

VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA¹

Validation of a genetic decomposition of the concept of mathematical induction

García-Martínez, I.^a, Parraguez-González, M.^b.

Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; correos electrónicos: igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Con base en la descomposición genética hipotética de inducción matemática presentada en el trabajo de García y Parraguez (2015), se analizan las producciones de doce estudiantes universitarios, para sustentar cuáles de las construcciones mentales que propone la descomposición genética hipotética, muestran los estudiantes. El análisis de los resultados de la aplicación de los instrumentos, indica que la descomposición genética reformulada es viable. A partir de dicha descomposición genética, se sugieren elementos para una secuencia de enseñanza de inducción matemática en la universidad.

Palabras clave: *inducción matemática, teoría APOE, descomposición genética, validación.*

Abstract

Based on the hypothetical genetic decomposition presented in the work of Garcia and Parraguez (2015), the productions of twelve undergraduate students are analyzed to support which of the constructions proposed by the hypothetical genetic decomposition, are shown by the students. The analysis of the results of applying instruments indicates that the hypothetical genetic decomposition is viable. From that genetic decomposition, elements for a teaching sequence of mathematical induction in college are suggested.

Keywords: *mathematical induction, APOS framework, genetic decomposition, validation.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el desarrollo de la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, que corresponde al análisis y verificación de los datos. Para este propósito, se considera la primera componente del ciclo, análisis teórico, como base fundamental (García y Parraguez, 2015). En la Figura 1 se muestra la descomposición genética hipotética expuesta en dicho trabajo. Para validar dicha descomposición genética, se aplica un cuestionario y una entrevista en profundidad, a estudiantes universitarios.

A continuación se presenta la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), que es el marco teórico que fundamenta este trabajo y se explicita el ciclo de investigación asociado a este marco teórico.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE, cuya sigla significa **A**cción, **P**roceso, **O**bjeto y **E**schema, fue creada por Ed Dubinsky (1996) y está basada en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Posteriormente se ha seguido desarrollando por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y otros investigadores (Arnon et al., 2014).

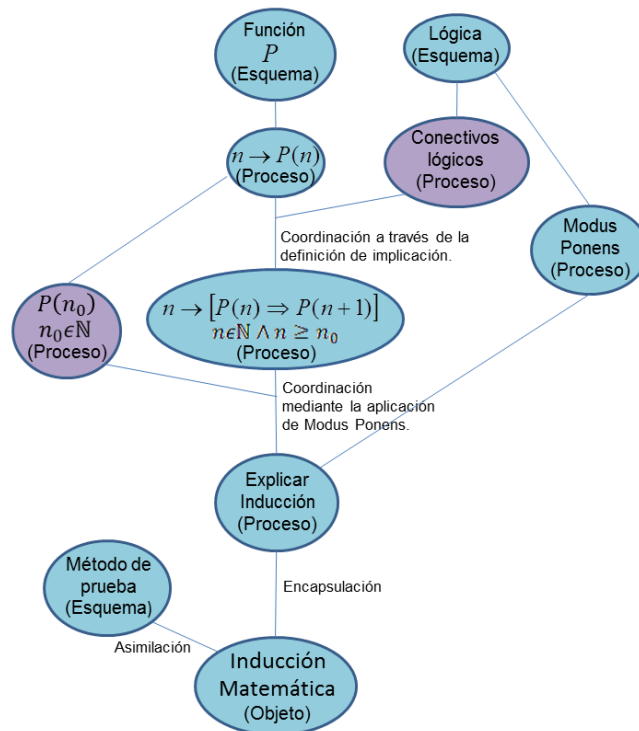


Figura 7. Descomposición genética hipotética del concepto de inducción matemática (García y Parraguez, 2015)

Según esta teoría todos los conceptos matemáticos pueden representarse en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas. Las acciones son transformaciones de los objetos que el estudiante percibe, en general, como externas. El estudiante precisa realizar todos los pasos para resolver determinado problema y debe ser guiado. Cuando una acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella, ésta se interioriza y se obtiene un proceso, aquí el estudiante ya no precisa más del estímulo externo, es capaz de resolver un problema sin necesidad de realizarlo paso a paso. También se puede obtener otro proceso al coordinar dos o más procesos. Cuando el estudiante es capaz de pensar el proceso como un todo y actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. También se puede realizar la operación contraria que es la desencapsulación que consiste en volver al proceso que generó cierto objeto, para coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en nuevos objetos. Un esquema es un conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático y las relaciones entre éstos. Un esquema es una estructura coherente e inacabada ya que un esquema puede asimilar un nuevo objeto que se reacomoda a las estructuras existentes. Por otro lado, un esquema puede ser visto como un objeto, en dicho caso se dice que el esquema se ha tematizado.

