REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Prácticas Lingüísticas en la Clase de Matemáticas. Una experiencia de Profesionalización Online para Profesores de Matemáticas

Avenilde Romo Vázquez[1], y Christophe Hache[2]

1) Instituto Politécnico Nacional de México, México
2) Université Paris Diderot, France

Date of publication: June 24th, 2019
Edition period: June 2019-October 2019

To cite this article: Romo Vázquez, A. y Hache, C. (2019). Prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas. Una experiencia de profesionalización online para profesores de matemáticas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *8*(2), 112-138. doi: 10.4471/redimat.2019.2503

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2019.2503

REDIMAT, Vol. 8 No. 2 June 2019 pp. 112-138

Language Practices in the Maths Classroom. An Experience Online Teaching Development for Teachers of Mathematics

Avenilde Romo Vázquez
Instituto Politécnico Nacional de México

Christophe Hache
Université Paris Diderot

(*Received: 12 January 2017; Accepted: 13 November 2018; Published: 24 June 2019)*

Abstract

This article starts from the constitutive link between language and thought, and therefore the importance of language in learning phenomena. In class, students learn at the same time mathematical notions, and the way in which they are spoken of. Thus, the language plays a fundamental role in mathematics teaching and it's became an object of study in Mathematics Education. Therefore, a Teaching Unit (UT) was designed and implemented in a professional development program for mathematics teachers, based on elements, competence and experience, of the Communities of Practice (Wenger, 1998 and 2010), as well as on the principles of Scott and Scott (2010). The UT was implemented in an online program in which professors from different parts of Mexico and Latin America participate. His analysis shows how the design of the UT allowed different alignment processes between the proposed competence and the experience of the mathematics teachers.

Keywords: Language, professional development, linguistic practices.

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.2503

REDIMAT, Vol. 8 No. 2 Junio 2019 pp. 112-138

Prácticas Lingüísticas en la Clase de Matemáticas. Una Experiencia de Profesionalización Online para Profesores de Matemáticas

Avenilde Romo Vázquez
Instituto Politécnico Nacional de México

Christophe Hache
Université Paris Diderot

(*Recibido: 12 Enero 2017; Aceptado: 13 Noviembre 2018; Publicado: 24 Junio 2019)*

Resumen

Este artículo parte de la relación constitutiva entre lengua y pensamiento, y por tanto de la importancia del lenguaje en los fenómenos de aprendizaje. En clase, los alumnos estudian nociones y resultados matemáticos, descubriendo al mismo tiempo los conceptos y la manera en la cual se habla de ellos. Así, el lenguaje juega un rol fundamental en la enseñanza de las matemáticas y se ha convertido en un objeto de estudio dentro de la Educación Matemática. Es por ello, que se diseñó e implementó una Unidad de Aprendizaje (UA) en un programa de desarrollo profesional para profesores de matemáticas, basada en elementos, competencia y experiencia, de las Comunidades de Práctica (Wenger, 1998 y 2010), así como en los principios de Scott y Scott (2010). La UA fue implementada en un programa en la modalidad en línea y a distancia en el que participan profesores de diferentes partes de México y de América Latina. Su análisis muestra cómo el diseño de la UA posibilitó diferentes procesos de alineación entre la competencia propuesta y la experiencia de los profesores de matemáticas.

Palabras clave: Lenguaje, desarrollo profesional de profesores, prácticas lingüísticas

2019 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2019.2503

La enseñanza de las matemáticas de calidad sigue siendo una demanda social urgente, atenderla eficazmente conlleva a generar espacios de formación y de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, en los que se logre atender las necesidades de su práctica docente y al mismo tiempo reconocer los saberes de la profesión. Este fue uno de los motivos por el cual fue creado el Programa de Matemática Educativa (Prome) en la modalidad en línea y a distancia. Desde su creación en el año 2000, se generan Unidades de Aprendizaje (UA) con el objetivo de llevar resultados de la investigación en educación matemática a la práctica docente y generar equilibrios entre investigación y acción didáctica. En este contexto se desarrolló una investigación cuyo objetivo general fue diseñar e implementar una UA relativa al estudio del lenguaje en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La UA y su análisis se presentan en esta comunicación que consta de cinco partes. En la primera, se presentan los elementos teóricos de las Comunidades de Práctica y del análisis de las prácticas lingüísticas, en la segunda las características del estudio realizado, en la tercera algunos ejemplos de alineación producidos en la UA, en la cuarta resultados de los cuestionarios de evaluación de la UA por parte de los profesores y finalmente en la quinta algunas conclusiones.

Comunidades de Práctica: experiencia y competencia

La teoría de Comunidades de Práctica (CoP) permite analizar y comprender cómo favorecer el aprendizaje en contextos educativos (Wenger, 1998 y 2010), lo que ha incrementado su uso en el estudio del desarrollo profesional de profesores. De acuerdo con Wenger, las CoP son un lugar de aprendizaje tanto para los nuevos miembros como para los que ya pertenecen, es un contexto en el cual las nuevas ideas se transforman en conocimiento. El Programa de Matemática Educativa (Prome) es una CoP, conformada por investigadores en educación matemática (educadores, en adelante) y por estudiantes quienes son profesores de matemáticas en servicio (profesores, en adelante). Las relaciones entre educadores y profesores se basan en el compromiso mutuo que ambos tienen por la educación matemática. De acuerdo con Wenger (2001), el compromiso "se basa en lo que hacemos y conocemos, así como en […] las contribuciones y el conocimiento de otros (p. 103). Así, el Prome se reconoce como un espacio de ‘encuentros limitaneos’, donde profesores y educadores intercambian conocimiento de sus comunidades: la de investigación en educación matemática y la de enseñanza de las matemáticas (Sztajn, Wilson, Edgington & Myers, 2014). Es decir, los conocimientos del profesor adquiridos durante su práctica docente, son reconocidos como legítimos.

La tarea de los educadores del Prome, investigadores en educación matemática, es definir la competencia –conjunto de conocimientos, habilidades y compromisos– necesaria para alinear la experiencia de los profesores. Por su parte, la tarea de los profesores es la producción y adopción de significados acerca de los elementos en torno a los cuales los educadores organizan su aprendizaje, reconociendo que “adoptar un significado es contribuir a su producción interactiva” (Wenger, 2001, p. 246). La producción y adopción son un proceso de apropiación del conocimiento tanto para los profesores como para los educadores. De hecho, Wenger aclara que mantener en interacción la producción y adopción es fundamental para el aprendizaje, ya que éste “depende de nuestra capacidad de contribuir a la producción colectiva de significado porque es mediante este proceso por el que la experiencia y la competencia se impulsan mutuamente” (p. 247).

En la comunidad del Prome, los profesores personifican la experiencia y los educadores la competencia. La experiencia a la que Wenger (2001) se refiere es una experiencia de identidad, la cual “no es sólo una acumulación de detalles e información, sino también un proceso de llegar a ser, de convertirse en una persona determinada o de evitar convertirse en determinada persona” (p. 260). En ese sentido, la experiencia es un elemento constitutivo del aprendizaje no sólo del profesor, sino del resto de la comunidad. Para ello, la experiencia necesita ser extendida y reinterpretada a través de un conocimiento colaborativo, usando los recursos informativos y las herramientas de representación de una cultura amplia. Los educadores personifican el proceso de competencia porque son miembros de una comunidad de investigadores en educación matemática. Ellos fortalecen el conocimiento práctico del profesor abriendo nuevas perspectivas acerca de la educación matemática, dando acceso a determinada competencia, la cual es entendida como el conocimiento basado en la investigación que servirá para alinear la experiencia del profesor. El proceso de alineación es un proceso doble de coordinar perspectivas, interpretaciones, acciones y contextos de manera que esas acciones tengan los efectos esperados (Wenger, 2010). Así pues, en este estudio se aborda la pregunta de investigación ¿Cómo generar una UA de profesionalización docente en la modalidad online, para alinear la experiencia de los profesores relativa a las prácticas lingüísticas con la competencia que permite transformarlas en un objeto de estudio?

