept of “linear inequation” in order to elaborate a teaching/learning proposal that would upgrade the students’ personal work space.*

**Keywords:**(mathematicalworkspace , linear inequalities , inequalities )

### INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo Chileno, el tema de inecuaciones lineales es tratado en cuarto año de enseñanza media, donde los alumnos aprenden a resolver inecuaciones a través de algoritmos establecidos, por lo que el desarrollo de este conocimiento es principalmente de carácter procedimental.

En este sentido la problemática que abordamos en esta investigación gira en torno al concepto de la inecuación lineal a nivel escolar donde observamos se privilegia un tratamiento algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por  $-1$ , lo cual genera que las inecuaciones carezcan de sentido.

Las preguntas que guían nuestro estudio son las siguientes:

- ¿Qué concepciones tienen los estudiantes de enseñanza media y universitaria sobre el concepto de inecuación lineal?
- ¿Cuáles son los tipos de tareas que se presenta a los estudiantes tanto en evaluaciones nacionales (PSU) como en los documentos oficiales: Programa de estudio y textos escolares que involucran el concepto de inecuación lineal?

- ¿Cómo es el trabajo matemático de los estudiantes de enseñanza media y estudiantes universitarios respecto a las inecuaciones lineales?

El sustento didáctico con el que abordamos la problemática descrita es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), teoría que considera el trabajo matemático como el resultado de un proceso progresivo de génesis que permite la articulación interna de los planos cognitivos y epistemológicos.

Para el desarrollo de nuestro estudio adoptamos elementos de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como metodología de investigación en el siguiente sentido:

- En el análisis preliminar, se realiza un estudio del concepto inecuación lineal, considerando el marco curricular vigente, programas de estudio, actividades sugeridas en los textos escolares. Además de investigaciones que dan cuenta de obstáculos y dificultades en el aprendizaje y enseñanza de este concepto y aspectos epistemológicos asociados.
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, esta fase consta de dos etapas aplicación de cuestionario exploratorio y elaboración de una propuesta de enseñanza aprendizaje a partir de los resultados del instrumento exploratorio
- Experimentación y análisis a posteriori, en esta fase se implementa la propuesta y se realiza un análisis de las producciones de los estudiantes a la luz de nuestro marco didáctico ETM.

### Espacio de trabajo matemático

Como elemento teórico tomamos la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), iniciada Houdement y Kuzniak (1999, 2006) llamada Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico y más tarde ampliada a otros dominios de la matemática por Kuzniak (2011), donde se distinguen dos planos, el cognitivo y el epistemológico, la articulación de estos dos planos es mediante un conjunto de Génesis: Génesis Semiótica, Génesis Instrumental y Génesis Discursiva.

El plano epistemológico del ETM, contempla tres componentes: representamen, artefactos y referencial teórico. El plano cognitivo contempla las componentes: visualización, construcción y prueba. Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático en cuestión.

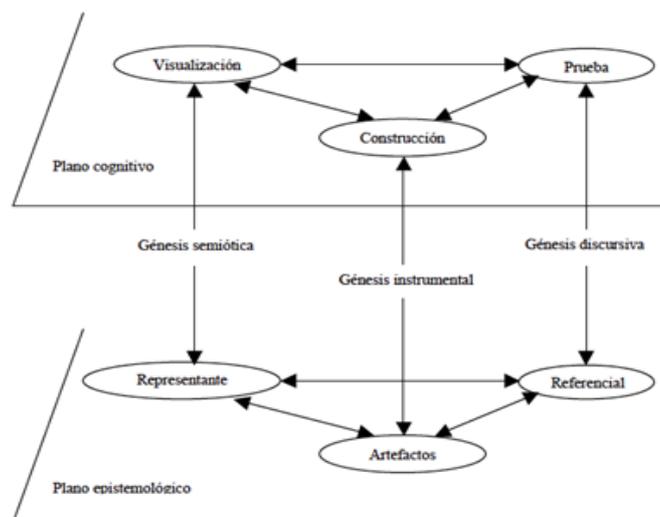


Figura 1. Esquema del ETM (Kuzniak, 2011)

A partir de la definición de las componentes, junto a las génesis que las articulan, se definen tres tipos de Espacio de Trabajo Matemático:

- *ETM- de referencia*: Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico. Se puede considerar como el ETM institucional de la comunidad de los matemáticos.
- *ETM- idóneo*: Se refiere al espacio definido en términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo. Un utilizador natural de este ETM es el profesor.
- *ETM- personal*: Se refiere al espacio definido por el fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el geómetra, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. Un utilizador natural de este ETM es el alumno.

