LA MODELACIÓN EN LAS ESCUELAS DE INGENIERÍA, UNA SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE EL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Ernesto Bosquez, Javier Lezama, Avenilde Romo.
Instituto Tecnológico de Toluca, Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Resumen
En este artículo se presenta una secuencia didáctica del teorema de convolución, fundamentada en la aproximación socioepistemológica. Esta secuencia se basa en un estudio tanto epistemológico como didáctico y considera como contexto de modelación el Control Automático (Disciplina Intermediaria). Dicha secuencia está dirigida a estudiantes de ingeniería en electrónica y en electromecánica. El objetivo de esta secuencia es que los estudiantes de ingeniería puedan construir un sentido del teorema de convolución a partir de su uso. En la secuencia aparecen modelos físicos, matemáticos y de ingeniería así como actividades de simulación basados en los softwares, Or Cad y Matlab.
Palabras clave: *Teorema de Convolución, modelación, disciplina intermediaria, socioepistemologia*

Introducción
El diseño de la secuencia didáctica que se propone a continuación es resultado de un estudio realizado en el marco de la aproximación socioepistemológica (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006) la cuál nos permitió investigar mediante las componentes; Didáctica, Cognitiva, Epistemología y Socio Cultural, el problema de la enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. Desde la perspectiva didáctica, hemos identificado en las prácticas de enseñanza convencionales, dos enfoques, uno con tendencia formalista y otra con tendencia algorítmica (Bosquez, Lezama 2009) en ambas prácticas los estudiantes encuentran gran dificultad para darle sentido al uso del teorema ya que no se les provee de recursos que permitan construir significado al contenido del teorema, esto nos llevó a cuestionar cómo el teorema de convolución es enseñado en las escuelas de ingeniería y las mismas propuestas de los libros de texto que fueron revisados (Zill, 2009). Desde la perspectiva cognitiva, podemos afirmar que los estudiantes no identifican la relevancia del teorema, hacen uso de él sin identificar sus elementos y reduciéndolo a una función exclusivamente operatoria. Desde la perspectiva epistemológica, pudimos observar que la naturaleza del teorema y su complejidad, como lo muestra el análisis de los trabajos de Mellin (1896), nos indican que los caminos de construcción como objeto matemático en el ambiente escolar es rebasado por el conocimiento anteriro necesario para construirlo en la disciplina matemática. Así mismo, identificamos en el discurso matemático escolar, una desarticulación entre la matemática escolar con la ingeniería que estudian, es decir, con la disciplina intermediaria (Ciencias del Ingeniero), así como las prácticas que les son características.
Las matemáticas no son vistas dentro del paradigma de matemáticas como disciplina de servicio, el cual aparece en el estudio ICMI 3 “Mathematics as a service subset”, en cuya introducciones afirma: “The teaching of mathematics to students of other disciplines must now be accepted as a fact, a social need and, also, a relatively new problematic issue” (Howsonet al. 1988. p.1).

En este mismo estudio, Pollack (1988) evidencia dos tipos de necesidades matemáticas en la práctica de ingenieros:

Elementary needs: "the ability to set up the right problem, to have a good idea how big the answer should be, and to get the right answer by any available means whatsoever-mentally, calculator, paper-and-pencil, computer whatever "(Ibid. p. 31).

Advances needs: "we needs employees who know that there is a large variety of forms of mathematical thinking, and what these various forms can do".

La pregunta que emerge es: ¿cómo lograr que desde la enseñanza de las matemáticas estas necesidades sean tomadas en cuenta?

La secuencia didáctica que se presenta en este artículo permite integrar, a elementos de la disciplina matemática con elementos de la disciplina intermediaria así como elementos de la práctica misma, rompiendo con el paradigma convencional de enseñanza. La necesidad de relacionar a la disciplina intermediaria, teoría del control, con la matemática y la práctica, nos permitieron diseñar partes de la secuencia didáctica.

El fundamento principal de haber elegido los conocimientos de la disciplina intermediaria es que la epistemología del teorema de convolución, nos muestra que, su génesis es de naturaleza matemática, por lo que adoptar esta génesis en la enseñanza es altamente complejo o mejor dicho, imposible. La disciplina intermediaria hace uso del teorema de convolución y lo dota de un significado propio, la validación matemática puede vivir de manera implícita, pero otras validaciones entran en juego para darle validez y sentido en este contexto.

