

# ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPIEDADES DE UNIÓN, INTERSECCIÓN Y COMPLEMENTO DE UN EVENTO EN PROBABILIDAD

Daniela Aros Ibaceta<sup>a</sup>, Nicole Astudillo Cabrera<sup>b</sup>, Elisabeth Ramos Rodríguez<sup>c</sup> y Felipe Ruz Ángel<sup>d</sup>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;  
correos electrónicos: [daniela.aros@outlook.es](mailto:daniela.aros@outlook.es)<sup>a</sup>, [nalejandra121@gmail.com](mailto:nalejandra121@gmail.com)<sup>b</sup>,  
[elisabeth.ramos@pucv.cl](mailto:elisabeth.ramos@pucv.cl)<sup>c</sup>, [Felipe.ruz.angel@gmail.com](mailto:Felipe.ruz.angel@gmail.com)<sup>d</sup>

## Resumen

*La memorización de algoritmos para la optimización del tiempo en la resolución de problemas es una problemática común en la enseñanza de las matemáticas (Gómez, 2000). Es por ello, que se busca a través de una propuesta de aula diseñar tareas de aprendizaje que promuevan la utilización de registros de representación en la comprensión del objeto matemático, considerando las limitaciones de aprendizaje, develadas a partir del análisis didáctico (Gómez 2007), como un aspecto necesario para prever situaciones que pueden ocurrir durante la implementación. Además se debe reconocer que es indispensable que el docente lleve a cabo un análisis de las dificultades y errores asociadas al uso de diversos registros al diseñar una propuesta de aula. Esto permite tener un objetivo claro y definido, evitando ambigüedades, reconociendo que una actividad no puede estar exenta de limitaciones.*

**Palabras clave:** *tareas de aprendizaje, limitaciones de aprendizajes, análisis didáctico, registros de representación*

## INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En la literatura se describen ciertas problemáticas asociadas al aprendizaje de las probabilidades, razón por la cual, el docente debe diseñar tareas priorizando la comprensión del objeto matemático, lo cual, se consigue con el uso en primera instancia de diferentes sistemas de representación. Sin embargo, como menciona Duval (2006), el paso de un registro a otro es una dificultad predominante a la que se enfrentan los estudiantes durante su escolaridad debido al estudio, de manera independiente, de las distintas representaciones de un objeto matemático, por lo cual dicha dificultad debe ser considerada por el docente.

La enseñanza de las probabilidades está en mano de los profesores de matemática, en este sentido “la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y de la Probabilidad (...) se ve afectado por el área de formación del docente y por el escaso desarrollo de herramientas metodológicas” (Osorio, Suarez y Uribe, 2011, pág. 373), por ende se hace necesario un trabajo colegiado de los docentes, para definir herramientas específicas en el estudio de la probabilidad, evitando una inadecuada adaptación del contenido matemático en el contexto escolar.

Asimismo, el docente debe evitar un “aprendizaje meramente memorístico →»hechos, nombres y fórmulas»– y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador →»enseñar a pensar»–, es decir, un aprendizaje significativo” (Gómez, 2000, pág. 55), porque el proceso de aprendizaje implica, no solamente la replicación de algoritmos, sino que también dar sentido al objeto de estudio en sus distintas representaciones.

A partir de los antecedentes presentados, podemos explicitar la problemática de estudio como el abuso en la utilización de las fórmulas de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad (Gómez, 2000). Por ello, nos planteamos como objetivo diseñar e implementar una

propuesta de aula que priorice el razonamiento por sobre la memorización en el cálculo de las probabilidades.

## Marco de referencia

El marco de referencia que sustenta este estudio se basa principalmente en tres aspectos: la teoría de registros semióticos (TRS), la teoría de situaciones didáctica (TSD) y el análisis didáctico.

De acuerdo a la problemática definida, se pudo identificar que los alumnos tienden a la memorización de algoritmos asociados a las propiedades de probabilidad, lo que se debe principalmente a que no estudian el concepto en sus diferentes representaciones y/o contextos (Gómez, 2000). Es por ello, que se considerará la TRS como la principal teoría a utilizar en el diseño de la tarea.

Al diseñar una tarea de aprendizaje basada en la TRS se hace fundamental tener presente que “(...) el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones, bajo estas condiciones una representación proporciona el acceso al objeto representado” (Prieto y Vicente, 2006, pág. 205). Para que el estudiante reconozca un objeto matemático debe estudiarlo en sus diferentes registros de representación, pudiendo así concluir que la esencia del objeto matemático es más que, por ejemplo, la expresión algebraica que lo define y/o los valores que toma. Además, para el diseño de la clase se propone el uso de las cuatro fases de la TSD.

Por otro lado, el Análisis Didáctico es una herramienta metodológica para planificar en profundidad que propone cuatro sub-análisis (Gómez, 2007): el *Análisis del contenido*, en donde se abordará la estructura conceptual, los sistemas de representación del objeto matemático, la fenomenología, y la definición matemática y escolar, el *Análisis cognitivo*, que involucra las expectativas de aprendizaje presentes en los documentos oficiales de educación, las limitaciones de aprendizaje propias del objeto de estudio, el progreso de dicho concepto a lo largo del currículo y las tareas que promueven el logro de los objetivos, el *Análisis de instrucción*, en donde el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje, y el *Análisis de actuación* en el que el profesor luego de implementar la clase, analiza los instrumentos de recogida de información utilizados.