En este estudio analizaremos las tareas y producciones de los estudiantes, desde el es *ETMpersonal*, pues enfrentaremos al propio individuo a tareas que involucran el concepto inecuación lineal y estudiaremos su propia circulación por las componentes del *ETM*.

### **Ingeniería didáctica como metodología de investigación**

Nuestro estudio se apoya en fases de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), método de investigación de corte cualitativo que se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, y además se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada entre la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso experimental de la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

En este estudio se desarrollan algunas de sus fases considerando nuestro objetivo principal, analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza aprendizaje que potencie el espacio de trabajo personal de los estudiantes.

### **Fases de la investigación**

- Análisis preliminar

En el programa de estudio y en los textos escolares se da cuenta que el trabajo propuesto para las inecuaciones es más bien de tipo algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones. Además, podemos observar que el desarrollo propuesto para el tema de las inecuaciones no favorece el estudio de las gráficas cartesianas, al respecto solo hemos encontrado el uso del dibujo de los intervalos para encontrar el conjunto solución de una inecuación.

El tema de las inecuaciones ha sido tratado en diversas investigaciones relacionadas con su enseñanza. Borello (2010), trata el problema de la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones, señalando que las inecuaciones se tratan como un tema desvinculado de las desigualdades, lo cual genera que carezcan de significado y que al momento de operarlas se trabaje inapropiadamente como una ecuación.

Por su parte Alvarenga (2006) realiza una propuesta para la enseñanza de las inecuaciones, señalando que “la enseñanza-aprendizaje del concepto inecuación en los últimos años de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y de la licenciatura debe abarcar actividades que involucren resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas o computadora.” (p.151).

- Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas

Con el objetivo de caracterizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes en torno al concepto de inecuación lineal, se elabora un cuestionario exploratorio considerando tipos de tareas propuestas en textos escolares, programas de estudio y de prueba de selección universitaria (PSU).

Para la implementación de este cuestionario se invita a dos estudiantes de primer año de la carrera de Matemática y ocho estudiantes de primer año de la carrera de Informática de una Universidad estatal de la región de Valparaíso.

Por otro lado se considera a estudiantes de tercer año de enseñanza media, invitando a dos estudiantes de un liceo municipal y seis estudiantes de un establecimiento particular subvencionado.

En cuanto a la metodología de trabajo fue mediante binomios, ya que esto nos permitió ver la interacción entre los estudiantes al enfrentarse a este tipo de problemas.

De los resultados obtenidos pudimos evidenciar que para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica, además de presentar falencias para modelar situaciones a través de inecuación lineal.

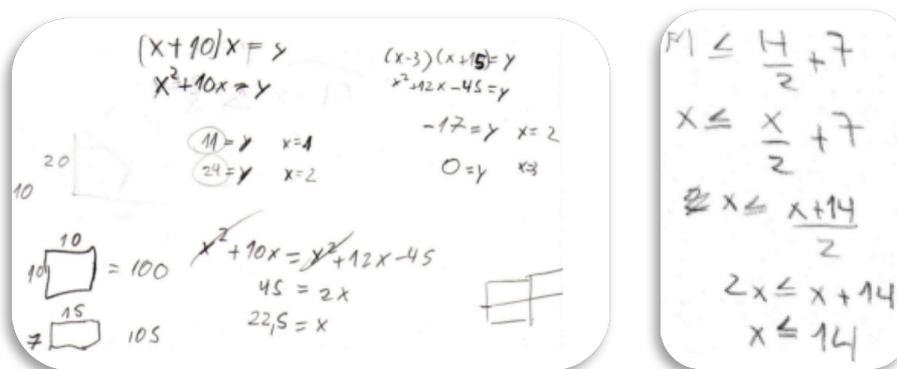


Figura 2. Producciones Binomios

Para el caso particular de la pregunta cuatro del cuestionario aplicado solo a estudiantes universitarios, se observa que estos presentan dificultades a la hora de trabajar desigualdades a partir de su representación gráfica, pues solo un binomio logró acercarse a lo esperado.

En términos teóricos, desde el ETM, se evidencia que existe una desarticulación entre las tres génesis, potenciándose tanto la génesis instrumental como la génesis semiótica, quedando debilitada la génesis discursiva.