Elementos Teóricos y Primeras Cuestiones Sobre el Lenguaje Como Objeto de Estudio: La Competencia

Este trabajo se inscribe en un contexto más amplio de cuestionamiento del lenguaje como objeto de estudio en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (ver Hache, 2015). Primeramente, se precisa en qué sentido se entiende aquí la palabra "lenguaje", enseguida se presentan algunos elementos que caracterizan las prácticas lingüísticas de los matemáticos, en particular se muestran algunos implícitos asociados a estas prácticas y sus posibles implicaciones en la enseñanza de las matemáticas. Esto permite, posteriormente, elucidar diferentes cuestiones que conciernen a los profesores de matemáticas y a la manera en la que la competencia relativa al lenguaje como objeto de estudio puede ser puesta a disposición de los profesores a través de una UA en un programa de profesionalización de profesores de matemáticas en la modalidad no presencial.

Prácticas Lingüísticas en el Contexto de la Enseñanza

Se utiliza la palabra "lenguaje" en un sentido general: la facultad que los hombres y que las mujeres tienen para expresarse y comunicarse entre ellos con la ayuda de una lengua. La palabra "lenguaje" es vista aquí como un conjunto de palabras, un sistema de reglas lexicales, gramaticales, sintácticas, un depósito interiorizado de signos compartidos por una comunidad. El lenguaje tiene una dimensión individual y una dimensión social indisociables (Bronckart, 2008). De manera general, cada grupo social desarrolla prácticas que le son propias, incluidas las prácticas lingüísticas. Estas prácticas son relativamente estables, pero están "vivas", evolucionan. Dichas prácticas son, en cierta medida, específicas a una comunidad y muestran lo que es aceptable en su interior, validan la pertinencia de prácticas colectivas, así como individuales y toman parte en la construcción de la relación social, de la coherencia del grupo, de sus actividades y de su manera de pensar el mundo. Para un individuo, el lenguaje no es un medio de un pensamiento ya constituido, es una herramienta de construcción, de negociación y de transformación de las representaciones individuales (las del sujeto considerado, las de las personas con las cuales él interactúa). Las prácticas lingüísticas constituyen así un objeto de estudio particularmente sensible dentro de una perspectiva de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de una disciplina.

Así, los matemáticos tienen una cierta forma de utilizar la lengua, ellos tienen prácticas de usos específicos. Se constata que las cosas se dicen, pueden decirse (y escucharse) de ciertas maneras. Sin que haya necesariamente una única manera de decir algo. Sin que haya necesidad de explicitar y de saber describir estas maneras de hacer, la mayoría de las reglas son implícitas. Estas prácticas lingüísticas específicas son uno de los objetos de este estudio. Las preguntas que motivan su análisis están relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y con la profesionalización de profesores de matemáticas. Los profesores de matemáticas después de sus estudios universitarios, se han naturalmente (de manera casi inconsciente) impregnado de las prácticas lingüísticas de los matemáticos, mostrando suficiente maestría, pues lograron darse a entender y ser aceptados oralmente y por escrito, luego de los exámenes universitarios o de las evaluaciones para obtener un puesto de profesor. Esto puede extenderse a los profesores, de México y de Latinoamérica, que han tenido una formación universitaria con una fuerte componente matemática, ingenieros, arquitectos, economistas o contadores.

En clase, los alumnos estudian nociones y resultados matemáticos, descubriéndolos al mismo tiempo que la manera en la cual se habla de ellos. En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la atención (de los matemáticos, de los profesores, de los programas, de libros de textos, etc.) está puesta esencialmente sobre el contenido, rara vez sobre el lenguaje y las prácticas lingüísticas. A partir de los estudios sobre las prácticas lingüísticas de los matemáticos, varias cuestiones aparecen a propósito de la enseñanza, del aprendizaje y de la formación: ¿Cómo se trasmiten las especificidades de estas prácticas lingüísticas? ¿Cómo los alumnos adquieren (o no) la maestría de estas prácticas? ¿Qué relación tienen estas prácticas con el aprendizaje de contenidos? Y, llegado el caso, ¿qué recursos didácticos pueden implementarse para trabajar la dimensión lingüística de la actividad matemática?

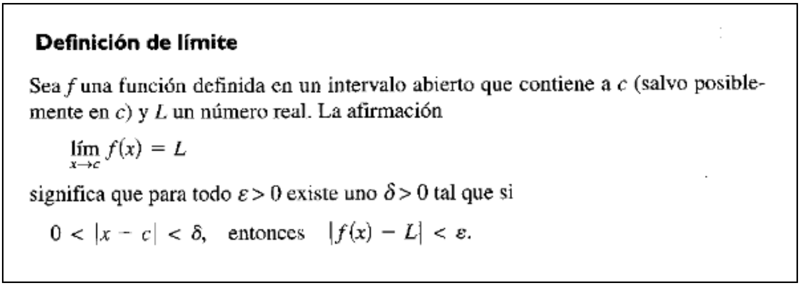
Prácticas Lingüísticas de los Matemáticos

Las prácticas lingüísticas de los matemáticos mezclan formalismo y lengua natural, y en el escrito, formalismo, lengua natural y símbolos de diversos órdenes. Los objetos matemáticos son abstractos, sus definiciones, sus propiedades, las pruebas de estas propiedades tienen una fuerte dimensión formal. Sin embargo, no se puede comunicar o pensar utilizando únicamente el formalismo (los matemáticos no son computadoras). Por otra parte, no es posible expresar sin ambigüedad las matemáticas utilizando únicamente la lengua natural. Esta constatación fue una de las que motivaron la refundación de las matemáticas (final del s. XIX y principios del s. XX) y la fundación de la lógica matemática moderna. En consecuencia, las prácticas lingüísticas de las matemáticas se apoyan en una mezcla cambiante de expresiones formalizadas (eventualmente en forma simbólica en el escrito, pero igualmente a través de un uso normado de la lengua) y las expresiones provenientes de la lengua común (ver los ejemplos propuestos más abajo). Reconstruir y reconocer los elementos de esta mezcla es complicado porque las fronteras son difusas, no explícitas, inestables (ellas dependen del locutor, pero también del auditorio, del contexto, del instante, etc.). Hay una coexistencia que corresponde a un juego fructuoso (a mantener, a entretener) entre pensamiento, intercambios, intuición, conjetura, exploración, elaboración de pruebas por un lado y rigor y formalismo por el otro lado.

Con el objetivo de describir y analizar los objetos matemáticos, las proposiciones relacionadas con estos objetos, las pruebas de estas proposiciones y la manera de expresar el conjunto, y de manera a garantizar el rigor de su trabajo, los matemáticos han desarrollado herramientas y formalismos, principalmente los de la lógica matemática. En los análisis que se presentan a continuación, se utiliza la lógica matemática de manera más limitada, como un referente para explicar de manera formal lo que se dice o escribe, no considerando la lengua natural, ya sea a nivel de la formulación de las definiciones o de las proposiciones, o a nivel de las pruebas. Esta aproximación resulta cercana a las propuestas por Viviane

Durand-Guerrier (ver por ejemplo Durand-Guerrier, 2007) o de Barrier (Blossier, Barrier, Durand-Guerrier 2009).