Las acciones, procesos, objetos y esquemas se denominan construcciones o estructuras mentales, éstas no se dan necesariamente, en forma lineal.

La forma como se pasa de un estado de construcción de conocimiento a otro se denomina mecanismo mental. La interiorización, la coordinación, la encapsulación, la desencapsulación y la tematización son mecanismos mentales. La Figura 2, precisa como se entrelazan las estructuras con los mecanismos mentales.

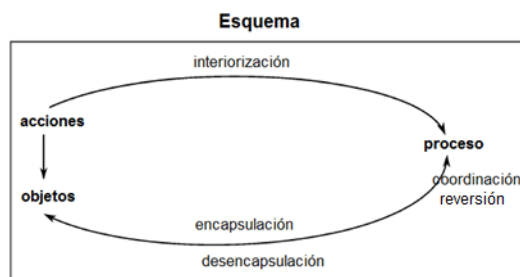


Figura 2: Construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE también proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética; diseño y aplicación de enseñanza; y análisis y verificación de los datos.

Análisis teórico o descomposición genética

El ciclo comienza analizando el concepto matemático con base en los libros de texto, en la epistemología, en la experiencia docente, en el propio conocimiento del investigador, en resultados previos, etc., para, a partir de ahí, diseñar una descomposición genética para dicho concepto.

En el libro APOS Theory (Arnon et al., 2014) se explica qué es una descomposición genética de la siguiente forma: “Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.” (p. 27)

El objetivo principal de la descomposición genética es proponer a priori un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático. Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo? Estas preguntas promueven la reflexión sobre el significado de comprender un concepto matemático determinado y las implicancias que tiene dicha reflexión en la forma en que un estudiante concibe dicho concepto.

Esta descomposición genética se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la descomposición genética y se refina. Se sigue este ciclo las veces que sea necesario. Es importante resaltar que para un mismo concepto matemático pueden existir varias descomposiciones genéticas, las cuales pueden ser todas viables, ya que cada una puede representar un camino diferente de construcción mental de dicho concepto (vea, por ejemplo Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Diseño y aplicación de enseñanza

A partir de la descomposición genética de un determinado concepto matemático, se diseñan actividades que serán aplicadas a los estudiantes para determinar si siguen el camino cognitivo que allí se describe.

Estas actividades, generalmente se diseñan con un ciclo de enseñanza denominado ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios), asociado a la teoría APOE. En este ciclo se elaboran actividades (que se realizan en forma colaborativa) a partir de una descomposición genética, para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones mentales sugeridas en dicha descomposición. El objetivo de esta fase es incentivar la abstracción reflexiva. Luego se discuten en clase las actividades realizadas en la etapa anterior y finalmente se elaboran ejercicios para que los estudiantes refuercen lo que han hecho en las otras dos etapas. (Arnon et al., 2014).

Análisis y verificación de los datos

Una vez diseñada la descomposición genética hipotética para un concepto matemático, se debe determinar su viabilidad. Ésta se puede realizar a partir de las observaciones efectuadas en la aplicación de las actividades de la componente anterior o, diseñando y aplicando instrumentos para comprobar si los informantes muestran las construcciones mentales que allí aparecen. En esta componente se analizan los resultados obtenidos, observando si todos los elementos que allí aparecen han sido considerados en la descomposición genética y si todos los elementos considerados en la descomposición genética fueron percibidos en los instrumentos. A partir de este análisis, se determina si la descomposición genética debe ser o no refinada.

En este trabajo, se aplica esta tercera componente del ciclo de investigación. Se diseñan, aplican y analizan instrumentos para determinar la viabilidad de la descomposición genética que se muestra en la Figura 1.

METODOLOGÍA

Esta investigación está situada en el paradigma hermenéutico o interpretativo, el método empleado es el estudio de casos (Stake, 2010) y las técnicas de recogida de datos son cualitativas (cuestionario y entrevista en profundidad), pues permiten obtener información relevante y en profundidad acerca de las estructuras y mecanismos mentales que muestran los estudiantes respecto al concepto de inducción matemática.