Además con el fin de conocer las concepciones que tienen los estudiantes respecto a los conceptos de desigualdad e inecuación lineal, se pide a los estudiantes responder dos preguntas en forma individual: la primera de ellas ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación? y la segunda ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

De lo anterior pudimos dar cuenta respecto al concepto de desigualdad que todos los estudiantes tienen la noción de que se trata de “cosas distintas”, además de dar cuenta de que los estudiantes no tienen una noción clara del concepto de inecuación y que para desarrollar una inecuación lineal describen solo procesos algebraicos y gran parte de los estudiantes indican explícitamente que se desarrolla “casi igual” que una ecuación.

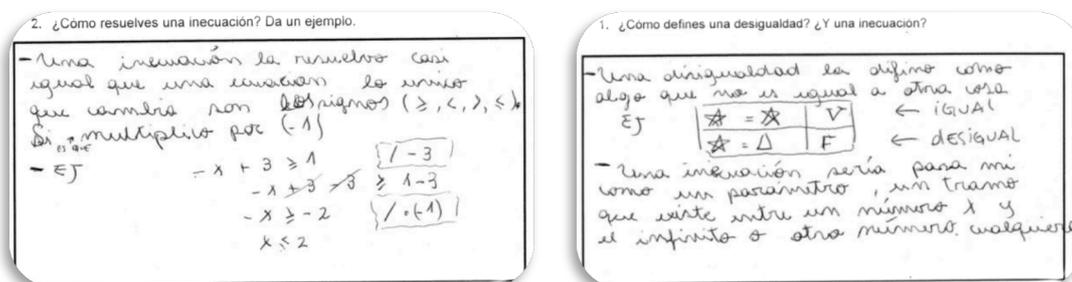


Figura 3. Producciones Binomio Universitario

- Elaboración de la Propuesta

A partir de los resultados del cuestionario se elaboró una propuesta de enseñanza-aprendizaje cuya finalidad es trabajar en el análisis de inecuaciones lineales bajo un enfoque gráfico cartesiano, con el fin de dar sentido a las inecuaciones lineales, además de justificar el método algebraico utilizado por los estudiantes. Desde el punto de vista del ETM, al incorporar el enfoque gráfico al trabajo algebraico, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las tres *génesis*.

Esta propuesta de enseñanza-aprendizaje consta de dos momentos, en un primer momento los estudiantes deben analizar por medio del software GeoGebra el comportamiento gráfico de las funciones, para posteriormente hallar el conjunto solución de una inecuación lineal a partir de la gráfica.

Para el segundo momento se espera que el estudiante encuentre el conjunto solución de una inecuación lineal sin contar con su expresión algebraica, para ello en primera instancia se hace entrega de dos gráficas en mica por separado, con el fin de que las superpongan. Posteriormente se hace entrega de dos gráficas por separado sin la posibilidad de superponerlas.

- Experimentación y análisis a posteriori

La implementación de la propuesta se desarrolló en dos días distintos para cada momento respectivamente, en donde los estudiantes se tomaron el tiempo que estimaron conveniente. Esta fue aplicada a cuatro estudiantes de tercer año de enseñanza media de un liceo municipal, la metodología de trabajo fue en binomios.

Para el momento uno se pudo evidenciar que el Binomio 1 desconocía que para graficar rectas en el software GeoGebra bastaba con escribir dicha recta en la “entrada”, por lo que ellos optaron por realizar una tabla de valores para hallar puntos y de esta manera graficar las rectas en GeoGebra. En un principio utilizaron tabla de valores y la gráfica respectivamente para dar respuesta a lo pedido, pero después solo se apoyaron en la gráfica, salvo para el último ítem en donde realizaron un trabajo algebraico para encontrar lo solicitado, utilizando la gráfica solo como un método de comprobación.

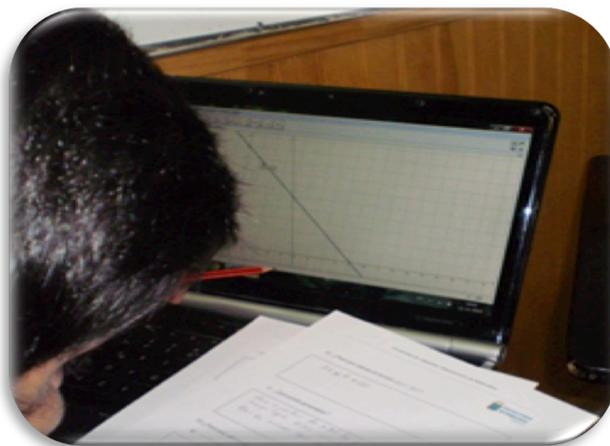


Figura 4. Producciones Binomio 1

El Binomio 2 no presentó ninguna dificultad para graficar en el software GeoGebra, apoyándose sólo en la gráfica para dar respuesta a lo solicitado salvo cuando tenían que tratar con números que no eran enteros, recurrían hacer trabajo algebraico.