Uno de los ejemplos comunes de estas prácticas es el hecho de no decir (o escribir) todas las cuantificaciones. Así, en la frase “La propiedad distributiva establece que $a(b+c) = ab+ac$”, la cuantificación universal no está dicha, y se debe reintroducir por el lector: la propiedad que debe ser entendida es la siguiente: “$\forall a\ \forall b\ \forall c,\ a(b+c)=ab+ac$”. Asimismo, en la frase “Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c)=k$”: esta propiedad es verdadera para cualquier función f, y cualesquiera números a, b y k. Es un fenómeno muy estudiado: existe casi sistemáticamente una cuantificación universal asociada a las implicaciones (aquí introducida por “Si”), las cuales casi nunca son explicitadas. Por el contrario, la cuantificación relacionada a la variable c, sí es explícita “existe”. Este mismo fenómeno puede verse en el extracto siguiente:



Definición de límite

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe uno $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Figura 1. Definición del límite. (Tomada del capítulo 1 del libro Cálculo y Geometría Analítica de Larson (p. 60))

En la formulación de la definición (las dos últimas líneas después de “significa que”), las variables ε y δ están cuantificadas, pero no se precisa que la implicación (“si… entonces…”) es verdadera para cualquiera que sea x (la variable c no está cuantificada tampoco, pero tiene un estatus diferente: se presenta en la primera parte del texto, como L y f).

Otras formulaciones complejas podrían ser también analizadas: “La ecuación $ax = b = 0$ donde $a \neq 0$ tiene una solución” (“donde” marca la presencia de una cuantificación sobre a y b: “cualesquiera que sean a ($\neq 0$) y b”), “El número n que se escribe de la forma $2k+1$, donde k es entero, es impar" ("donde" marca la presencia de una cuantificación existencial: "existe k tal que $n= 2k$"). Sobre este punto, es posible reportar un equivalente de "donde" en francés "avec" (Hache, 2015).

Estas prácticas lingüísticas no son, en general, presentadas, explicitadas o analizadas; los matemáticos y los profesores, a pesar de tener una experiencia relativa a éstas, no tienen necesariamente consciencia de sus características ni de que pueden ser un objeto de estudio. Considerando todo lo que precede, la pregunta de investigación que emerge es ¿Cómo generar una UA de profesionalización docente en la modalidad online, para alinear la experiencia de los profesores relativa a las prácticas lingüísticas con la competencia que permite transformarlas en un objeto de estudio? Para abordarla, se realizó el estudio que se presenta a continuación.

El Estudio

La investigación desarrollada es de corte cualitativo y consiste en un estudio de caso (Rodríguez, Gil y García, 1999) del diseño y análisis de una UA implementada en el Prome. En este programa de profesionalización online se imparten, en los primeros tres semestres, 12 UA de tres tipos: teóricas, teórico-prácticas y seminarios. Las UA teóricas muestran elementos de teorías en Matemática Educativa, las UA teórico-prácticas presentan elementos teóricos de la Matemática Educativa y formas de ponerlos en práctica para innovar y regular la práctica docente. Los seminarios y el cuarto semestre están dedicados al trabajo de tesis. Cada UA tiene una duración de 4 o 5 semanas. En este contexto se diseñó una UA teórico-práctica centrada en el análisis y caracterización del rol del lenguaje en la actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es decir, en mostrar el lenguaje como objeto de estudio e impulsor de la enseñanza: la competencia.

Los participantes en la UA fueron 16 profesores, 11 de México, 4 de Uruguay y 1 de Paraguay, 5 de nivel universitario, 5 de bachillerato (15-18 años), 2 de secundaria (12-15 años), 4 de secundaria y bachillerato y 1 de bachillerato y formación de profesores. Los educadores fueron 3 investigadores en Matemática Educativa, 2 mexicanos y 1 francés.

Diseño de la UA Sobre el Lenguaje Como Objeto de Estudio y su Rol en la Enseñanza de las Matemáticas

El diseño de la UA siguió tres grandes fases, asociadas a cuatro actividades:

Fase 1. Reconocimiento del lenguaje como un objeto de estudio (Actividad 1).

Fase 2. Acercamiento a elementos teóricos y metodológicos que sustentan y posibilitan el estudio del lenguaje (Actividad 2 y 3).

Fase 3. Implementación y análisis de actividades que permiten trabajar el lenguaje en la clase de matemáticas (Actividad 4).

Las cuatro actividades se diseñaron siguiendo los principios de efectividad propuestos por Scott y Scott (2010), que guían la forma de proponer las actividades y las relaciones entre profesores y educadores en la modalidad online:

1. Tener una orientación de resolución de problemas;
2. Incorporar oportunidades para que los profesores trabajen juntos y con expertos;
3. Facilitar la exposición de innovaciones en conocimientos, prácticas de enseñanza y tecnologías de apoyo;
4. Permitir a los profesores probar nuevas estrategias y habilidades de enseñanza;
5. Promover la creación y el intercambio de recursos;
6. Permitir y posibilitar reflexiones y discusiones profundas.

La UA concebida e implementada tuvo una duración de 4 semanas y 80 horas de trabajo oficial de los profesores participantes.

Actividad 1. Análisis de libros de texto

En la Actividad 1 se solicitó a los profesores, basados en su experiencia, elegir un capítulo de un libro de texto utilizado en su práctica docente y realizar un primer análisis sobre la forma en que las variables (a, x, y, z…) son presentadas, introducidas y cuantificadas. Asimismo, se les solicitó especificar el tipo de lenguaje utilizado: lenguaje natural (cercano a la lengua castellana utilizada en la vida diaria), lenguaje matemático o más formal y lenguaje simbólico. Para ilustrarlos, se les proporcionó la tabla (ver Tabla 1) que aparece a continuación.

Tabla 1
Ejemplos de categorías para el análisis del lenguaje

Expresión en lenguaje natural	…	Expresión más formalizada	…	Expresión en forma simbólica
Un cuadrado siempre es positivo		Todo número real tiene un cuadrado positivo		$\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$
x puede ser mayor o igual a 2		Existe un *x*, tal que *x* es mayor o igual a 2		$\exists x\ x \geq 2$
La función *f* se anula entre 0 y 1		Existe *x* comprendida entre 0 y 1 tal que $f(x)=0$		$\exists x \in [0;1]\ f(x)=0$

En esta actividad, la consigna "analizar el rol de las variables (*a*, *x*, *y*, *z*…)" pone el énfasis en la variable como objeto de estudio, iniciando a los profesores en el estudio del lenguaje. Es decir, su experiencia resulta suficiente para reconocer diferentes tipos de lenguaje e iniciar un cuestionamiento sobre la claridad del lenguaje simbólico, el cual requiere de otros tipos de lenguaje para ser realmente inteligible.

Actividad 2. Lectura reflexiva de investigaciones en torno a cuestiones sobre el lenguaje

En esta actividad se les solicitó realizar en equipos de cuatro a cinco integrantes, la lectura de uno o dos artículos[1] de investigación (Barton, 2008; Cramer, 2013; Durand-Guerrier y Barrier, 2008; Moskovitch, 2007; Selden y Selden, 1995 y Sfard, 2000) en torno a cuestiones sobre la naturaleza del lenguaje y realizar una ficha de lectura. Para realizar la ficha, se propuso una guía que mostraba tres grandes líneas:

1. El principio del artículo. Quiénes son los autores, qué tipo de investigación se presenta, identificar los contenidos principales, los elementos teóricos explícitos, reconocer si se presenta una sola teoría o elementos de varias teorías, etc.
2. El resumen. Determinar qué parte resumir, todo o una parte del artículo, mostrar las elecciones hechas y explicitarlas, hacer un resumen objetivo (lo mejor posible, sin emitir juicios personales) elegir citas y referencias "importantes".

