UN MODELO COGNITIVO PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES[1]

A cognitive model for improving learning composition of functions

Valdivia, C.[a], Domínguez, C.[b] yParraguez, M.[c]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
cristobal.valdivia.s@gmail.com[a], carolina.dominguez.garcia@gmail.com[a],
marcela.parraguez@pucv.cl[b]

Resumen

Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) como referente teórico y metodológico, se investigó sobre la manera en que un estudiante construye la composición de funciones reales de variable real, a través del diseño de un modelo cognitivo, denominado Descomposición Genética (DG), que supone un camino viable para la comprensión profunda del concepto. Los datos fueron obtenidos de 35 estudiantes de dos universidades chilenas, agrupados en tres casos de estudio. Los resultados muestran que la construcción del objeto composición de funciones, depende de dos procesos fundamentales que ocurren de manera separada en el razonamiento de los estudiantes: la composición de las ecuaciones de dos funciones (g o f); y la condición necesaria para componer ambas funciones $\mathrm{Re}\,c(f) \subseteq Dom(g)$.

Palabras clave: *composición de funciones, descomposición genética, teoría APOE.*

Abstract

Basing on the APOS theory (Action, Process, Object and Schema) as a theoretical and methodological reference, we investigated about the manner in which a student builds the real function composition of real variable, through the design of a cognitive model called Genetic Decomposition (GD), that supposes a viable path through the deep comprehension of the concept. The information was obtained from 35 students of two Chilean universities, grouped in three study cases. The results show that the construction of the function composition object depends on two fundamental processes that occur in a separately way in the students reasoning: the composition of the equations of two functions (g o f); and the condition needed to compose both functions $\mathrm{Re}\,c(f) \subseteq Dom(g)$.

Keywords: *composition of function, genetic descomposition, APOS theory.*

INTRODUCCIÓN

En la mayor parte de los programas de pregrado de las universidades chilenas, los estudiantes deben aprobar cursos de cálculo diferencial e integral en una variable real. En estos cursos, generalmente semestrales, se estudian gran cantidad de conceptos cuya comprensión, por parte de los estudiantes, progresivamente se vuelve hacia la operatoria algebraica y la memorización de los procedimientos necesarios para resolver problemas, con el único objetivo de aprobar.

No es de extrañar, entonces, que un estudiante apruebe el curso sin comprender los conceptos matemáticos estudiados, y pierda el potencial que pueden aportar al momento de resolver problemas, por ejemplo, de ingeniería, física, química, entre otros.

En consecuencia, se hace necesario mejorar los procesos de enseñanza de la matemática para estimular aprendizajes significativos y comprensiones más profundas sobre los conceptos estudiados en cursos de cálculo. En particular, uno de los conceptos que tiene dificultades en su comprensión es la composición de funciones reales de una variable real.

Antecedentes

En la literatura existen pocas investigaciones –documentadas– que abordan específicamente problemáticas en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto composición de funciones (Webster, 1978; Thoo, 1995; Hassani, 1998; Meel, 1999; Horvath, 2008). Otras, en cambio, emprenden el estudio de conceptos matemáticos donde la composición de funciones se presenta en forma inherente (Clark et al., 1997; Cotrrill, 1999; Capistran, 2005; Gordon, 2005; Uygur y Ozdas, 2007; Kabael, 2010; Maharaj, 2013; Valdivia y Parraguez, 2013). En todas ellas queda en evidencia varias dificultades, errores y obstáculos que giran sobre la comprensión de la composición de funciones.

Por ejemplo, Meel (1999) halló evidencia de que existe una fuerte tendencia, por parte de el grupo de futuros profesores entrevistados, a negar las funciones constantes como funciones. Esto repercute directamente cuando ellos se enfrentan con funciones compuestas en las que intervengan funciones constantes. Otro hallazgo relevante, obtenido por el investigador, es que más de la mitad de los entrevistados consideraba la composición de funciones como una multiplicación (Figura 1), de modo que pensaban en la igualdad $F\big(g(x)\big) = F \cdot g(x)$, en vez de evaluar $g(x)$ en la función F.

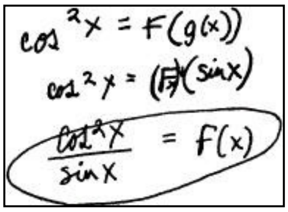

Figura 8. Ejemplo del uso inapropiado de la notación funcional (Meel, 1999, p. 6).