## Metodología

El paradigma cualitativo bajo el cual se realiza esta investigación es un proceso inductivo que, según Hernández, Fernández y Baptista (2006), busca explorar y describir situaciones a las que se enfrenta un grupo de personas pertenecientes a un contexto específico. Para lo cual, se debe recolectar información que permita rescatar las experiencias individuales de los participantes, sin generalizarlas, obteniendo resultados que no serán objetivos puesto que los investigadores son participantes activos y toda intervención que realicen traerá consecuencias sobre los resultados y su respectivo análisis. Luego de llevar a cabo la investigación, se propone una reformulación de los procesos.

Para el análisis de la información se utilizaron tres instrumentos: a) las grabaciones de video, que permitieron tener una mirada panorámica de la implementación, b) las bitácoras, referidas a la descripción del contexto y ambiente donde se desarrolla la investigación y c) las hojas de respuestas con la tarea de aprendizaje en donde los estudiantes plasmaran sus estrategias de resolución.

Por otra parte, el contexto donde se llevará a cabo la implementación del plan de acción corresponde al Colegio San Vicente ubicado en Valparaíso. Dicho establecimiento educacional es

particular de subvención compartida, que imparte Educación Parvularia en el Segundo Nivel de Transición; Educación Básica y Enseñanza Media Científico – Humanista. Específicamente se escogió al tercer año medio, curso que cuenta con 22 alumnos.

## **RESULTADOS Y DESARROLLO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO**

### **A. Análisis del contenido**

Para abordar este estudio se presentarán diferentes sistemas de representación para las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad, a saber: Conjuntista referido al uso del diagrama de Venn, Algebraico-Simbólico que se denota como una aplicación de la función de probabilidad a las propiedades, Numérico-Simbólico ejemplificando las propiedades a través de conjuntos de números, Natural caracterizando las propiedades por medio del lenguaje escrito y Pictórico en donde mediante casos particulares de la vida cotidiana, se representa la definición de cada propiedad. Por otra parte se presenta la estructura conceptual de dichas propiedades, su fenomenología, considerando contextos y situaciones en las que se les da sentido a las propiedades y finalmente se comparan las definiciones matemáticas formales de los conceptos con las definiciones que se presenta a los estudiantes en el nivel escolar.

### **B. Análisis cognitivo**

Se estructura en torno a cuatro organizadores: expectativas de aprendizajes, en las cuales se identifica lo que el currículum considera pertinente que el estudiante aprenda en un nivel escolar determinado. En segundo lugar se presentarán las limitaciones de aprendizaje que hacen referencia a las dificultades y errores que poseen los estudiantes frente al estudio de la probabilidad. Luego se expone un análisis curricular para presentar los contenidos previos a los que se ven enfrentados los alumnos. Finalmente se presentan las oportunidades de aprendizaje, tareas asignadas para cumplir con el objetivo propuesto y evitar o resolver los errores y dificultades encontrados.

Algunas de las principales dificultades en el estudio de las probabilidades se debe a “nuestro afán de anticiparnos a los hechos para prever consecuencias muchas veces nos puede llevar a conclusiones equivocadas producto de un análisis apresurado” (Jiménez y Rupin; 2014; pág. 160), generando una dificultad en el aprendizaje del concepto que puede llevar a un error. Por ejemplo, al lanzar una moneda en 3 ocasiones obteniendo en todas “sello”, el alumno puede tender a decir que al lanzar por cuarta vez obtendrá “sello”, así la noción de dependencia propia de la cotidianeidad generará una dificultad en la comprensión del concepto.

Por otro lado, es importante reconocer que durante el estudio de las probabilidades, los alumnos necesitan manejar ciertas disyunciones que no tienen el mismo sentido en el lenguaje natural que en el matemático. En la Guía didáctica del docente de segundo medio, se presentan algunos errores frecuentes en el sentido que “puede ocurrir que los estudiantes, en primera instancia, asuman que la disyunción “o” es excluyente, pues así suele ser en el lenguaje natural. Así, pueden pensar que si decimos que una persona tiene corderos o vacas significa que sólo tiene un tipo de animal, no ambos” (Jiménez y Rupin, 2014, pág. 165). Entonces, los usos comunes del lenguaje literal generan una dificultad al estudiar la probabilidad. De esta forma “el análisis de errores es una potente herramienta de aprendizaje, ya que permite analizar procesos y reconocer en ellos posibles equivocaciones y las formas de abordarlos para corregirlos” (Jiménez y Rupin, 2014; pág.165).