3. Crítica más subjetiva, síntesis y perspectivas. Legibilidad –se lee fácilmente o requiere de otras referencias-, fiabilidad –las ambiciones de los autores se cumplen, los aportes son coherentes, probados-, qué críticas pueden hacerse, qué preguntas quedan abiertas, qué retener finalmente.

Se puede notar que estos elementos son generales, orientan la lectura y la síntesis de un artículo. Pero, dado que el análisis solicitado tiene por objetivo que los profesores identifiquen la forma en que el lenguaje es analizado, las herramientas utilizadas y algunas de las implicaciones que éste tiene en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esta actividad posibilita el reconocimiento del lenguaje como objeto de estudio y por tanto de la competencia pretendida en esta UA. De la misma manera, esta actividad cumple con los principios 2 y 6 de Scott y Scott (2010), ya que requieren de una reflexión profunda sobre investigaciones realizadas en Matemática Educativa y la realización de la ficha en equipo implica interacciones de diferente nivel, la confrontación entre cada profesor y lo que los autores comunican, así como entre los profesores que forman el equipo.

Actividad 3. Segundo análisis del lenguaje en un capítulo del libro de texto

Esta actividad, aunque similar a la Actividad 1, es más específica, se proporcionan cuatro capítulos de libro de texto: 1) el lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado, 2) funciones racionales, 3) sucesiones y 4) límites y sus propiedades. Estos capítulos fueron proporcionados por cuatro profesores en la Actividad 1 y elegidos por los educadores, considerando que los temas matemáticos abordados eran de diferente nivel y que el uso del lenguaje era distinto, los dos primeros capítulos son más cercanos al lenguaje natural y en los dos segundos al lenguaje formal o simbólico. Así, en esta Actividad se pidió elegir tres enunciados de cualquiera de los cuatro capítulos y analizar cuantificaciones y relaciones lógicas implícitas, especificando:

1. El enunciado: es la parte del libro de texto que se elige para ser analizada.

2. Cuantificaciones: en esta categoría se debe evidenciar la referencia a una cuantificación universal o a una cuantificación existencial y de qué manera se hace.
3. Implícitos: en esta categoría se deben hacer evidentes las formulaciones lógicas que aparecen de manera implícita en un enunciado.

Para ilustrarlo, se presentaron los ejemplos siguientes:

Tabla 2

Análisis de cuantificadores e implícitos en enunciados matemáticos

Enunciado	Cuantificaciones	Implícitos Formulaciones lógicas
Si n es un entero impar, se escribe de la forma $n = 2k+1$ donde k es entero	Universal ($\forall n \in \mathbb{Z}$) Existencial ($\exists k \in \mathbb{Z}$)	$\forall n \in \mathbb{Z}$ (n es impar $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ $n = 2k+1$)
Si n se escribe de la forma $n = 2k+1$ donde k es entero, entonces n es un entero impar	Universal ($\forall n \in \mathbb{Z}$) Existencial ($\exists k \in \mathbb{Z}$)	$\forall n \in \mathbb{Z}$ [($\exists k \in \mathbb{Z}$ $n = 2k+1$) $\Rightarrow$ n es impar]
Los enteros impares son los números que se escriben de la forma $2k+1$ donde k es entero	Existencial ($\exists k \in \mathbb{Z}$) Universal ($\forall n \in \mathbb{Z}$ y $\forall n \in I$)	$I = \{n \in \mathbb{Z}$ t.q. $\exists k \in \mathbb{Z}$ $n = 2k+1\}$ (I denota el conjunto de los números impares) $\forall k \in \mathbb{Z}$ $2k+1 \in I$ $\forall n \in I$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ $n = 2k+1$

Asimismo, se especificó lo siguiente:

> Para elegir los enunciados que serán analizados les proponemos considerar aquellos que tienen variables (a, x, y, z…) de manera explícita, así como identificar el rol de palabras como “donde”, “para” “los…son”, ya que éstas pueden guiarlos a identificar las cuantificaciones y los implícitos.

En esta actividad se pretendió que se generara la alineación entre la experiencia de los profesores relativas a las prácticas lingüísticas, más particularmente a los lenguajes que son utilizados en la propuesta de enseñanza de un libro de texto de matemáticas y el análisis del rol de los diferentes lenguajes utilizados. Los profesores son confrontados a analizar y a reconocer en particular que las cuantificaciones y las relaciones lógicas no son explícitas, lo que tiene implicaciones en el aprendizaje de las matemáticas.

Actividad 4. Implementación de actividades: narración de investigación y figura telefoneada

En la Actividad 4 se propuso un cambio de mirada, de los libros de texto hacia la clase de matemáticas. Se consideró que no era necesario analizar con los estudiantes las prácticas lingüísticas de las matemáticas explícitamente como se hizo con los profesores (Actividades 1, 2 y 3). Por el contrario, era importante entenderlas tal y como son, dejarlas vivir, solicitar y trabajar los modos de expresión intermediarios entre lengua natural y lenguaje matemático formal. También era importante proponer a los estudiantes momentos de discusión sobre la manera de expresar las matemáticas: las dificultades encontradas, las expresiones ambiguas, la importancia de las definiciones, etc. Así esta actividad pretendió, en su diseño, generar una alineación entre la experiencia de los profesores relativa a ciertas prácticas lingüísticas y la competencia, a reconocerlas como un objeto de estudio y a analizarlas considerando producciones de los estudiantes, tanto de manera individual como colectiva. Para obtener producciones de los estudiantes que permitieran el análisis antes mencionado, se propusieron dos actividades, narración de investigación y figura telefoneada, las cuales se presentan a continuación.

La narración de investigación y la figura telefoneada tienen por objetivo motivar el uso de diferentes modos de expresión. Las figuras telefoneadas permiten asimismo mostrar a los estudiantes la necesidad de disponer de un lenguaje matemático preciso -formal-. La narración de investigación consiste en pedir a los estudiantes que narren o describan la forma en que realizan una tarea matemática. Para ello, se les ofrecen instrucciones precisas y se enfatiza que lo importante no es mostrar una solución correcta, sino la manera de buscarla y encontrarla (ver figura 2). Por lo que se recomienda utilizar un vocabulario matemático que facilite el desarrollo de la tarea.

Narración de investigación

La solución del problema que les proponemos no es fácil de encontrar. El objetivo de este trabajo es por supuesto el de encontrar la solución, pero sobre todo de **buscarla.** Ustedes pueden intentar todos los métodos que les aparezcan en la mente. Luego, habrá que explicar por escrito todos los detalles de sus búsquedas, de sus ideas, incluso si éstas no dan buenos resultados (habrá entonces que explicar por qué no funcionan).

La investigación durará dos horas. Ustedes trabajarán en grupos de tres estudiantes.

Esta semana, ustedes van a tener como objetivo escribir un borrador de todo lo que ustedes hagan, sus ideas, las ideas del grupo. Ustedes pueden discutir, utilizar las ideas de los otros, intentar métodos que al final no funcionen: todo está permitido. Lo que es importante, es escribir todo lo que pase en el grupo y en su mente. Los borradores y el enunciado del problema serán recogidos por el profesor al final de la hora.

En la segunda sesión, se les entregarán los borradores y los enunciados. Ustedes podrán continuar la búsqueda si ustedes lo desean, luego ustedes redactarán en limpio todo lo que ustedes hayan escrito en su borrador. Cada estudiante deberá entregar su trabajo en limpio.