Por su parte, Horvath (2008) concluyó que la notación (expresión algebraica) que aparece en el teorema de la regla de la cadena, crea dificultad y malentendidos a la hora de aplicar la fórmula para derivar diferentes tipos de funciones compuestas. Por su parte, Clark y su grupo (Clark et al. 1997) mencionan que la composición y la descomposición de funciones son un pilar fundamental para construir dicha regla.

En este mismo sentido, pese a la importancia del concepto que nos convoca, varios investigadores concuerdan en que algunas de las dificultades que tienen los estudiantes con la regla de la cadena (en una o varias variables), podrían atribuirse a las dificultades del conocimiento de la composición de funciones (Capistran, 2005; Uygur y Özdas, 2007; Kabael, 2010; Valdivia y Parraguez, 2013).

Estos antecedentes permiten observar que, aunque se ha realizado investigación en torno al aprendizaje de la composición de funciones, aún no hay claridad sobre cómo es aprendido por los estudiantes. De ahí que es necesario profundizar mediante más investigación para conocer la manera en que construyen la composición de funciones, desde un punto de vista cognitivo. De forma natural emergieron las siguientes preguntas que guiaron este estudio: ¿Cómo construyen cognitivamente los estudiantes la composición de funciones reales en una variable real? y ¿Cuáles son las estructuras mentales que son requisitos para poder construir la composición de funciones?

En búsqueda de respuestas se planteó, como objetivo general, documentar evidencia empírica que describa la manera en que un estudiante construye cognitivamente la composición de funciones y cuáles son los conceptos que son necesarios para dicha construcción.

Marco teórico: la teoría APOE

La investigación se sustenta de un marco teórico de carácter, esencialmente, cognitivo. Este referente atiende el estudio de los procesos de aprendizajes de un estudiante sobre conceptos matemáticos, lo que sin duda se condice con el objetivo general propuesto y la problemática planteada.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) fue creada por Ed Dubinsky (1991), en respuesta a identificar la manera en que se construyen o aprenden los conceptos matemáticos. Esto ocurre mediante un modelo, denominado Descomposición Genética (DG), que está constituido por estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación), que representa un camino viable para la construcción de conceptos matemáticos.

Las investigaciones que se realizan con la teoría APOE, suponen la DG como la hipótesis de investigación del concepto en estudio, la cual contiene a priori los constructos que son necesarios para modelar el aprendizaje de conceptos matemáticos que pasan por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto.

En adelante se dirá que un estudiante muestra una **concepción acción** cuando él realiza transformaciones a un objeto, que lo percibe como algo externo, y que están originadas por estímulos de terceros, que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer (Trigueros, 2005).

Por otro lado, se dice que un estudiante muestra una **concepción proceso** cuando las acciones se repiten y el sujeto reflexiona, incorporándolas en su conciencia (*interiorización*). En esta etapa de construcción del concepto el estudiante no tiene la necesidad de instrucciones externas, sino que "puede intuir un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos, además es capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizarlos" (Parraguez y Oktaç, 2012, p. 106). Dos o más procesos pueden generar un nuevo proceso mediante el mecanismo mental de la *coordinación*.

Además, un estudiante da evidencias de una **concepción objeto** cuando *encapsula* un proceso, gracias a la reflexión que él realiza sobre las transformaciones u operaciones que se aplican a un concepto. En esta etapa de construcción, su accionar no está limitado a instrucciones externas, ya que tiene la capacidad de identificar porqué ocurren las transformaciones, sin la necesidad de aplicarlas. De forma inversa, se puede desencapsular un objeto cuando se identifica el o los procesos que le dieron origen.

Ahora bien, Dubinsky (1991) se refiere a Abstracción Reflexiva como un mecanismo para pasar de una estructura mental a otra. Esta noción constituye el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático, y corresponde al proceso mediante el cual un individuo realiza acciones sobre los objetos que son fuente de estudio y, a partir de ello, se establecen relaciones o propiedades. El conjunto de acciones constituyen los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, tematización y asimilación.

Metodología

La estructura general de la investigación está determinada por la teoría APOE, que incluye el ciclo de investigación, y consta de tres etapas secuenciales (Asiala et al., 1996): análisis teórico o descomposición genética; diseño y aplicación de instrumentos; análisis y verificación de datos. La aplicación de este ciclo supone diseñar una DG de la composición de funciones que sea validada por la evidencia empírica, o bien se obtengan antecedentes que indiquen una o más modificaciones (refinamiento).