El sentido de significado que adoptaremos es el que propone Ludwig Wittgenstein, quién en lugar de considerar el significado de conceptos o declaraciones en términos del *Sinn* y *Bedeutung* (Freg sugiere que el *Sinn* de una declaración es interpretado por el contenido de lo que es reclamado por la misma, y el *Bedeutung* de una declaración es interpretado por su valor de verdad, dónde sólo existen dos, falso o verdadero), sugiere que este término complejo puede ser interpretado en términos de su *uso*.

Presentación de la Secuencia

En esta secuencia didáctica se proveen una serie de actividades entorno a un circuito eléctrico resistencia-inductancia (*RL*), con el objetivo de que los estudiantes puedan dar un sentido y significado basado en el uso del teorema de convolución, utilizando un ambiente electrónico Or Cad y el software Matlab 7. Para esto, cada estudiante deberá interpretar, modelar, analizar, contrastar y validar las distintas problematizaciones que le permitirán, según nuestra apreciación, una vinculación e integración de este conocimiento con los objetos matemáticos involucrados, así como su relación e importancia con la disciplina intermediaria (Teoría del Control). Esta secuencia didáctica está compuesta por cinco actividades específicas, cada una está seguida de la descripción de su objetivo particular, y de lo que se espera que hagan los estudiantes involucrados. Los estudiantes deberán tener los conocimientos de un curso de ecuaciones diferenciales (Matemáticas V), así cómo el manejo necesario para construir y realizar mediciones en los circuitos eléctricos *RL,* con el programa computacional *Or Cad.* Así mismo, se requiere un manejo básico de la opción del *Simulink* y del programa computacional MatLab7, ya que será fundamental para manejar elementos del álgebra de bloques. El seguimiento de la secuencia didáctica se hará con un grupo de estudiantes de las carreras de Electrónica y Electromecánica, de quinto semestre, cada estudiante contará con un equipo PC, que tendrán instalados los programas computacionales mencionados. Presentamos a continuación las cinco actividades que conforman la secuencia.

Primera Actividad

Objetivo: Pretendemos que cada estudiante, obtenga empíricamente a través del programa Or Cad el modelo matemático correspondiente al circuito *RL,* siguiendo las tareas siguiente La primer tarea corresponde en reproducir al circuito a través del programa Or Cad, una segunda es relacionar a los elementos del circuito con los elementos de la ecuación diferencial y una tercera corresponde a modelar su comportamiento através de su ecuación diferencial.

<u>Primer Tarea</u>.- Usando el programa Or Cad, cada estudiante construirá virtualmente, un circuito RL, como el que se indica en la figura No 1. El estudiante debe obtener un dibujo parecido al indicado en la figura No 1.

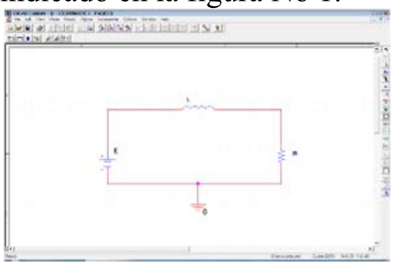


Figura No 1

R	*L*	*E*
1	1	12
2	3	12
3	5	12

Figura No 2 Valores de R, L, y E

<u>Segunda tarea</u>.- Consecuentemente, cada estudiante, dará los valores que se indican a *R, L y E.* (Ver figura No 2), y por cada triada obtendrá gráficamente, las caídas de voltaje tanto de R y L, es decir V_R, V_L, respectivamente. Así mismo abrirá una tercer ventana para que ahí grafique $V_R + V_L$, y observe que se obtiene en cada caso, ver figura No 3.

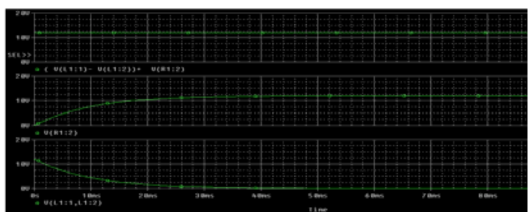


Figura No 3 En la parte inferior se observa a V_R, en medio a V_L y en la parte superior a la suma de ambas, algo similar deberá ocurrir en los demás casos.