### **C. Análisis de instrucción**

El tener en cuenta todo el proceso que vive el concepto nos permite diseñar tareas de aprendizaje que tengan una mayor consistencia. La tarea de aprendizaje es la siguiente:

El dueño de un minimarket ha observado que de sus potenciales clientes consumidores de fruta, el 0,6 prefiere comprar frutillas; por otra parte, un 0,3 prefiere ciruelas, mientras que sólo un 0,15 prefiere ambas frutas. Si se selecciona aleatoriamente un comprador de fruta, resuelva las siguientes preguntas mediante dos estrategias distintas.

- ¿Cuál es la probabilidad que no prefiera frutilla?
- ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera ambas?
- ¿Cuál es la probabilidad que prefiera al menos un tipo de fruta?

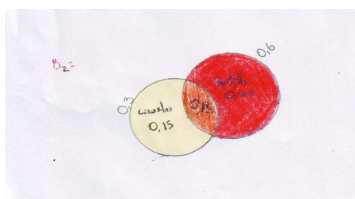
A modo general se espera que el alumno utilice distintos registros de representación, como el diagrama de Venn para potenciar la comprensión por sobre la memorización. Además, el tener en consideración el proceso cognitivo del objeto matemático, permite enfocar de mejor manera la tarea de aprendizaje que se presentará a los estudiantes facilitando el logro de los objetivos planteados.

Mediante esta implementación de 90 minutos, buscamos desarrollar la habilidad de interpretar y caracterizar las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad.

Durante el desarrollo de la clase, se considerarán las cuatro fases definidas por la TSD. En la etapa de acción se mostrará el problema principal, donde los estudiantes enfrentarán el problema de forma individual, haciendo uso, en el mejor de los casos, de dos registros de representación. En la segunda fase, de formulación, los alumnos formarán grupos estableciendo estrategias de resolución para responder a las interrogantes y, luego, en la etapa de validación, presentarlas a sus compañeros. Finalmente, la institucionalización, recae en manos del docente, quien deberá explicitar la definición del objeto matemático involucrado en la tarea propuesta.

#### D. Análisis de actuación

Luego de la implementación, se pudo notar que la actividad en sí necesita la secuencia dada para la mejor comprensión de las dos preguntas finales, la cual no era respetada, produciéndose un desorden y confusión al momento de resolverlas. Con respecto a las estrategias, se destacan 3 categorías:



Conjuntista

Numérico Simbólico

Natural

Se observó que sólo 4 alumnos de un total de 20 recurrieron al registro gráfico como una estrategia de resolución, en comparación con el resto del curso que prefirieron expresar la respuesta en lenguaje natural y de manera algebraica. Por otro lado, a pesar de no poseer los conocimientos previos, 12 alumnos fueron capaces de dar respuestas a las interrogantes de manera correcta, utilizando las estrategias que se categorizaron anteriormente.

## CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

Con el desarrollo de esta investigación se logró el objetivo general, puesto que la tarea de aprendizaje que se diseñó permite el uso de un registro de representación distinto al algebraico evitando que la enseñanza del objeto matemático, en este caso las propiedades de probabilidad, se redujera a la replicación de un algoritmo, fomentando la comprensión por parte del estudiante de conceptos claves en probabilidad, como por ejemplo a qué se refiere el complemento de un evento. Es importante destacar que, la tarea de aprendizaje propuesta puede ser más orientadora aun para el logro de los objetivos, si se incluyera un esquema con el diagrama de Venn en blanco, de tal forma que el estudiante inmediatamente enfoque sus estrategias de resolución a este sistema de representación, optimizando el tiempo de trabajo y reduciendo las posibilidades de que los estudiantes se desvíen del objetivo de la clase. Por otra parte, si los estudiantes no saben utilizar el diagrama de Venn se realizará una institucionalización local, es decir, se presentará un ejemplo del uso del diagrama de Venn.

Se pudo comprobar a partir de este estudio, que resulta indispensable que el docente lleve a cabo un análisis de las dificultades y errores asociados a cada concepto matemático considerando que una actividad no puede estar exenta de limitaciones de aprendizaje, puesto que algunas son propias del concepto y otras son propias de la concepción del estudiante, permitiendo así prever situaciones que pueden ocurrir durante la implementación, y definir acciones del docente en respuesta a éstas.

Finalmente, se espera aportar a la enseñanza de las propiedades en probabilidad con centro en el estudiante y los procesos involucrados en la comprensión de este contenido, e incentivar en las futuras generaciones a plantear cuestionamientos sobre cómo enseñar contenidos potenciando la comprensión, más que la resolución mecánica de procedimientos, teniendo en cuenta las complicaciones que surgieron durante la implementación de nuestra tarea, puesto que son inherentes de la realidad chilena en el aula.

## Referencias

- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 143-168.*
- Gómez, S. (2000). *¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato. Suma 35.*
- Gómez, P. (2007). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria.*
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1997-2006). *Metodología de la Investigación. Canadá.*
- Jiménez, L. y Rupin, P. (2014) *Guía didáctica del docente. Matemática segundo año medio.*
- Osorio, M., Suarez, A. y Uribe, C. (2011) *Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad. Fundación Universitaria Católica del Norte. Medellín, Colombia.*
- Prieto, F. y Vicente, S. (2006). *Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. Universidad nacional de la palma república Argentina.*