Los trabajos serán evaluados, pero de manera muy distinta a la acostumbrada. Lo más importante no será haber encontrado la respuesta justa, sino haber escrito lo más detalladamente posible su búsqueda/investigación.

Es necesario:

- Contar con precisión todos sus intentos, incluso éstos que no llevaron a la solución;
- Contar las interacciones con los otros estudiantes, lo que ellos aportaron;
- Señalar cuando ustedes cambiaron de pista (por ejemplo, utilizando otro color de pluma o lapicero);
- Reproducir los dibujos que ustedes hicieron en el borrador;
- Y, por supuesto, hacer un esfuerzo para ser comprendidos por aquel que va a leer su trabajo.

Figura 2. Instrucciones para que los estudiantes realicen la narración de investigación

La figura telefoneada por su parte consiste en trabajar al menos con dos estudiantes, a uno se le entrega el dibujo de una figura geométrica y se le pide que genere las instrucciones para que otro estudiante que no la vea, pueda dibujarla. Esta tarea requiere que el estudiante que escriba las instrucciones sea capaz de expresar los elementos de la figura geométrica con precisión (formalmente) así como elementos que faciliten su construcción. Ambas actividades deben ser desarrolladas de manera colaborativa por los estudiantes.

Se propusieron 10 tareas de narración de investigación (5 para estudiantes de 13 a 15 años y 5 para estudiantes de 15 a 18 años, ver Anexo 1, y 4 figuras telefoneadas, ver Anexo 2). Se les pidió a los profesores que implementaran al menos dos tareas de narración, para que pudieran analizar las narraciones en relación con la tarea propuesta y una figura telefoneada. Asimismo, se les pidió que hicieran un reporte de las implementaciones hechas con estudiantes, siguiendo esta pauta:

1. Introducción: breve texto que indique lo que se encontrará en el reporte;

2. Condiciones de implementación: especificar si la tarea se implementó en una clase "normal" o si fue con un grupo de estudiantes voluntarios, indicar el nivel de estudio de los estudiantes, las indicaciones y el tiempo dado para realizar la actividad;
3. Impresiones de los estudiantes: describir de manera general cómo los estudiantes realizaron la actividad, ¿fue fácil para ellos? ¿Cómo se les motivó?, etc.;
4. Análisis de la implementación: presentar la forma en que los estudiantes realizaron las actividades, elegir las realizaciones que llamaron más su atención, presentar las reflexiones que éstas les provocaron y una reflexión general de la implementación hecha;
5. Enviar escaneadas las respuestas de los estudiantes;

Una vez hecha la experimentación debían colocar las producciones de sus estudiantes en un foro, que se organizó en equipos de cuatro integrantes, cada uno de los profesores debía revisar las producciones de los estudiantes de otros tres profesores e intercambiar preguntas, reflexiones y hacer comentarios. Las tareas de narración de investigación y de figura telefoneada ofrecen sin duda una herramienta importante para reconocer la actividad de los estudiantes y la manera en que ésta puede ser modificada. Sin ser un objetivo primario, los profesores pueden generar otras tareas y solicitar la narración de investigación como un elemento clave para trabajar el lenguaje en la clase de matemáticas. Así, esta actividad sea quizá la de mayor riqueza de la UA, pues se asocia a los principios 2, 4 y 5, propuestos en Scott y Scott (2010). El foro posibilita un trabajo en equipo y sobre todo el intercambio de reflexiones en torno a la implementación de las mismas tareas, pero en diversos contextos de enseñanza. Asimismo, este foro posibilita procesos de alineación, pues para explicar lo realizado por los estudiantes muchas de las veces los profesores recurren primeramente a su experiencia, dando oportunidad a los educadores de alinearla a partir de la competencia, dentro de un espacio común o colectivo.

Para analizar la implementación de la UA se analizaron procesos de alineación entre competencia y experiencia, en las actividades 3 y 4, ya que según el diseño de la UA son las actividades que posibilitan dichos procesos. Se realizó un primer análisis de las producciones de los 16 profesores, por cada uno de los investigadores y luego se hizo un segundo análisis de manera conjunta. Asimismo, se diseñó un cuestionario de 7 preguntas abiertas para indagar sobre el impacto de la UA.

Ejemplos de Alineación: Análisis de las Producciones de las Actividades 3 y 4 de la UA

En esta sección se muestran algunos ejemplos de alineación, ya que los profesores adoptaron herramientas de análisis y de reflexión sobre sus prácticas lingüísticas, considerando extractos de libros de texto e implementando en sus clases actividades de narración de investigación y de figura telefoneada, siendo capaces de generar un primer análisis del trabajo de los estudiantes.

Análisis del Lenguaje en los Libros de Texto: Cuantificaciones Implícitas y Palabras Polisémicas

El objetivo de la Actividad 3 fue utilizar ciertas herramientas de análisis, la competencia. Los profesores identificaron en los libros de texto elegidos y que están asociados a su experiencia, ciertas formulaciones que merecen efectivamente ser distinguidas. Los análisis que produjeron, en general, son pertinentes y muestran una alineación. Las cuestiones relacionadas con las cuantificaciones y el hecho de que éstas, muchas de las veces aparecen de manera implícita en las formulaciones de frases matemáticas, han sido identificadas por los profesores (productos notables, definiciones del límite de una sucesión de una función, cuantificación de las implicaciones, etc.) Para ilustrarlo, se presentan a continuación algunos ejemplos de los análisis realizados por los profesores en la Actividad 3:

Cuantificaciones

El ejemplo del profesor Alejandro, quien identifica un pasaje del libro de texto en relación con las cuantificaciones, criticándolo: este libro dice a propósito de la definición de límite de función que “la frase "f (x) se acerca arbitrariamente a L" significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ […]. Análogamente, la frase "x tiende a c" significa que existe un número positivo δ tal que […] $0< |x- c| < \delta$” lo que es inexacto: aunque haya una relación, no se puede dar sentido a las frases “$f(x)$ se acerca arbitrariamente a *L"* y "*x* tiende a *c*" independientemente una de la otra e independientemente de la cuantificación sobre *ε*.

La noción de límite es comúnmente identificada como una fuente de dificultad potencial. Ya hemos citado aquí las cuantificaciones múltiples de la definición, el profesor Gustavo señala también el hecho de que la frase "*Sean una función polinómica p(x) y c un número real. Entonces* $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$", afirma al mismo tiempo una igualdad (el límite de *p* en *c* es *p*(c)), pero también de manera comúnmente menos explícita, una existencia (*p* tiene un límite en *c*).

La profesora Karla señala la dificultad para desmenuzar las cuantificaciones para una propiedad utilizando una negación. Por ejemplo, para utilizar la propiedad "*Los números irracionales son los que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros*" es necesario comprender que se hace referencia a una cuantificación del tipo "cualquiera que sea el número irracional *a* y cualesquiera que sean los enteros *b* y *c*, siempre tendremos $a \neq b/c$". Estos ejemplos permiten ilustrar que los profesores identifican implícitos en las formulaciones matemáticas y que, a partir de su experiencia y de la competencia puesta a disposición en esta UA, han iniciado el estudio de las prácticas lingüísticas.

La Polisemia de la Palabra "un"

Los profesores distinguen la polisemia de la palabra "un", que algunas veces efectivamente hace referencia a una cantidad (1), pero otras veces es utilizada para indicar una cuantificación universal (todos): "*La suma de los infinitos términos de* ***una*** *progresión geométrica en la que* $|r| < 1$ *se obtiene así...*", "El término general a_n de **una** progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es *d* se obtiene así $a_n = a_1 + (n-1)d$", "*En* ***una*** *progresión aritmética, las diferencias entre dos términos consecutivos cualesquiera, coinciden*".