El estudiante debe observar que a partir de los resultados de las gráficas de la figura No 3, puede inferir, al menos empíricamente, que: $V_R + V_L = E$. (1)

Es decir *justifica experimentalmente* una de las leyes de Kirchhoff, "la suma de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico es cero".

<u>Tercera tarea</u>.- ¿Puede expresar matemáticamente a (1) en términos de la corriente eléctrica $i(t)$?

Aquí el estudiante usará sus conocimientos previos de los circuitos eléctricos, así de esta manera podrá llegar a: Antecedentes Modelo Matemático

$$\left.\begin{array}{l} V_L = L\dfrac{d\,i}{dt} \\ V_R = R\,i \end{array}\right\} \text{ Sustituyendo en (1) } \rightarrow \; L\frac{d\,i}{dt} + R\,i = E$$

Es decir, todo circuito propuesto, cómo el que se construyó en Or Cad, es modelado por una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, dónde $i(0) = 0$.

$$V_L + V_R = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i = E(t). \qquad (2)$$

Segunda Actividad

En la primera tarea se le solicita al estudiante que resuelva la ecuación diferencial (2), con el método de la transformada de Laplace. En la siguiente tarea se le pedirá que grafique ésta con algún software matemático y en la última tarea se le solicite que contraste ésta gráfica con la que obtuvo con Or Cad. Se espera que el estudiante al contrastar la gráfica de la solución obtenida al resolver la ecuación usando la transformada de Laplace con la gráfica obtenida en el programa de Or Cad, deduzca de manera empírica, que es la misma. Es decir, que relacione que la ecuación modela al circuito. Por otro lado queremos indagar, si en la resolución de la ecuación diferencial (2) con la transformada de Laplace se usa o no el *teorema de convolución*, y le cuestionamos por que usó este proceso. Resolución esperada:

<u>Primer Tarea</u>.- Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri=E. \qquad (3)$$

Se obtiene;

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}\rightarrow \mathcal{L}\left[L\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i\right]=\frac{E}{L}\mathcal{L}[1]. \qquad (4)$$

Aplicando las propiedades y reduciendo se tiene que:

$$\mathcal{L}[i(t)]=\frac{E}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{R}{L}t}. \qquad (5)$$

Y por tanto;

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (6)$$

<u>Segunda tarea</u>.- La gráfica correspondiente a la expresión (6) se muestra en la figura No 4.

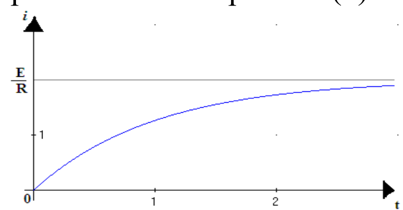
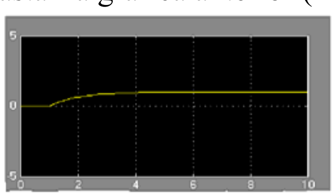
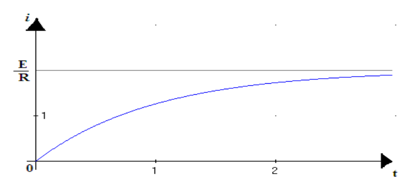


Figura No 4 Representación gráfica de la corriente $i(t)$ del circuito RL.

<u>Tercera tarea</u>- Contrastar la grafica anterior (Figura No 4) con la gráfica que obtuvo con Or Cad.