En la primera etapa del ciclo de investigación se realizó un análisis teórico, desde la propia matemática, sobre los conceptos que están involucrados en la composición de dos funciones. Tales conceptos, que constituyen las construcciones y mecanismos mentales, fueron incorporados a la DG de la composición de funciones, y articulados mediante la experiencia docente de los investigadores de este estudio.

Participantes

Para recoger la evidencia empírica necesaria para validar o refinar la DG de la composición de funciones, fueron seleccionados 35 estudiantes de dos universidades del país, que se trabajaron como casos (Stake, 2010). Los estudios de casos fueron incorporados en el ciclo de investigación según características comunes que presentan los estudiantes, agrupados según el tipo de carrera profesional al cual pertenecen: pedagogía en matemática; licenciatura en matemática; ingeniería. Los criterios utilizados para la selección fueron: haber aprobado, a lo menos, un curso de álgebra o cálculo que incluya el estudio de composición de funciones reales de variable real; participar voluntariamente en la investigación; accesibilidad de los investigadores; avance curricular adecuado, es decir, que los estudiantes no estén cursando el primer semestre de su carrera.Los 35 estudiantes con los que se trabajó fueron etiquetados como E1, E2, …, E35.

Análisis teórico o descomposición genética de la composición de funciones

Antes de iniciar la descripción de las relaciones mentales que generan la construcción objeto de la compuesta de dos funciones, la definición consensuada a la que llegaron los investigadores es una adaptación de la definición de Pérez (2006): Supongamos que f y g son funciones reales de variable real, verificando que $\operatorname{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$. En tal caso, la función h dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in Dom(f)$ se llama composición de g con f y se representa por $g \circ f$.

A continuación se describe el tipo de concepciones que un estudiante universitario (a priori) puede construir para comprender la compuesta de dos funciones reales de variable real.

Concepción Acción: Para iniciar, el estudiante debe contar con ejemplos de funciones reales, mediante las cuales pueda verificar el resultado propuesto. Por ejemplo, el estudiante puede considerar entre su colección ejemplos primarios –u otros análogos– como los siguientes:

$$\text{Si } f(9) = 10 \ y \ g(6) = 9, \text{ entonces } (fog)(6) = f(g(6)) = 10$$

$$\text{Si } f(x) = 2x + 1 \ y \ g(x) = 3x, \text{ entonces } (fog)(2) = f(g(2)) = 13$$

En estos ejemplos –y otros más– puede haber una variación, tanto de los valores reales elegidos, como también del tipo de funciones (polinómicas, logarítmica, exponencial, lineal, cuadrática, constante, entre otras), de tal manera que el estudiante pueda establecer cuáles de esas funciones pueden componerse y cuáles no. Esto se puede hacer por la aplicación de acciones específicas sobre los elementos dados, realizando la composición entre las funciones; y por otra parte, especificando en la medida de lo posible los gráficos de las funciones y su compuesta. En esta concepción, es posible que el estudiante establezca una fórmula para la compuesta de las funciones, posiblemente de manera mecánica, sin reparar en las condiciones que se deben atender para lograr componer dos funciones.

Ejemplo de lo anterior son las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$, cuya composición $(g \circ f)$ no está definida, ya que $Rec(f) \cap Dom(g) = \phi$. Sin embargo un estudiante puede obtener dicha composición en forma algebraica, incurriendo en un error ya que se está trabajando con funciones reales de variable real, y sólo se podrá escribir la composición cuando ésta exista.

Una forma de provocar la *interiorización* de las acciones que un estudiante realiza sobre ejemplos primarios, es mediante la variación de los tipos de funciones, diferentes a las canónicas (las más frecuentemente usadas), o las que se utilizan en los textos de estudio, por ejemplo, Larson y Edwards (2010) y Leithold(2000);el cambiar los tipos de funciones, puede llevar al estudiante a investigar y poner énfasis sobre las condiciones que deben cumplir los dominios y recorridos de las funciones, para que la composición de las funciones esté bien definida.

Una concepción acción de la compuesta de funciones reales de variable real, como se puede ver, no es una construcción inmediata. Por lo menos, el estudiante debe conocer los algoritmos necesarios y tener presente el concepto dominio y recorrido de las funciones, para componerlas.