Los profesores tienen experiencia en el tratamiento de cuantificaciones, de definiciones y de propiedades, pero no en el análisis de los diferentes modos de expresión utilizados, ni tampoco en identificar los implícitos que aparecen y sus posibles consecuencias. Estos ejemplos del trabajo de los profesores muestran, que ellos logran identificar implícitos, lo que los lleva a reconocer la complejidad que enfrentan los estudiantes al aprender una noción. Es decir, el lenguaje formal no tiene la claridad que se "presume" y menos para los estudiantes que se encuentran por primera vez con una noción. Asimismo, esta actividad permite a los profesores reconocer que el análisis de las variables (*a*, *b*, *c*, …) y de los cuantificadores les posibilita anticipar dificultades en el aprendizaje e idear posibles maneras de superarlas.

Implementación y Primer Análisis de la Narración de Investigación y de la Figura Telefoneada con Estudiantes

La Actividad 4 proponía conocer otra arista sobre la problemática del lenguaje en la clase de matemáticas. Las actividades propuestas posibilitaban que los estudiantes produjeran "escritos intermediarios", entre formulaciones usuales y las exigencias del formalismo. La "narración de investigación" trata de que los estudiantes entren en el escrito en matemáticas a través del relato. La atención está centrada en la investigación misma (escuchar, confrontar, experimentar, razonar, equivocarse, retomar…). La experiencia de los profesores relativa a las prácticas lingüísticas se ve alineada puesto que las producciones de los estudiantes obligan a analizar, más allá de la respuesta a una tarea matemática, los modos de expresión y sus implicaciones. Las conclusiones de los profesores de estas actividades muestran elementos de la alineación producida, por ejemplo, Juan señala:

> El trabajo realizado me ha hecho reflexionar sobre la importancia del lenguaje para entender y facilitar el aprendizaje de las matemáticas, de igual forma, considero que el resolver problemas matemáticos puede contribuir en los estudiantes a mejorar su forma de expresarse y comunicarse, ya que la coherencia y lógica empleadas en los procedimientos y pasos para solucionar un problema de matemáticas, también pueden dar coherencia y orden a las ideas que comunicamos. (Reporte de la Actividad 4, p.4)

Por su parte, el profesor Sergio en su análisis señala como posible causa de que los estudiantes muestran pocos errores en la narración de investigación de la tarea "La escalera" (figura 3), la forma de presentar la matemática en los libros de texto y en el aula, lo que está íntimamente relacionado con el lenguaje (ver figura 4). De alguna manera, cuestiona su propia forma de presentar la matemática y en este sentido es posible percibir que su experiencia está alineada.

La escalera

Para subir una escalera, se puede saltar un escalón si uno lo desea (se dan pasos de uno o dos escalones). He aquí todas las diferentes formas de subir tres escalones de una escalera.

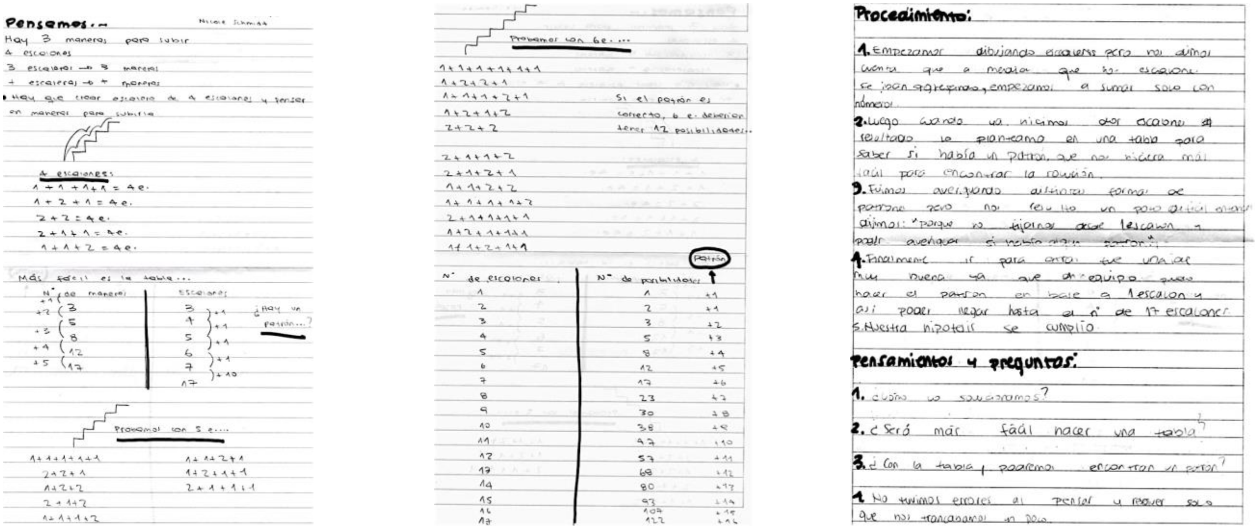
Cuántas maneras diferentes hay para subir:
¿4 escalones de una escalera?
¿5 escalones de una escalera?

Figura 3. Tarea de narración de investigación, “La escalera”

Por otra parte, las “figuras telefoneadas”, tareas que consisten en dar una figura geométrica a cada alumno (alumno A), y pedirle que escriba una sucesión de instrucciones permitiendo a otro alumno (alumno B) reconstruir la figura. El alumno B puede regresarle la figura que él construyó y acompañarla de preguntas u observaciones sobre las instrucciones recibidas. En función de la organización elegida es posible que el alumno A corrija sus instrucciones. La conclusión de Luisa fue:

> Con este análisis enseguida me permite mirar las competencias, considero que para analizar y valorar el lenguaje del alumno debemos tener claro lo que tenemos como objetivo en estas actividades, dichos objetivos se basaron en revisar si el alumno expresa correctamente las matemáticas, los códigos y yo agregaría mirar y leer cómo el alumno escribe matemáticas. (Reporte de Actividad 4, p. 7)

Este tipo de producciones permite un trabajo con los estudiantes sobre la necesidad del formalismo matemático, contrariamente a la narración de



Comentario de el Profesor Sergio (actividad 4, p. 9): “Encontramos que son pocas las ocasiones en que aparecen argumentos erróneos o poco relevantes respecto a los caminos que finalmente conducen a la solución de cada problema.
Una posible explicación que encontramos a lo anterior tiene que ver con la forma en que habitualmente la matemática está presentada en los libros de texto, o incluso en el aula misma. Un tratamiento lineal, sin idas y vueltas, cuyos argumentos siempre desembocan en la respuesta correcta de la actividad propuesta”

Figura 4. Ejemplo de producciones de los alumnos (Secundaria de Uruguay, 13-15 años) investigación, donde más bien se muestran los diferentes modos de expresión que son parte de la actividad matemática. La descripción de una figura geométrica en lengua natural contiene muchos implícitos y muchas imprecisiones. Este punto puede ser discutido con los estudiantes. Es posible notar en el texto del alumno A como él intenta identificar puntos de referencia “el punto de partida el centro”, pero la falta de un lenguaje formal hace que le sea difícil precisar los trazos siguientes “hacia los 2 vértices del lado derecho y de la parte de arriba”. Esta actividad puede ser una herramienta para el profesor, para mostrar y trabajar el vocabulario matemático y las definiciones. Por otra parte, es sabido que es importante en el aprendizaje de la expresión que un texto escrito sea leído y por tanto comprendido por un par y no solamente por el profesor con el objetivo de ser evaluado.