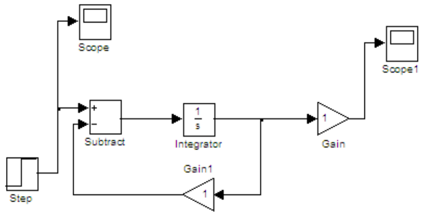
Aquí el estudiante podrá darse cuenta que ambas gráficas son similares

Tercera Actividad

Esta actividad está compuesta de tres tareas, la primera tarea consiste en construir el diagrama de bloques, siguiendo el diagrama de bloques propuesto. La segunda tarea será que el estudiante explore su diagrama de bloques construido y la tercera tarea será que a partir de las lecturas de los distintos resultados obtenidos él pueda deducir que el diagrama de bloques que construyó es similar al comportamiento del circuito eléctrico *RL*, cuyo modelo matemático corresponde a la ecuación diferencial mencionada. Objetivo: Se pretende que el estudiante se de cuenta de la equivalencia del circuito *RL* con el diagrama de bloques que se le proporciona, usando el Simulink del programa MatLab 7. Este diagrama de bloques es producto de la disciplina intermediaria, (Teoría de control).

<u>Primera tarea</u>.- Siguiendo las instrucciones anteriores, el estudiante tratará de construir el diagrama de bloques que se propone (Figura No 5), de tal manera que podrá verificar, si es

correcta o no su construcción ya que en esta parte él podrá obtener los resultados inmediatos para su confiabilidad.



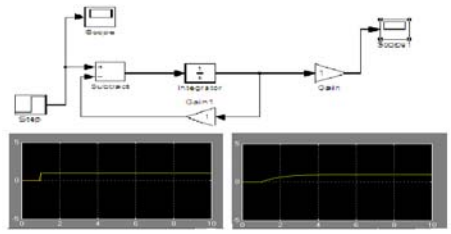


Figura No 5 Representación de un circuito RL, mediante un diagrama de bloques.

Figura No 6 Diagrama de bloques pro-- puesto por el docente.

<u>Segunda Tarea</u>.- El estudiante explorará el diagrama de bloques construido por él, dando diferentes valores de entrada y observará los distintos valores de salida del sistema, así podrá darse cuenta que para todos los casos que proponga siempre va obtener los resultados similares a los que se representan en el diagrama de bloques representado en la figura No 6.

<u>Tercera tarea</u>- El estudiante responderá al siguiente cuestionamiento.

i) Considere la gráfica de la expresión (6), con los valores $E=3, R=1\ \ y\ \ L=1$. Contraste ésta con la gráfica anterior, que observa?

ii) Ahora dé usted valores constantes arbitrarios a *E, R y L* y estos mismos valores compárelos con el diagrama de bloques dado, ¿Qué observa?

iii) ¿Puede usted dar una inferencia a partir de i) y ii)?

Cuarta Actividad

Objetivo: Usando el diagrama de bloques de la actividad anterior, y las consideraciones teóricas de la disciplina intermediaria, el estudiante mediante experimentación deberá darse cuenta que la función impulso unitario, bajo las condiciones que se especifican en la teoría de Control y que se exponen a continuación, es del tipo $h(t)=e^{-\frac{R}{L}t}$. Esta actividad está compuesta de dos tareas, en la primera se elegirá como señal de entrada una aproximación a la función delta de Dirac (La aproximación está dada por el programa computacional Matlab), la segunda tarea corresponderá a explorar y buscar la relación entre la función de entrada y la función de salida. Se espara que el estudiante pueda darse cuenta de que la función impulso unitario del sistema es precisamente la exponencial antes mencionada. Inicialmente se darán algunas argumentaciones fundamentales de la disciplina intermediaria, teoría del Control. Estas argumentaciones teóricas fundamentan la resolución de las tareas propuestas y se esperan que guíen al estudiante para que pueda dar un sentido y significado de uso al *teorema de convolución* en un contexto de control automático. Las consideraciones teóricas son las siguientes.

A) Al circuito eléctrico se le considera cómo un sistema lineal constante, dónde la señal de entrada a este sistema es el voltaje, o bien, la señal del impulso unitario según sea el caso. La respuesta al sistema mencionado es la corriente eléctrica, o bien, la respuesta del sistema al impulso unitario. Esto puede ser representado por el diagrama de la figura No 7.

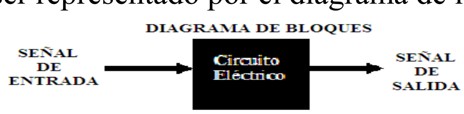


Figura No 7

¿Qué contiene este diagrama de bloques? El diagrama de bloques, tendrá la característica de que el estudiante podrá proponer diferentes señales de entrada, en este caso voltajes, y podrá obtener inmediatamente la respuesta del sistema, que en este caso será la corriente eléctrica. El contenido del diagrama mencionado se describe gráficamente en la figura No 8, y seguidamente se describe su análisis.