Concepción Proceso: Cuando el estudiante empieza a considerar las restricciones que verifica la compuesta de funciones, con ciertas condiciones, y ha generado composiciones de funciones con diferentes tipos de funciones, ha *interiorizado* estas acciones en un *proceso*, ya que puede determinar cuáles son las condiciones asociadas a las funciones que precisa componer, las que le permiten validar la compuesta de dos funciones, al considerar la pertinencia de ciertos dominios y recorridos, y al aceptar que una misma expresión algebraica puede dar origen a diferentes funciones asociadas.

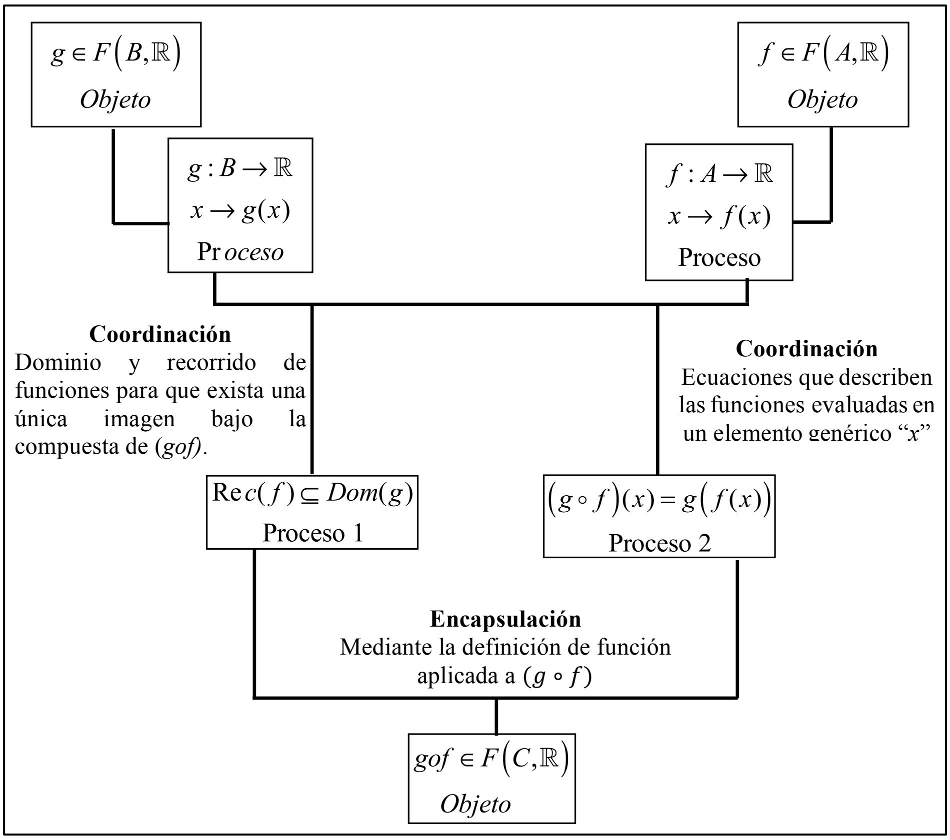

Figura 9. Descomposición Genética hipotética de la composición de funciones reales de variable real.

Esta construcción está determinada por la comparación de dos objetos; estos objetos son el resultado de la encapsulación de dos procesos que parecen construirse de manera independiente. Por un lado la composición de las ecuaciones de dos funciones reales, que determinan una ecuación de una nueva función (ver Figura 2), y por otro, la ecuación algebraica sobre la cual se precisan las condiciones $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$, que determinan *(gof)(x)*.

En el caso de la composición de dos funciones reales de variable real, el estudiante debe determinar qué condiciones deben establecerse sobre *f*y *g*para ser compuestas, dichas condiciones son los coordinadores entre los procesos de las funciones*f* y *g*. Es por tanto necesario que el estudianteposea una concepción objeto de función, *f*, no solo para desencapsularla en su proceso como función, sino para que además le permita al estudiante realizar acciones de *g* sobrelos elementos*f(x)* para generar un nuevo elemento, *g(f(x))* mediante su encapsulación, que es el objeto $gof \in F(C,\mathbb{R})$, como se muestra en la Figura 2.

Resultados

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, el análisis de algunas respuestas que hubo en lapregunta 4del cuestionario y que dieron lugar a tres resultados relevantes y no triviales para la investigación.