Mientras que para el momento dos los binomios de estudiantes una vez entregada las gráficas en mica inmediatamente las superpusieron, encontrando así el conjunto solución, de igual manera para las dos preguntas restantes en las cuales no tenían la posibilidad de superponer las gráficas, no presentaron dificultades para hallar el conjunto solución.



Figura 5. Producciones Binomio 2

## CONCLUSIONES

El presente estudio sustentado de un marco teórico, ETM, que apunta a potenciar distintos trabajos matemáticos que se dan a partir de una tarea, nos permitió abordar a nuestra problemática

La entrevista semiestructurada, nos permitió identificar que tanto estudiantes de enseñanza media como universitarios dominan parcialmente el concepto de desigualdad, ya que lo asocian con la noción de “cosas distintas” pero no logran precisar con exactitud dicho concepto.

Por otro lado se evidenció que los estudiantes no tienen una concepción clara del concepto de inecuación lineal, ya que para dar una definición recurren a explicar el conjunto solución, haciendo énfasis en que no se obtiene un único valor sino un conjunto de valores, además relacionan

fuertemente la ecuación con la inecuación lineal, indicando que esta última se resuelve “casi igual” que una ecuación cuidando de respetar las propiedades de desigualdad.

El cuestionario aplicado a estudiantes universitarios y de enseñanza media, permitió caracterizar e identificar el trabajo matemático de estos se evidenció que para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica, además de presentar falencias para modelar situaciones a través de inecuación lineal. Para el caso particular de la pregunta cuatro del cuestionario aplicado solo a estudiantes universitarios en donde debían trabajar con gráfica de funciones, se observa que estos presentan dificultades a la hora de trabajar desigualdades a partir de su representación gráfica, pues solo un binomio logró acercarse a lo esperado.

Tomando en cuenta los resultados arrojados se evidenció que el estudio de inecuaciones lineales muchas veces es reducido a un algoritmo repetitivo, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, lo cual ocasiona que los estudiantes a pesar de ser capaces de encontrar el conjunto solución no consigan justificar el algoritmo utilizado y que las inecuaciones lineales carezcan de significado. Es por ello elaboramos una propuesta de enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque gráfico (cartesiano) con el fin de dar significado a las inecuaciones lineales, además de justificar el método algebraico utilizado por los estudiantes. Desde el punto de vista del ETM, al incorporar el enfoque gráfico al trabajo algebraico, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las *tres génesis*.

Los resultados obtenidos de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aplicada a estudiantes de enseñanza media fueron satisfactorios, ya que los estudiantes rápidamente comprendieron cómo obtener el conjunto solución a partir de la representación gráfica de funciones contando con las expresiones algebraicas y en otras solo el trazado de las rectas entregados en gráficos distintos, durante su desarrollo no se presentaron grandes dificultades, más bien el trabajo se dio de forma natural. Permitiendo a los estudiantes dar sentido al trabajo algebraico y a su vez dotar de significado a las inecuaciones lineales

## Referencias

Balacheff N. (1987). *Processus de preuve et situations de validations. Educational studies in mathematics*, 18 (2), 147-176.

Borello M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico. (Tesis para obtener el grado de Doctorado en matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional) Recuperado de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello\\_2010.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello_2010.pdf)*

Borrello M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte. (Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa). Recuperada de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/borello\\_2007.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/borello_2007.pdf)*

Breindenbach, D. et al. (1992). *Development of the process of function. Educational Studies in Mathematics*, vol.23,247-285.

- Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Duval, R. (1995). *Sémiosetpensée humaine. Éditions Peter Lang, coll. Berne: Exploration, Recherches en sciences de l'éducation.*
- Houdement C. & Kuzniak A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- Houdement C., Kuzniak A. (1999). *Géométrie et paradigmes géométriques. Petit x*, 51, 5-21.
- Kuzniak, A. (2011). *L'espace de Travail Mathématique et ses genres. Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.
- Ministerio de Educación, (2009). *Marco Curricular Enseñanza Media (Actualización 2009)*, Santiago, Chile.
- Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe. Paris: Seuil.*
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.*