Figura 8 Señales de Entrada y Salida.

El análisis se fundamenta en la función de transferencia, según la *teoría de control,* es decir, a partir de la ecuación diferencial que modela el circuito, se le aplica la transformada de Laplace, y de ahí se considera al cociente de la función de salida entre la función de entrada:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E\Rightarrow\frac{\mathfrak{L}\left[i(t)\right]}{\mathfrak{L}\left[E\right]}=\frac{\frac{1}{L}}{s+\frac{R}{L}}. \qquad (4)$$

Y a partir de (4) se diseña los bloques anteriores, resultando los diagramas que se muestran en la figura No 8, usando Matlab.

B) La respuesta de un sistema lineal constante, cumple con las dos condiciones siguientes.

i) Principio de superposición, es decir dadas las señales de entradas del sistema considerado $E_1 \ y \ E_2$, con sus respectivas respuestas de salida $i_1(t) \ y \ i_2(t)$, entonces, se tiene que,

$$E_1+E_2\to i_1+i_2 \qquad (5)$$

ii) La respuesta de salida de un sistema lineal siempre puede expresarse cómo:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)E(\tau)d\tau \qquad (6)$$

Dónde $h(t,\tau)$ es la respuesta del impulso unitario del sistema cuándo éste está en reposo. Usando el principio de superposición y un conjunto de señales elementales, puede obtenerse la respuesta general del sistema. Y de la misma manera podemos obtener la respuesta de una señal simple descomponiendo la señal dada en una suma de componentes elementales. Así el candidato común, como señal elemental, usado en sistemas lineales son los impulsos. Para un sistema lineal en general, se representa a la respuesta al impulso unitario por $h(t,\tau)$, la respuesta en t a un impulso aplicado en τ, entonces la respuesta total del sistema está dado por la expresión (6).

<u>Primera tarea</u>.- Cada estudiante propondrá un tipo de circuito eléctrico dónde la señal de entrada sea una aproximación a la delta de Dirac, y a partir de éste deberá proponer un diagrama de bloque que construirá en Matlab 7, tomando en consideración que la salida será $h(t)$. Para esto deberá usar como herramienta el diagrama de bloques usado en la actividad anterior. Esperamos que el estudiante use Matlab y su propuesta deberá ser algo parecido al diagrama de bloque mostrado en la Figura 9

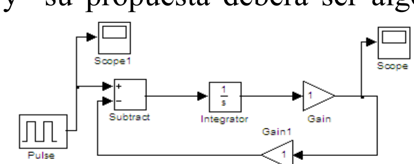


Figura 9: Diagrama de bloque construido con Matlab 7, que representa a un circuito eléctrico cuya señal de entrada es aproximada a la delta de Dirac.

<u>Segunda tarea</u>.- El estudiante explorará dando valores a la aproximación delta de Dirac, es decir, incorporará estas cantidades en el diagrama de bloques elaborado en Matlab 7, e interpretará las gráficas que obtenga en la salida del sistema. Para esto debe proceder a realizar lo siguiente, hay que hacer doble ENTER sobre el dibujo que representa la aproximación de la delta de Dirac, entonces aparece del lado izquierdo de la pantalla de trabajo el Bloque de parámetros, que corresponde a un cuadro dónde se encuentran los parámetros para dar los valores que se deseen y que alterarán tanto la señal de entrada cómo su salida, ver figura No 10

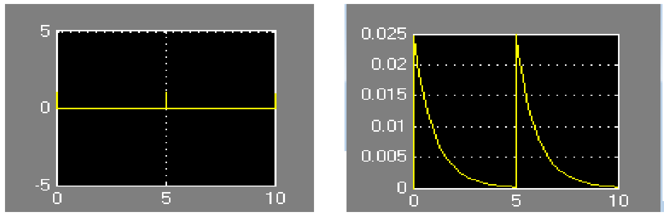


Figura No 10 Obtención de las graficas correspondientes a la señal de entrada y salida del diagrama de bloques de la figura 6Los valores considerados son, Amplitud 1, Periodo 5, y Porcentaje (%)de periodo .5.