En las respuestas a la pregunta 4 (Figura 3) ocurrió que 32 de los 35 estudiantes procedieron, en primer lugar, a determinar la expresión algebraica de la compuesta entre$f$ y g,y luego hallaron el dominio. Esto se interpreta, en términos de las construcciones dispuestas en la DG, que el 91% de los estudiantes *coordinan* las ecuaciones de las funciones f y g para obtener un nuevo *proceso,* la ecuación de$(g \circ f)(x)$.Posteriormente, este grupo de estudiantes determinó el dominio de aquella composición.

4. Considerando las funciones $f(x)$ y $g(x)$, hallar $(g \circ f)(x)$ y $Dom(g \circ f)$

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = e^x$

b) $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \ln{(x + 5)}$

c) $f(x) = \cos{(x)}$ y $g(x) = \sqrt{x - 16}$

Figura 10. Pregunta cuatro del cuestionario.

Un claro ejemplo de lo anterior son las producciones del estudiante E11 (Figura 4), que primero realiza las cuatro composiciones algebraicas y, posteriormente, sólo determina el dominio de dos de ellas, y como procedimientos separados.

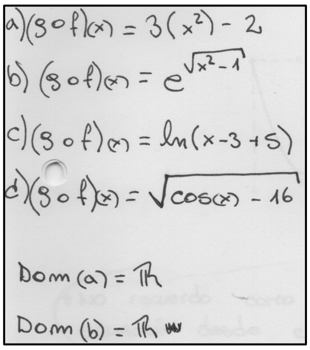

Figura 11. Respuesta del estudiante E11 a la pregunta 4 del cuestionario.

En cambio, el estudiante E28 (Figura 5)explicita el dominio y recorrido de las funciones g y f,cuya composición no está definida. Esto se interpreta desde la DG como que el estudiante ha *encapsulado* el *proceso 1* y el*proceso 2*, en el *objeto* compuesta de dos funciones, y de esa forma argumentó correctamente los cuatro incisos de la pregunta 4 del cuestionario.

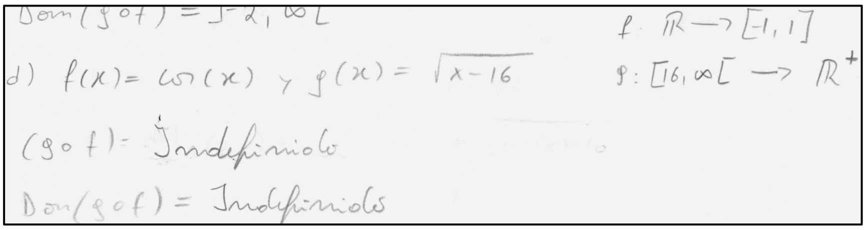

Figura 12. Respuesta del estudiante E11, en el inciso d)de la pregunta 4 del cuestionario.

Por otro lado, se encontró que 4 de los 35 estudiantes confundieron la condición para componer dos funciones con el dominio de la propia compuesta. Por ejemplo, el estudiante E2, en el primer inciso de la pregunta 4,muestra conocer cómo determinar el dominio de la composición entre g y f (Figura 6), sin embargo, E2 confunde el dominio de la composición con la condición de la propia compuesta.

En términos de APOE, el estudiante E2 muestra una *concepción proceso 2*, ya que es capaz de generar diferentes funciones con distintas ecuaciones; sin embargo, no muestra *concepción proceso 1*, puesto que no puede determinar correctamente cuáles condiciones permiten componer y, en consecuencia, no ha interiorizado cuáles son los dominios y recorridos pertinentes para componer. Esto conlleva a que el estudiante E2 no construye el *objeto* composición de funciones, ya que hay una disociación entre los *procesos 1* y *2*.

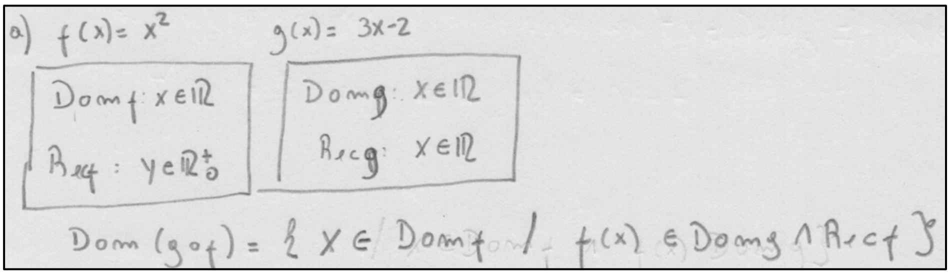

Figura 13. Respuesta del estudiante E2, en el inciso a) de la pregunta 4 del cuestionario.