Texto del alumno A Respuesta B1 Respuesta B2

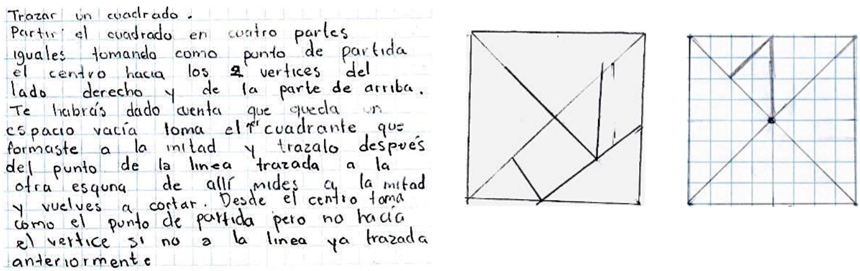

Trazar un cuadrado.
Partir el cuadrado en cuatro partes iguales tomando como punto de partida el centro hacia los 2 vertices del lado derecho y de la parte de arriba.
Te habrás dado cuenta que queda un espacio vacía toma el 1° cuadrante que formaste a la mitad y trazalo después del punto de la linea trazada a la otra esquna de allí mides a la mitad y vuelves a cortar. Desde el centro toma como el punto de partida pero no hacia el vertice si no a la linea ya trazada anteriormente

Figura 5. Ejemplo de producción de alumnos (Bachillerato del sur de México, Oaxaca, edades entre 16 y 18 años)

Por último, mostramos a continuación dos participaciones del foro de la actividad 4 y en el cual cada equipo de profesores compartió su implementación y sus reflexiones sobre ésta. En este foro es posible ver que la experiencia de los profesores es utilizada para analizar las producciones de los estudiantes y alineada por los educadores. Para ilustrar lo anterior, se muestra la participación de la profesora Karla, quien responde a un comentario de la educadora (Avenilde), utilizando la cita de un artículo para explicar lo que inicialmente había considerado de manera subjetiva (experiencia). Por su parte el profesor Ángel señala cómo elementos de las lecturas de la actividad 2 (competencia) le permiten dar cuenta de que el uso de un lenguaje matemático no asegura una actividad matemática correcta. Es decir, el uso de un lenguaje no formal puede permitir el desarrollo de cierta actividad matemática.

> La Profesora Avenilde comentó en mi trabajo que qué se entiende por bien o mejor narrado y bueno, creo que aquí mi respuesta es un poco subjetiva porque yo soy la que está determinando si está bien narrada o no. Los elementos que estoy considerando es el tipo de lenguaje que usa, no sólo el lenguaje común si no también el matemático, los dibujos que realiza y la secuencia lógica con que lo hace. En el artículo que leímos mencionaron: *La comprensión y el aprendizaje de las matemáticas se ve generalmente como una construcción mental individual y el desembalaje, la construcción de marcos de prueba y validación son mejor vistas como habilidades mentales, porque no son realmente parte de la comprensión conceptual o el aprendizaje, en sí pero son esenciales para para la práctica de matemáticas avanzadas.*
>
> Lo que considero es que mis alumnos no tienen desarrolladas estas habilidades mentales y eso podría hacer parecer que no tienen los conocimientos suficientes aunque sí los tengan.

Figura 6. Participación de la profesora Karla en el foro

> Hola a todos.
>
> Quisiera empezar describiéndoles mis expectativas sobre este trabajo. Inicialmente tenía deseos de constrastar algunas de las ideas que me dejaron las lecturas de la actividad 2 con la realidad de mis estudiantes, principalmente lo relativo al uso de las implicaciones lógicas en los trabajos de los estudiantes. Es por ello que mi reporte se enfoca en analizar los puntos en que los estudiantes mostraban el uso de las implicaciones para resolver los problemas.
>
> Añado que me sorprendió bastante observar cómo algunos estudiantes hacen intentos por estructurar su trabajo de manera formal y usando lenguaje matemático, aunque eso no garantizó la solución del problema (esto coíncide en cierta forma con lo que comentaba Durand-Gurrier), por otro lado, los alumnos que no se preocupaban por estructurar su respuesta de manera formal y matemática, obtuvieron mejores resultado!!!!

Figura 7. Participación del profesor Ángel en el foro

Este foro permitió así evidenciar procesos de alineación y cómo las actividades anteriores tienen una relación sólida entre ellas, lo que posibilita dichos procesos.

Cuestionarios, un Elemento para Analizar los Aportes de la UA a las Prácticas de los Profesores

Con el objetivo de evaluar los alcances y limitantes de esta UA de acuerdo a la experiencia de los profesores, se les envió un cuestionario, ocho meses después de la implementación de la UA (durante el siguiente año universitario). Esto ya que era de nuestro interés conocer de mejor manera los aportes a su práctica docente, más allá de las alineaciones producidas en la inmediatez de la UA, se trataba de obtener respuestas más honestas sin tener la presión de la calificación de la UA. El cuestionario estaba conformado por 7 preguntas, en las primeras dos se pedía señalar si habían implementado actividades de narración de investigación y figuras telefoneadas en sus clases, así como las razones subyacentes a esta acción. Con las preguntas 3 y 4 se pretendía indagar sobre su punto de vista en relación con estas actividades y lo que éstas aportaban. La pregunta 5 estaba centrada en el rol que ellos asumen tiene el lenguaje en sus clases de matemáticas, mientras que la pregunta 6 estaba dedicada a los aportes de la UA. En la pregunta 7 se solicitaba que indicaran las preguntas que consideran quedan abiertas en torno al rol del lenguaje en la enseñanza de las matemáticas.

Un primer análisis de los cuestionarios respondidos permite señalar que los profesores evaluaron positivamente la UA. Varios profesores señalaron que uno de los aportes de la UA fue dar lugar a diferentes modos de expresión en la clase de matemáticas, sin la predominancia del formalismo. Asimismo, algunos profesores señalan que esta UA les animó a implementar actividades del tipo narración de investigación, para poder conocer más allá de cómo el lenguaje es utilizado, la forma en que los estudiantes realizan una tarea matemática y el pensamiento asociado. Esto, sin dejar de señalar que es muy difícil convencer a los estudiantes de dejar por escrito las ideas y los caminos que no condujeron a la solución de la tarea. De manera más importante, es posible señalar que esta UA y las alineaciones producidas, permitieron a los profesores cuestionar el rol predominante del lenguaje formal -simbólico- en la clase de matemáticas y de los equilibrios que deben ser producidos con otros modos de expresión. Esto lleva a considerar que el lenguaje es estimado como un objeto de estudio y que responder a estos cuestionamientos no puede hacerse basados únicamente en la experiencia relativa a las prácticas lingüísticas ni atendiendo a las restricciones institucionales que imponen cierto lenguaje como único.