1.- ¿Qué observa si el periodo crece? ¿Según las gráficas obtenidas, a que función se aproxima la respuesta de este sistema?
2.- ¿Puede escribir la ecuación diferencial asociada a este diagrama de bloques?
3.- ¿Puede resolver la ecuación diferencial resultante en 3?
4.- ¿Qué función representa la solución de esta ecuación diferencial?

Quinta Actividad

Objetivo: Esperamos que el estudiante se de cuenta que la manera en que se propone en la ciencia interdisciplinaria el cálculo de la función de salida, en este caso $i(t)$, con la condición inicial $i(t)=0$, cuándo se da una señal de entrada $E(t)$, corresponde justamente a la solución obtenida en 3 y de aquí deduzca que la solución $i(t)$ en un circuito *RL* corresponde a una integral de convolución, claro esto de manera empírica. Con esto creemos que el estudiante le dará un sentido al **teorema de convolución** y con esto finaliza esta secuencia didáctica.

<u>Primera tarea</u>.- Cada estudiante calculará $y(t)$, usando los conocimientos de la disciplina intermediaria, es decir, usará la segunda propiedad de los sistemas lineales constantes (integral (5)).

Aquí esperamos que el estudiante considere la expresión (5), es decir:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau,$$

Y sustituya a $h(t)$ para $t \geq 0$, entonces obtiene que,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau=\int_{o}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t}E(t-\tau)\,dt. \qquad (8)$$

<u>Segunda tarea</u>.- El estudiante contrastará el resultado anterior con el resultado de la solución de la ecuación diferencial (3). ¿Qué encuentra en este contraste?

Esperamos que el estudiante responda,

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t} * E(t). \qquad (9)$$

Conclusiones

En este artículo se presentó una secuencia didáctica basada en el hecho fundamental de considerar el uso del teorema de convolución en la Teoría de Control, con el objetivo de que los estudiantes puedan construir ideas a partir del sentido que este concepto adquiere en esta disciplina. Es decir, dotar de un sentido a este teorema sin depender de toda la complejidad matemática que le da sentido únicamente en el contexto matemático. Lo anterior atiende al paradigma de las matemáticas como disciplina de servicio y ofrece una posibilidad de conectar modelos físicos, matemáticos y de ingeniería a través de interfases: los escenarios de simulación que ofrecen los softwares OrCad y Matlab. La modelación aparece como un elemento clave, en particular con el uso de modelos físicos (Circuitos), matemáticos (Ecuaciones diferenciales) y de ingeniería (Función de transferencia), los cuales fungen como elementos de control de la simulación y el tratamiento de las tareas propuestas. La secuencia propone así un escenario desde la disciplina intermediaria, que permite introducir este teorema dotándolo de un sentido a partir de su uso.

Referencias

Bosquez, E. ; Lezama, J. ;Mora, C. (2010). Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia de la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. En Lestón, P. (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 23, pp 361-368. México, DF : Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. Y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Brousseau Guy (1986). Fondements et mèthodes de la didactiques des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 7, n.2, pp. 33-115.

Cantoral R., Farfán, Lezama J., y Martinez G. (2006). Socioepistemología y Representación, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, pp. 82-102, México.

Howson, G., Kahane, J. P., Lauginie, P., de Turckheim E. (Eds.) (1988), *Mathematics as a Service Subjec.* Cambridge : Cambridge University Press (Series ICMI Study).

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skoysmose, O. (2005). *Meaning in Mathematics Education*. Springer Science+Busines Media, Inc. Vol. 37. pp. 12-19.

Lezama, J. (2005). Una mirada sociopistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vo1.8, Núm. 3. pp 339-362.

Mellin H.(1896). “Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten”. *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 21(1 96). pp. 6-57. Alemania.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subjec- why ? In A. G. Howson et al. (Eds), Mathematics as a service subjec (pp. 28-34). Cambridge :Cambridge University Press (Series : ICMI study).

Zill D., Cullen M. (2009). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería I, Ecuaciones Diferenciales*. McGraw-Hill. Pp. 193-236.