A MANERA DE DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El objetivo de esta investigación fue describir la manera en que un estudiante construye mentalmente la composición de funciones, e indagar en los conceptos que están involucrados en su aprendizaje. En esa línea, se encontró que las estructuras y mecanismos mentales, dispuestos en la DG hipotética de la composición de funciones, efectivamente están presentes en la construcción que hace cada estudiante que formó parte de los estudios de casos.

En lo específico, para construir el *objeto* composición de funciones, se vuelven de vital importancia dos mecanismos mentales: uno que permita *coordinar* el dominio y recorrido de dos funciones (digamos *gof*), de modo que $\mathrm{Re}c(f) \subseteq Dom(g)$ (*Proceso 1*); y una *coordinación* de las ecuaciones de las dos funciones, de modo que ocurra la evaluación de una función en la otra (*Proceso 2*).

La evidencia obtenida del análisis de los resultados muestra que los procesos 1 y 2 se construyen de forma separada: el 94% de los estudiantes logró *coordinar* las ecuaciones de dos funciones g y f, para obtener la ecuación de la función $g \circ f$. Esto ocurrió tanto con acciones sobre valores reales específicos como con elementos genéricos "x"; no obstante, sólo el 33% de los estudiantes logró *coordinar* los dominios y recorridos de las funciones g y f, para identificar correctamente la condición necesaria ($Rec(f) \subseteq Dom(g)$) de modo que $(g \circ f)(x)$ esté bien definida, para cada x en el respectivo dominio.

También se encontró que hay una tendencia de los estudiantesque, al componer dos funciones, sólo se realicela composición de las ecuaciones(*proceso 2*). El *proceso 1* se realiza cuando es solicitado en la misma pregunta, de lo contrario, los estudiantes no lo hacen. Aunque este primer estudio no permite concluir que siempre ocurre, se hace necesario realizar más investigación, incorporando una entrevista que permita profundizar el modo en que cada uno de ellos razona.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996).A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) Research in collegiate mathematics education. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. P.1-32.

Capistran, R. (2005). Concepts of the chain rule for first term calculus: A comparison across students, instructors, and professors. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota, Minneapolis.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John; D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The case of the chain rule. Journal of MathematicalBehavior, 16(4), 345–364.

Cottrill, J. (1999). Students` Understanding of the Concept of Chain Rule in first year Calculus and the Relation to their Understanding of Composition of Functions. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Gordon, S. (2005). Discovering the chain rule graphically. Mathematics and Computer Education. 39(7), 627–635.

Hassani, S. (1998).Calculus students' knowledge of the composition of functions and the chain rule. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Normal.

Horvath, A. (2008). Looking at calculus students' understanding from inside-out: The relationship between the chain rule and function composition.Proceedings of the 11th Annual Conference on Research in undergraduate Mathematics Education, San Diego, CA.

Kabael, T. (2010). Cognitive development of applying the chain rule through three worlds of mathematics.Australian Senior Mathematics Journal, Vol. 24, N°2, 14-28.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). Cálculo 1 de una variable. México: Mc Graw Hill.

Leithold, L. (2000). El cálculo. México: Universidad Iberoamericana

Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. South African Journal of Education, 33(1), 1–19.

Meel, D. (1999). Prospective teachers' understandings: Function and composite function. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. 1, 1-12.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. Paradigma. 33(1), 103-134.

Pérez, J. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/perez-calculo1.pdf

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid, España: Ediciones Morata

Thoo, J. B. (1995). Composition and the chain rule using arrow diagrams on achievement in applying the chain rule. PRIMUS, 17(2), 131–147.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática Educativa a nivel superior. Educación matemática Santillana. 5-31. Recuperado el 14 de Julio de 2015, de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517101.pdf

Uygur, T. &Özdas, A. (2007). The effect of arrow diagrams on achievement in applying the chain rule. PRIMUS, 17(2), 131–147.

Valdivia, C. y Parraguez, M. (2013). Una descomposición de la regla de la cadena: un modelo cognitivo para la construcción del concepto. Flores R. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26, 825-834. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Webster, R. J. (1978). The effects of emphasizing composition and decomposition of various types of composite functions on the attainment of chain rule application skills in calculus. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University, Tallahassee.

---

[1] Este trabajo fue financiado por el Proyecto DID S-2015-01, de la Universidad Austral de Chile.