Se muestran aquí algunas de las contribuciones en las que los profesores enfatizan el hecho de que la problemática del lenguaje se ha abierto y está viva:

> […] ha sido el incorporar al trabajo matemático de mis clases las producciones de los alumnos en un lenguaje no simbólico, lo cual los motiva y alienta mucho. (Profesora María)
>
> […] qué vínculo puede existir entre el desarrollo de un lenguaje matemático no formal y uno formal en la clase de matemáticas. Es

> decir ¿uno favorece al otro? Si es así ¿cuál favorece a cuál? Como consecuencia de ello ¿qué hacemos los profesores al respecto? Me refiero a qué hacemos cuando trabajamos con alumnos de cualquier nivel y especialmente cuando los alumnos son futuros profesores de matemática. En el medio en que trabajo está bastante mal vista la utilización de un lenguaje no formal por sobre la utilización del formal. ¿Favorece la formación de un profesor de matemáticas el privilegiar el trabajo del lenguaje formal por sobre el informal? Mi respuesta intuitiva o mi hipótesis en este momento es que ambos deberían ser sopesados y trabajados equilibradamente. Pero para tener algún tipo de respuesta más seria me parece que antes debería investigar mucho. (Profesora Marina)
>
> En relación a la problemática del lenguaje matemático, creo que sigue vigente una discusión, al menos desde mi perspectiva, que tiene que ver con el nivel de formalismo que deberíamos exigirle a nuestros estudiantes. Esto es, hasta qué punto el uso del simbolismo matemático contribuye a que los estudiantes comprendan, más y mejor, los conceptos matemáticos. (Profesor Santiago)

Conclusiones y Reflexiones Finales

Nos parece que esta UA ha logrado sensibilizar a los profesores sobre el rol del lenguaje en la actividad matemática, a través de una iniciación técnica y apoyada en la lógica matemática (la competencia). Los profesores parecen haberse apropiado de la problemática relativa al lenguaje, de los diferentes modos de expresión y de los implícitos. Esto ha permitido una reflexión más amplia sobre las dificultades de los estudiantes, relacionadas a las prácticas lingüísticas en la clase de matemáticas, así como la implementación de actividades en la clase sobre estas cuestiones. Como se detalló anteriormente, la propuesta de formación se basa en un juego entre las dimensiones individuales y colectivas (entre pares) la reflexión, por un lado, y la dialéctica entre experiencia y competencia (Wenger, 2001), por otro. Lo que se puede esquematizar de la manera representada en la figura 8.

Numerosas preguntas podrían ayudar a profundizar la reflexión: ¿cuáles prácticas lingüísticas tienen los profesores de matemáticas? ¿Cómo utilizan los diferentes modos de expresión en sus clases, tanto de manera oral como escrita? ¿Qué modos de expresión son privilegiados en la clase de

matemáticas? ¿Cómo les profesores de matemáticas esquivan las dificultades asociadas a explicar el formalismo matemático?
Otras cuestiones sobre el lenguaje, pero en relación al trabajo con los estudiantes son las siguientes: ¿qué actividades más allá de las aquí presentadas, permiten entender la complejidad de las prácticas lingüísticas de los matemáticos? ¿Qué actividades pueden ser propuestas para enseñar a los estudiantes a comprender el formalismo matemático, así como la manera de expresarlo oralmente?

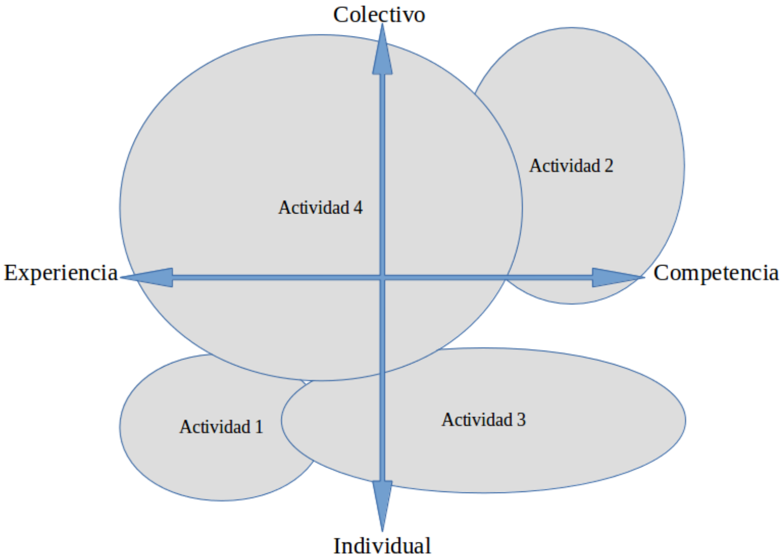


Figura 8. Esquema en el que se muestran las dimensiones en relación a las actividades diseñadas

Estas cuestiones muestran la complejidad asociada al estudio del lenguaje y la gran necesidad de seguir investigando y buscando maneras para trabajar con los profesores de matemáticas y poder seguir aportando en esta dirección.

Notas

[1] Un artículo fue asignado a los equipos 1 y 2, Selden y Selden, 1995 y Sfard 2000, respectivamente y dos artículos a los equipos 3 y 4, Barton 2008 y Durand-Guerrier y Barrier 2008 y Cramer 2013 y Moskovitch 2007, respectivamente. Esto fue considerando el tamaño y densidad de dichos artículos.

Referencias

Barton, B. (2008). Quantity: Trapping numbers in grammatical nets. En Bishop, A. (Ed.). *The Language of Mathematics: Telling Mathematical Tales*. *1*, 41-53. New York: Springer.

Bronckart, J.P. (2008). Actividad lingüística y construcción de conocimientos. *Lectura y vida*. *29*(2), 6-19. Disponible en: http://www.lecturayvida.fahce.unlp.edu.ar/numeros/a29n2/29_02_Bronckart.pdf

Blossier T., Barrier T., Durand-Guerrier V. (2009). Proof and quantification, *ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. *I*, 83-88. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Cramer, J. C. (2013). Possible language barriers in processes of mathematical reasoning. En Ubuz, B., Haser, Ç. y Marioti, M. A. (Eds.). *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *1*, 116-125. Ankara: Middle East Technical University.

Durand-Guerrier V. (2007), Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics 53*(1), 5-34. doi: 10.1023/A:1024661004375

Durand-Guerrier, V., y Barrier, T. (2008). Interactions between Philosophy and Didactic of Mathematics. The case of logic, language and reasoning. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*. Recuperado de: http://dg.icme11.org/document/get/33

Hache, C. (2015). Practiques langagières des mathématiques, un étude de cas avec “avec”. *Petit x*, *97*, 27-43.

Larson, R. E. H., Robert, P., Edwars, B. H., y Abellanas-Rapún, L. (1999). *Cálculo y Geometría Analítica*. México: McGraw-Hill

Moskovitch, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 24-30.
Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.
Scott, D. & Scott, S. (2010). Innovations in the Use of Technology and Teacher Professional Development. In J. O. Lindberg & A.D. Olofsson (Eds.), *Online Learning Communities and Teacher Professional Development: Methods for Improved Education Delivery* (pp.169-189). Hershey, New York: Information Science Reference.
Selden, J. y Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151. doi: 10.1007/BF01274210
Sfard, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse, Mathematical Thinking and Learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 157-189. doi: 10.1207/S15327833MTL0203_1
Sztajn, P., Wilson, P. H., Edgington, C., Myers, M. (2014). Mathematics professional development as design for boundary encounters. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *46*(2), 201-212. doi: 10.1007/s11858-013-0560-0
Wenger, E. (1998/2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad* (Genis Sánchez Barberán, trad.). Barcelona: Paidós. (Reimpreso de Communities of practice. Learning, meaning, and identity, 1998, Cambridge, Reino Unido: The Press Syndicate of the University of Cambridge).
Wenger, E. (2010). Communities of practice and social learning systems: the career of a concept. In Chris Blackmore (Ed.), *Social Learning Systems and Communities of Practice* (pp. 179-199). New York, USA: Springer.

Avenilde Romo Vázquez es profesora investigadora en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Centro de Investigación en Ciencia y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), México.

Christophe Hache es profesor-investigador de educación matemática de la Université París Diderot, Francia.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal**: CICAA-IPN, Legaria 694, Col. Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, Ciudad de México, C.P. 11500.
Email: aromov@ipn.mx