Esta investigación se desarrolló en el primer semestre del 2014 en una universidad de Chile. Los casos son los siguientes:

Caso 1: 9 estudiantes de primer año de pedagogía o licenciatura en matemáticas, etiquetados como E1, E2, ..., E9.

Caso 2: 2 estudiantes de magíster en matemáticas, etiquetados como E10 y E11.

Caso 3: 1 estudiante del último año de licenciatura en matemáticas, etiquetado como E12.

Los instrumentos diseñados y aplicados fueron validados por el grupo cognitivo de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).

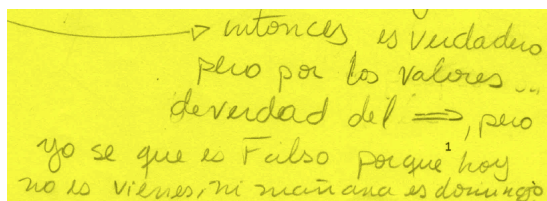
Para validar o refinar la descomposición genética propuesta en la Figura 1, se aplicó primeramente un cuestionario (que consta de 3 preguntas, con varias partes cada una) y después de analizar los resultados del mismo, se elaboró y aplica una entrevista en profundidad (con 7 preguntas). En el cuestionario se indaga sobre los conceptos de lógica, función y métodos de prueba, los cuales se consideran requisitos previos al concepto de inducción matemática. Con la entrevista se pretende validar los fragmentos de la descomposición genética que no fueron abarcados por el cuestionario, pero además, la entrevista en profundidad permite obtener una mejor información acerca de las construcciones mentales de los estudiantes, de su forma de pensar, lo cual es fundamental en esta investigación por encontrarse bajo el marco de la teoría APOE.

De los once estudiantes que participaron en el cuestionario, se seleccionó a cuatro que fueron los que mostraron tener algún conocimiento de conceptos previos al concepto de inducción matemática, como son método de prueba, *Modus Ponens*, conectivos lógicos (incluido el implica), sucesiones y funciones. Por problema de espacio, en este trabajo se analizan las producciones de dos de los estudiantes en la entrevista, ya que uno de ellos parece comprender el principio de inducción matemática y otro no lo hace, y luego se discute que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la descomposición genética refinada.

ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE LOS DATOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Estudiante 2

En la pregunta 1 de la entrevista (*Decida si la siguiente proposición es verdadera o falsa: Si hoy es viernes, entonces mañana es domingo*), conjeturamos que E2 muestra una concepción acción de implica, ya que realiza una tabla de verdad para este conectivo y continúa con la respuesta que se muestra en la Figura 3. (Observación: la entrevista no se realizó un día viernes).



entonces es verdadero
pero por los valores ...
de verdad del \Rightarrow , pero
yo se que es Falso porque hoy
no es viernes, ni mañana es domingo

Figura 3: Respuesta de E 2 a la pregunta 1.

El estudiante E2 muestra una concepción acción del paso base y del paso inductivo, pero no los coordina para explicar inducción, como se aprecia en un fragmento de la entrevista a E2, respecto a la pregunta 4.b (*Suponga que después de explicarle al estudiante (el principio de inducción matemática), le muestra un ejemplo y él todavía no entiende, ¿cómo lo convencería de que es cierto, por ejemplo para $n = 1000000$?*). Observación: ENT se refiere al entrevistador, que en este caso es una de las autoras.

[122E2]: Pero ni siquiera yo sé por qué es verdadera para todo, porque así es la inducción, po, no, no sé.

[122ENT]: ¿No sabes por qué?

[123E2]: Porque, es que no sé porque esos pasos hacen que sea verdadero para todos.

[123ENT]: mmm

[124E2]: Yo no sé, entonces no podría decirle porque no, no sé. Pero le diría que lo evalúe en $n = 100000$ en 1000000 y debería ser verdadera.

[124ENT]: Claro, pero la idea de inducción de matemática es justamente no tener que probar en cada valor, sino que al hacer esto se cumple para todos.

[125E2]: Pero tendría que ser, para el valor que sea, para el siguiente si es, entonces para el siguiente y para el siguiente,...o sea para todos.

Estudiante E12

En la entrevista en profundidad, el estudiante E12 muestra una concepción proceso de $p \Rightarrow q$ cuando señala que la proposición de la pregunta 1 es verdadera.

Además coordina el paso base con el paso inductivo (como procesos) para obtener el proceso explicar inducción; el cual encapsula en el objeto inducción matemática, ya que resuelve correctamente todos los problemas desde el 2 hasta el 6 y es capaz de explicarlos correctamente. Se puede afirmar además, que al encapsular el proceso explicar inducción en el objeto inducción matemática, lo hace asimilando método de prueba, ya que el estudiante fue capaz de discernir entre

varios métodos de prueba y escoger el de inducción matemática para resolver el ejercicio de la pregunta 5.

Los resultados del cuestionario y de la entrevista en profundidad, dan cuenta de que:

Los estudiantes que no muestran una concepción proceso de $n \rightarrow P(n)$ y de “conectivos lógicos”, no son capaces de coordinarlos para obtener $n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$ como proceso, ni siquiera en el caso (E2) que muestra una concepción proceso de $n \rightarrow P(n)$.

El estudiante E12 muestra una concepción proceso de $P(n_0)$ y de $n \rightarrow [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$, los cuales coordina, a través de *Modus Ponens*, para obtener como proceso “explicar inducción”, el cual se encapsula en el objeto “inducción matemática”.

Los resultados dan cuenta de que el estudiante E2 que no muestran una concepción objeto de “inducción matemática”, tampoco muestran una concepción objeto de “lógica”, ni concepción proceso de “conectivos lógicos” y en particular de “implica”. Al contrario de lo que sucede con el estudiante E12 que sí muestra una concepción objeto de “inducción matemática”. Por lo que sugerimos que para poder encapsular “inducción matemática” en un objeto, es necesario que “implica” se muestre como construcción mental proceso.

En relación con este último punto, Ernest (1984) sugiere que las implicaciones son una causa de las dificultades para entender inducción matemática.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El estudiante (E12) muestra las construcciones y los mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética plasmada en la Figura 1, por lo que parece ser que la DG hipotética da cuenta de los mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje del principio de inducción matemática. Aunque, de acuerdo a lo que muestra dicho estudiante, parece no ser necesario que “función”, “método de prueba” y “lógica” estén como construcción mental esquema, sino “función” y “método de prueba” como construcción mental proceso y “lógica” como construcción mental objeto. De todos modos, es necesario continuar la investigación aplicando el cuestionario y la entrevista a un mayor número de estudiantes para tener evidencia de su viabilidad.

Por lo pronto, se puede realizar un refinamiento de la descomposición genética hipotética (Figura 1) con los cambios que se acaban de mencionar respecto a “función”, “método de prueba” y “lógica”.

Una propuesta para la enseñanza de este concepto, es aplicar el ciclo de enseñanza ACE con la descomposición genética refinada, diseñando actividades de modo que los estudiantes muestren el concepto de “inducción matemática” como construcción mental objeto, a través de las estructuras y los mecanismos mentales sugeridos en dicha descomposición genética. Por lo que, las autoras consideran que una secuencia didáctica para el concepto de inducción matemática no puede dejar de contener actividades de aula como las que se indican:

Donde se trabaje con el conectivo lógico implica. (Estudiar qué tipo de actividades son apropiadas, es tema para futuras investigaciones.)

Donde se realicen pruebas con distintos métodos.

Demostraciones con inducción matemática en ejercicios geométricos.

Ejercicios en los cuales se cumpla el paso inductivo, pero no el paso base.

Actividades para que los estudiantes entiendan la importancia del paso inductivo.

Ejercicios en los cuales los estudiantes establezcan conjeturas y luego las prueben por inducción.

El primer punto de estas actividades es de gran relevancia, debido a lo que se pudo observar en los resultados de esta investigación y a lo que afirman otros autores (véase, por ejemplo Ernest, 1984; Reid, 1992), a saber el conectivo lógico implica puede ser una de las causas importantes en las dificultades del aprendizaje de inducción matemática. Consideramos este un tema relevante para abordar en futuras investigaciones.

Referencias

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., De Vries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol. 2 (p.1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.
- Dubinsky, E. (1996). *Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria*. *Educación matemática*, 8 (3), 25-41.
- Ernest, P. (1984). *Mathematical induction: A pedagogical discussion*. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 173-189.
- García, I. y Parraguez, M. (2015). *Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción matemática*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 765-773. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching*. (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). *Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), 89-112.
- Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

¹Parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt Regular N°1140801.